UNIVERSITÉ LAVAL

Perspective spectrale sur la dynamique des systèmes complexes par la théorie de Koopman

Mémoire

Benjamin Claveau

Maîtrise en physique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Benjamin Claveau, 2026

Perspective spectrale sur la dynamique des systèmes complexes par la théorie de Koopman

Mémoire

Benjamin Claveau

Sous la direction de:

Antoine Allard, directeur de recherche
Patrick Desrosiers, codirecteur de recherche

Résumé

Plusieurs systèmes possèdent un grand nombre de constituants en interaction dont les propriétés individuelles diffèrent profondément de celles du système pris dans son ensemble. Les phénomènes macroscopiques de ces *systèmes complexes* sont difficiles à modéliser, car l'effet de la structure du système, c'est-à-dire la configuration des interactions entre les constituants, sur le comportement macroscopique du système est inconnu a priori. Pour caractériser ces relations entre structure et dynamique, différents cadres théoriques peuvent être considérés. Parmi eux, la théorie de Koopman s'inspire de la mécanique quantique en décrivant l'évolution d'observables de systèmes dynamiques non linéaires par des opérateurs linéaires agissant sur un espace fonctionnel. Malgré des applications fructueuses dans plusieurs domaines, la théorie de Koopman reste sous-exploitée dans l'étude des systèmes complexes.

Ce mémoire a pour objectif d'établir un lien entre la complexité et la théorie de Koopman en décrivant la relation entre la structure et la dynamique macroscopique des systèmes complexes au moyen de l'analyse spectrale de l'opérateur de Koopman. L'étude se concentre en particulier sur l'effet du rang de la matrice de poids, laquelle encode la structure des interactions entre les constituants du système, sur le comportement à grande échelle.

En premier lieu, une méthode de calcul de fonctions propres associées aux déficiences en rang de la matrice de poids est développée à l'aide d'hypothèses simplificatrices. Cette approche est mise à profit par le calcul de fonctions propres exactes et de formes fermées pour deux familles générales de dynamiques de systèmes complexes. Ces fonctions propres sont ensuite utilisées pour réduire la dimension du système, c'est-à-dire le nombre d'équations différentielles nécessaires pour en décrire l'évolution. Finalement, à l'aide des fonctions propres et de la réduction dimensionnelle associée, l'effet du rang de la matrice de poids sur la dynamique est caractérisé pour deux systèmes particuliers : les réseaux de neurones récurrents, qui sont un modèle important de systèmes complexes utilisés en intelligence artificielle et en neurosciences, et le modèle de dynamique écologique de Lotka-Volterra. Ce projet contribue à la caractérisation des systèmes complexes de faible rang, tout en illustrant la pertinence de la théorie de Koopman dans l'étude de ces systèmes dynamiques.

Abstract

Many systems are comprised of a large number of interacting constituents whose individual properties differ greatly from those of the system as a whole. The macroscopic phenomena of such *complex systems* are difficult to model, because the effect of the system's structure, i.e., the configuration of interactions among its constituents, on its macroscopic behavior is generally unknown. To characterize these structure-function relationships, several theoretical frameworks can be considered. Among them, Koopman theory takes inspiration from quantum mechanics by describing the evolution of observables of nonlinear dynamical systems through linear operators acting in a functional space. Despite successful applications in various fields, Koopman theory remains underutilized in the study of complex systems.

The goal of this thesis is to establish a link between complexity and Koopman theory by describing the relationship between the structure and the macroscopic dynamics of complex systems through spectral analysis of the Koopman operator. Specifically, the study focuses on the effect of the rank of the weight matrix, which encodes the structure of the system, on large-scale behavior.

First, a method for computing eigenfunctions associated with rank deficiencies of the weight matrix is developped, using simplifying assumptions. From this approach, exact, closed-form eigenfunctions are computed for two general families of complex system dynamics. These eigenfunctions are then used for dimension reduction, that is, to reduce the number of differential equations required to describe the system's evolution. Finally, using both the eigenfunctions and the associated dimension reduction, the effect of the rank of the weight matrix on the dynamics is characterized for two specific cases: recurrent neural networks, which are commonly used in artificial intelligence and neuroscience, and the Lotka–Volterra ecological model of population dynamics. This work contributes to the characterization of low-rank complex systems while illustrating the relevance of Koopman theory in the study of these dynamical systems.

Table des matières

Résumé ii

Abstract iii

Table des matières iv

Liste des figures vi

Notation et liste de symboles viii

Remerciements xii

Introduction 1

1 Théorie de Koopman 4
- 1.1 Les systèmes dynamiques . . . 4
- 1.2 Intégrales premières et secondes . . . 8
- 1.3 L'opérateur de Koopman et son générateur . . . 11
- 1.4 Fonctions propres et valeurs propres . . . 15
- 1.5 Isostables et isochrones . . . 20
- 1.6 Calcul exact de fonctions propres avec une forme fermée . . . 22
  - 1.6.1 Dynamique linéaire . . . 22
  - 1.6.2 Dynamique unidimensionnelle . . . 23

2 Systèmes complexes 26
- 2.1 Le graphe . . . 26
- 2.2 Dynamique des réseaux complexes . . . 29
- 2.3 Les réseaux de neurones récurrents . . . 34
- 2.4 Le modèle de Lotka-Volterra . . . 38
- 2.5 De valeurs propres à valeurs singulières . . . 41
- 2.6 Dynamique et faible rang . . . 43
  - 2.6.1 Les structures de faible rang chez les RNN . . . 45
  - 2.6.2 Le rang chez Lotka-Volterra . . . 47

3 Étude des systèmes complexes de faible rang par théorie de Koopman 50
- 3.1 Calcul de fonctions propres . . . 51
  - 3.1.1 Séparation du générateur de Koopman . . . 52
  - 3.1.2 Fonctions propres du générateur d'interaction . . . 53
  - 3.1.3 Fonctions propres conjointes . . . 57

3.2 Familles de systèmes dynamiques avec fonctions propres reliées au rang . . . 58
3.2.1 Première famille . . . 59
3.2.2 Seconde famille . . . 63
3.2.3 Recherche d'autres familles . . . 67
3.3 Réduction dimensionnelle . . . 68
3.3.1 Réduction dimensionnelle pour la première famille . . . 68
3.3.2 Réduction dimensionnelle pour la seconde famille . . . 73
3.4 Effet du rang sur la dynamique . . . 77
3.4.1 Sous-espaces invariants chez les RNN . . . 77
3.4.2 Stabilité des écosystèmes chez Lotka-Volterra . . . 80

Conclusion **85**

A Quand Kuramoto rencontre Koopman **88**

B Systèmes dynamiques non autonomes **92**

C Calcul de fonctions propres approximatives pour RNN **94**

Bibliographie **97**

Liste des figures

1.1 Représentation schématique de l'opérateur de Koopman et de son générateur . 14
1.2 Ensembles des zéros des fonctions propres 20
1.3 Exemple simple d'isostables 22
1.4 Fonctions propres de la forme normale de bifurcation noeud-selle 25

2.1 Différents types de graphe et leur matrice d'adjacence/de poids associée. 28
2.2 Représentation par un graphe d'un réseau d'échange de messages 29
2.3 Paramètre d'ordre de Kuramoto en fonction du couplage 32
2.4 Exemples courants de fonction d'activation 35
2.5 Points d'équilibre du neurone en auto-interaction 36
2.6 Séries temporelles d'un RNN en régimes chaotique et non chaotique 37
2.7 Modèle de Lotka-Volterra à deux populations 39
2.8 Représentation conceptuelle du rang d'une matrice. 42
2.9 Régimes d'activité d'un RNN aléatoire avec perturbation de rang 1 47

3.1 RNN avec une fonction propre linéaire 79
3.2 Relation entre les deux formes de dynamiques de RNN 80
3.3 Lotka-Volterra avec une fonction propre monomiale 84

How do I explain this concisely
This is Tuesdays
And also July
And sometimes it's never

The Good Place – Chapter 31

Notation et liste de symboles

Abréviations

EDO	Équation différentielle ordinaire
EDP	Équation différentielle partielle
GOK	Générateur de l'opérateur de Koopman
DVS	Décomposition en valeurs singulières
RNN	Réseau de neurones récurrent (*recurrent neural network*)
SI/SIS	*susceptible-infected* / *susceptible-infected-susceptible* (épidémiologie)

Ensembles

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels (excluant 0)
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathcal{C}^k$	Ensemble des fonctions dont la k-ième dérivée existe et est continue

Opérations

$\times$	Produit cartésien
$\circ$	Composition de fonctions
$\odot$	Produit d'Hadamard / puissance par élément
span	Sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs
#	Cardinalité d'un ensemble

Symboles

Toutes les quantités vectorielles sont notées par des symboles en caractères gras.

Symboles généraux

$\boldsymbol{\psi}$	Système dynamique (flot), aussi noté $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{x})$
N	Dimension du système dynamique / nombre de noeuds du réseau complexe
$\mathcal{X}$	Espace des états
$\boldsymbol{x}$	État du système dynamique
$\boldsymbol{F}$	Champ vectoriel de la dynamique
$\mathcal{Z}^C$	Ensemble de niveau de valeur C d'une fonction
$\mathcal{Z}^0$	Ensemble des zéros d'une fonction
K	Opérateur de Koopman, aussi noté $K_t[g] \equiv K(t, g)$
$\mathcal{K}$	Générateur de l'opérateur de Koopman (GOK)
$\mathcal{F}$	Espace des observables
ϕ / ϕ_i	Fonction propre de l'opérateur de Koopman et de son générateur
λ / λ_i	Valeur propre du GOK
$\boldsymbol{x}^*$	Point d'équilibre
W	Matrice de poids
$s(\cdot)$	Fonction d'activation (RNN)
P	Matrice de vecteurs propres
D	Matrice de valeurs propres
d_i	i-ième valeur propre
r	Rang de la matrice
U	Matrice de taille $N \times N$ des vecteurs singuliers gauches
Σ	Matrice de taille $N \times N$ des valeurs singulières
V	Matrice de taille $N \times N$ des vecteurs singuliers droits
U_r	Matrice formée des r premières colonnes de U
Σ_r	Matrice de taille $r \times r$ des valeurs singulières non nulles
V_r	Matrice formée des r premières colonnes de V
$\boldsymbol{u}^i$	i-ième vecteur singulier gauche
σ_i	i-ième valeur singulière
$\boldsymbol{v}^i$	i-ième vecteur singulier droit

1 – Théorie de Koopman

$\mathcal{A}$	Attracteur
$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$	Bassin d'attraction de $\mathcal{A}$
Γ	Cycle limite
$\mathcal{V}$	Voisinage
$\mathcal{E}$ / $\mathcal{S}$	Ensemble / sous-ensemble
$\mathcal{T}$	Intervalle de temps
I	Intégrale première
J	Intégrale seconde
α	Fonction donnée par $\dot{J} = \alpha(\boldsymbol{x})J$
g	Observable
$\mathcal{I}_C$	Isostable de valeur $C > 0$
Θ_s	Isochrone de valeur $s \in [0, 2\pi)$

2 – Théorie des systèmes complexes

$\mathcal{G}$	Graphe
$\mathcal{V}$	Ensemble des sommets
$\mathcal{E}$	Ensemble des arêtes/arcs
A	Matrice d'adjacence
G_i	i-ième composante du terme d'interaction général
f_i	i-ième composante du terme de dynamique interne
X	Variables réduites linéaires
χ	Matrice aléatoire
Q	Perturbation de faible rang

3 – Étude des systèmes complexes de faible rang par théorie de Koopman

$\boldsymbol{f}$	Fonction dans le premier terme du champ vectoriel
$\boldsymbol{g}$	Fonction dans le deuxième terme du champ vectoriel
$\boldsymbol{h}$	Fonction d'interaction
∂_i	Dérivée partielle par rapport à x_i
$\mathcal{K}_0$	Générateur de dynamique interne
$\mathcal{K}_I$	Générateur d'interaction
λ_0	Valeur propre de $\mathcal{K}_0$

λ_I	Valeur propre de $\mathcal{K}_I$
φ	Fonction $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue
ζ_ℓ	Fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
Φ_ℓ	Observable telle que $\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Phi_\ell$
∂^{-1}	Antidérivée d'une fonction univariée
$\boldsymbol{\eta}$	Fonction définie comme $[\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})]_i = \eta_i(x_i) = \partial^{-1}\left[\frac{1}{g_i}\right](x_i)$
C_ℓ	Constante réelle
χ_ℓ	Fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
$\boldsymbol{c}$	Vecteur de constantes réelles
exp / ln	Exponentielle/logarithme par élément
id	Fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\boldsymbol{R}$	Fonction de réduction
$\boldsymbol{y}$	Variables intermédiaires pour la réduction
$\boldsymbol{Y}$	Variables réduites
$\boldsymbol{\phi}^0$	Constantes du système réduit (conditions initiales des fonctions propres)
$\boldsymbol{H}$	Fonction d'interaction du système réduit
$U_\perp$	Matrice formée des $N - r$ dernières colonnes de U

Remerciements

Ce mémoire (pour ne pas dire ma présence aux études graduées) n'aurait pas vu le jour sans le soutient et l'accompagnement de Patrick Desrosiers. Je le remercie pour sa patience, sa disponibilité, sa passion ainsi que ses compétences inspirantes. Avoir Patrick comme superviseur de maîtrise dépasse la supervision, c'est une réelle collaboration. Je remercie également Antoine Allard pour son accompagnement et sa présence constante pendant ma maîtrise et ce, même si le sujet s'éloignait parfois de ses intérêts de recherche habituels. Je remercie aussi sincèrement Vincent Thibeault pour son rôle de mentor étudiant et pour notre collaboration fructueuse. J'aimerais remercier tous les membres du groupe Dynamica que j'ai eu le plaisir de côtoyer ainsi que tous les étudiants du bureau avec qui j'ai eu la chance de discuter, de dîner ou de jouer aux jeux du New York Times. Je n'aurais pu demander meilleur entourage pour faire mes premiers pas en recherche.

Je remercie sincèrement Guillaume St-Onge et Nicolas Doyon qui ont accepté d'évaluer ce mémoire. Je vous remercie d'avance du temps investi, qui est toujours non négligeable, et de vos commentaires qui seront, j'en suis convaincu, des plus pertinents.

Je remercie chaleureusement toute ma famille, incluant mes parents, mon frère, mes cousins, mes oncles et tantes ainsi que mes grand-parents, qui, malgré mon incapacité à leur expliquer mon travail brièvement et simplement, me supportent de façon constante et inconditionnelle.

Finalement, je remercie Judith Aucoin de m'avoir accompagné dans la vie pendant toutes les étapes de ce processus. Ce bout de chemin que nous avons fait ensemble a contribué de nombreuses façons à ce mémoire.

Introduction

Soit un renard qui parcourt la forêt à la recherche de nourriture prenant la forme d'un petit animal. Soit un neurone qui envoie des signaux électriques se propageant dans plusieurs régions d'un cerveau. Ou encore, soit un être humain faisant partie de la communauté tissée serrée d'un petit village reculé. Qu'ont ces éléments en commun ? Le renard, le neurone et l'humain sont des constituants d'un système (écosystème, cerveau, réseau social) comptant de nombreux autres constituants, tous en interaction. Ainsi, le comportement de chacun de ces constituants est affecté par ses comparses, puis affecte à son tour le comportement des autres à travers des schémas d'interaction enchevêtrés. Pris dans son ensemble, un tel système possède parfois des propriétés fondamentalement différentes de celles de ses constituants. On n'a qu'à penser, par exemple, aux fonctions cognitives de haut niveau telles que la mémoire déclarative ou encore aux fonctions perceptives comme la vision ou l'audition, qui n'ont a priori rien à voir avec le comportement d'un neurone individuel. De manière analogue, le comportement d'un écosystème ou d'un réseau social diffère grandement de celui d'un animal ou d'une personne seule. En trois mots : *More is different* [4, 98].

L'étude de l'émergence de tels phénomènes macroscopiques à partir des interactions d'un grand nombre d'éléments relève du domaine de la complexité. Même s'il n'existe pas à proprement parler de définition universellement acceptée de ce qu'est un *système complexe*, il est possible d'identifier quelques caractéristiques fondamentales sur lesquelles s'entendent plusieurs définitions [20, 48, 73, 76]. D'abord, un système complexe est composé d'un grand nombre de constituants qui interagissent ensemble de façon hétérogène, c'est-à-dire que la structure des interactions diffère d'un constituant à un autre. Le comportement individuel de chacun de ces constituants est régi par des règles d'interaction simples, mais non linéaires. Finalement, les systèmes complexes possèdent typiquement une capacité d'adaptation ou d'apprentissage en réaction à leur environnement. Il est assez évident que le cerveau humain, par exemple, satisfait cette définition de système complexe. D'abord, il est constitué d'un grand nombre de neurones dont la dynamique intrinsèque peut être approximée par des règles simples et non linéaires. Ces neurones interagissent ensemble de façon hétérogène, ce qui permet l'émergence d'une grande variété de phénomènes macroscopiques. De plus, nous en faisons l'expérience au quotidien, le cerveau possède évidemment des capacités d'adaptation et d'apprentissage en réaction à son environnement.

Un enjeu important dans l'étude des systèmes complexes est la compréhension de la relation entre la structure des interactions et le comportement à grande échelle. Cette relation est difficile à caractériser, car les systèmes dynamiques utilisés pour modéliser les systèmes complexes décrivent typiquement la dynamique individuelle de chaque constituant plutôt que le comportement global. Il est donc nécessaire d'agréger l'information sur les constituants afin d'en tirer une description des phénomènes à grande échelle. Ce processus a pour effet de transformer un système dynamique de grande dimension, où chaque constituant est décrit par une variable dynamique différente, en un système de plus faible dimension où les variables représentent des propriétés macroscopiques. Plusieurs méthodes de *réduction dimensionnelle* parviennent à cette fin en mettant à profit des techniques d'algèbre linéaire afin d'identifier des variables macroscopiques linéaires optimales à partir de la structure des interactions du système [31, 44, 50, 105]. Le groupe Dynamica a d'ailleurs apporté plusieurs contributions au développement de telles réductions [55, 102, 104, 107]. Dans certains cas, ces méthodes réussissent à décrire approximativement des phénomènes macroscopiques avec un faible nombre de variables linéaires. Or, même si la recherche de variables macroscopiques non linéaires est nettement plus ardue [17, 55, 102], les méthodes de réduction basées sur de telles variables sont parfois mieux adaptées [19, 59, 113, 114]. Pour développer des méthodes de réduction dimensionnelle non linéaires, il est donc pertinent de considérer des cadres d'analyse alternatifs à ceux utilisés traditionnellement en science de la complexité. Dans cette entreprise, un candidat prometteur s'annonce depuis quelques temps déjà : la théorie de Koopman.

Inspirés par le succès de la théorie des opérateurs en mécanique quantique, Koopman et Von Neumann démontrent au début des années 1930 que tout système dynamique, qu'il soit linéaire ou non linéaire, peut s'écrire dans le langage d'opérateurs linéaires [46, 47, 75]. Cette méthode d'analyse consiste à représenter le système dynamique d'origine dans un nouvel espace de fonctions dans lequel l'évolution du système est régie par un opérateur linéaire : l'opérateur de Koopman. Les fonctions qui peuplent ce nouvel espace sont les *observables* du système : des fonctions qui mesurent une certaine quantité qui dépend de l'état du système. En physique classique, on peut penser par exemple à des observables comme l'énergie cinétique, la position d'un projectile ou la vitesse moyenne d'un ensemble de particules. Un avantage fondamental de la théorie de Koopman est que le passage du système dynamique non linéaire des variables d'origine à un système linéaire d'observables permet l'application de méthodes d'analyse habituellement réservées aux systèmes linéaires, comme l'analyse spectrale. Ce changement de représentation vient toutefois avec un coût important : le système linéaire d'observables est de dimension infinie. L'art de la théorie de Koopman est donc de choisir judicieusement les observables considérées afin de pouvoir analyser le système linéaire malgré tout et en tirer des conclusions valides exactement ou dans une certaine approximation.

Après la parution des travaux de Koopman et Von Neumann, la théorie de Koopman sombre quelque peu dans l'oubli pour le reste du 20^{e} siècle. Il faut attendre les travaux de Mezić [18,

62, 65, 70, 72] au tournant du 21^{e} siècle, suivis par ceux de Kutz, Brunton et collègues [16, 17], pour voir un regain d'intérêt de la communauté scientifique pour cette théorie. Depuis, entre autres par l'avènement de l'apprentissage automatique et le développement rapide de la science des données, des applications fructueuses notamment en mécanique des fluides [69, 88] et en robotique molle [14, 15] ont cimenté la pertinence de la théorie pour la modélisation de systèmes dynamiques. Or, malgré quelques efforts récents de rapprochement [25, 78, 84], le lien entre théorie de Koopman et systèmes complexes demeure encore largement inexploré. La recherche d'observables pertinentes étant au coeur des défis actuels en science de la complexité, l'approche koopmanienne se présente comme un cadre de choix dans l'analyse de dynamiques de réseaux complexes.

Motivé par ces constatations, le projet de maîtrise présenté dans ce mémoire a pour but l'application de la théorie de Koopman aux dynamiques de systèmes complexes afin de caractériser le lien entre leur structure et leur comportement à grande échelle. Le projet se développe en trois objectifs particuliers. Le premier objectif est de calculer des fonctions propres de l'opérateur de Koopman qui relient les caractéristiques structurelles des systèmes complexes à leurs caractéristiques dynamiques. Le second objectif consiste ensuite à développer des méthodes de réduction dimensionnelle non linéaires à partir de ces fonctions propres. Finalement, puisque des travaux récents ont révélé la pertinence de cette propriété structurelle chez les systèmes complexes [102], le troisième objectif est de caractériser l'effet du rang de la matrice de poids sur le comportement global des systèmes complexes.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le Chap. 1 présente les concepts de théorie des systèmes dynamiques et de théorie de Koopman qui sont nécessaires pour le projet. Étant donné la nature analytique du travail effectué ici, des pans importants de la théorie de Koopman, particulièrement en ce qui a trait aux nombreuses applications numériques et basées sur les données, sont omis par souci de concision. Le Chap. 2 porte sur la théorie des systèmes complexes. Plus particulièrement, il se concentre sur la dynamique des systèmes complexes, sur les phénomènes émergents et sur l'effet du rang sur ceux-ci. Finalement, le Chap. 3 présente un projet de recherche portant sur l'analyse spectrale de l'opérateur de Koopman pour les systèmes complexes de faible rang. Ces travaux comprennent le calcul de certaines fonctions propres de l'opérateur de Koopman reliées au rang pour deux familles de systèmes dynamiques incluant entre autres un modèle de dynamique écologique et un modèle de dynamique neuronale. Ces fonctions propres décrivent d'une part l'effet du rang sur ces systèmes et induisent d'autre part une réduction dimensionnelle non linéaire. Le mémoire se termine par une brève conclusion comprenant un retour sur les objectifs et proposant des avenues futures pour la suite du projet de recherche. Quelques annexes sont ajoutées au mémoire, dont l'Ann. A résumant les résultats principaux de l'article [103] portant sur l'application de la théorie de Koopman au modèle de Kuramoto de synchronisation d'oscillateurs couplés.

Chapitre 1

Théorie de Koopman

Ce premier chapitre présente d'abord aux Sec. 1.1 et 1.2 les concepts de théorie des systèmes dynamiques qui sont à la fois fondamentaux en théorie de Koopman et en dynamique des systèmes complexes. À partir de la Sec. 1.3, la théorie de Koopman est abordée en présentant d'abord les concepts de base, puis les concepts reliés à l'analyse spectrale de l'opérateur de Koopman. Le chapitre se conclut par deux exemples simples d'application à la Sec. 1.6. Il est important de noter que, le mémoire étant centré sur les approches analytiques exactes, les méthodes approximatives, basées sur des données ou utilisant l'apprentissage automatique ne sont pas abordées dans ce chapitre, mais une approche symbolique approximative est présentée à l'Ann. C.

1.1 Les systèmes dynamiques

Avant de plonger dans la théorie de Koopman, il est nécessaire de définir les différents concepts pertinents en théorie des systèmes dynamiques. Les définitions qui suivent sont principalement adaptées de [81], mais apparaissent évidemment dans plusieurs autres ouvrages de systèmes dynamiques [101, 116]. Le symbole $\mathcal{C}^1$ désigne ici les fonctions dont la première dérivée existe et est continue.

Définition 1. Un *système dynamique* autonome continu de dimension $N \in \mathbb{N}$ est une fonction $\boldsymbol{\psi} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour un ouvert $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ et où $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{x})$ possède les propriétés

(i) $\boldsymbol{\psi}_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$,

(ii) $\boldsymbol{\psi}_t \circ \boldsymbol{\psi}_s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi}_{t+s}(\boldsymbol{x})$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$.

Il est commun de donner à la fonction $\boldsymbol{\psi}$ le nom de *flot* du système dynamique. De plus, on nomme $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ un *état* du système dynamique et la variable réelle t désigne la dépendance

en *temps*. Ainsi, la Déf. 1 stipule que $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}_0)$ représente l'état du système au temps t lorsqu'il évolue à partir de la condition initiale $\boldsymbol{x}_0$. Elle indique également que la composition de deux flots successifs est équivalente à un unique flot dont la durée correspond à la somme des deux durées. L'espace topologique $\mathcal{X}$, nommé *espace des états*, est composé de l'ensemble des états possibles du système et est muni de la topologie héritée de la topologie standard de $\mathbb{R}^N$.

Pour les systèmes considérés dans le cadre de ce mémoire, le flot de la dynamique est inconnu a priori. L'évolution de l'état du système dynamique est plutôt décrite par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))\,, \tag{1.1}$$

où le champ vectoriel $\boldsymbol{F} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$ encode la dérivée temporelle de $\boldsymbol{x}(t)$ en fonction de l'état $\boldsymbol{x}(t)$ du système au temps t. Pour alléger la notation, les dérivées temporelles sont notées

$$\dot{\boldsymbol{x}} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

et les dépendances temporelles de $\boldsymbol{x}$ et de $\dot{\boldsymbol{x}}$ sont généralement omises dans les EDO. Avec la condition initiale $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{X}$, le système de l'Éq. (1.1) constitue un problème aux conditions initiales dont les solutions sont les trajectoires du système dynamique. Dans ce mémoire, le champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui implique que les solutions et le flot du système dynamique associé sont uniques et de classe $\mathcal{C}^1$ [101]. Les deux formulations étant équivalentes sous ces conditions, le terme *système dynamique* est utilisé pour désigner à la fois la fonction de la Déf. 1 et le problème aux conditions initiales associé.

Les systèmes dynamiques considérés dans ce chapitre sont tous *autonomes*. Les systèmes dynamiques *non autonomes* sont plutôt associés à un système d'EDO dont le champ vectoriel est de la forme $\boldsymbol{G} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire qu'ils possèdent une dépendance temporelle explicite. L'adaptation de la Déf. 1 pour inclure de tels systèmes est le sujet de l'Ann. B. Les systèmes dynamiques non autonomes ne sont pas étudiés par la théorie de Koopman dans ce mémoire, mais ils sont nécessaires pour la réduction dimensionnelle de systèmes autonomes à partir de la Sec. 3.3.

Un système dynamique est *linéaire* si et seulement si son champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ dépend linéairement des variables $\boldsymbol{x}$. Si ce n'est pas le cas, on dit que le système dynamique est *non linéaire*. Comme illustré entre autres à l'Ex. 4, l'analyse des systèmes dynamiques linéaires est facilitée par le fait que le problème aux conditions initiales peut être résolu pour obtenir les trajectoires $\boldsymbol{x}(t)$. Quand la dynamique est non linéaire, il est généralement impossible de résoudre le système d'EDO de l'Éq. (1.1) pour obtenir une forme fermée du flot [101]. La plupart des systèmes dynamiques étudiés dans ce mémoire sont non linéaires.

Dans l'étude d'un système dynamique, il est courant de vouloir déterminer la présence de structures particulières dans l'espace des états qui ont un effet sur l'évolution temporelle du

système ou sur sa dépendance envers certains paramètres. Un exemple simple de ce concept est le point d'équilibre.

Définition 2. Un *point d'équilibre* $\boldsymbol{x^*} \in \mathcal{X}$ d'un système dynamique $\boldsymbol{\psi}$ est un état particulier pour lequel $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x^*}) = \boldsymbol{x^*}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Intuitivement, un point d'équilibre désigne un état particulier pour lequel l'état du système ne varie pas dans le temps. En ce sens, tout point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ doit donc satisfaire $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$. L'effet de la présence d'un point d'équilibre sur la dynamique dépend de sa stabilité.

Définition 3. Un point d'équilibre $\boldsymbol{x^*} \in \mathcal{X}$ d'un système dynamique $\boldsymbol{\psi}$ est dit *stable*[1] si

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^*} \tag{1.3}$$

pour tout $\boldsymbol{x}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ de $\boldsymbol{x^*}$. Pour le plus grand voisinage $\mathcal{V}$ pour lequel cette propriété s'applique, l'ensemble $\mathcal{B}_{\boldsymbol{x}^*} = \mathcal{V} \setminus \{\boldsymbol{x^*}\}$ est le *bassin d'attraction* de $\boldsymbol{x^*}$. Si $\mathcal{B}_{\boldsymbol{x}^*} = \mathcal{X} \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$, alors le point d'équilibre est *globalement stable*.

Un point d'équilibre *instable* est simplement un point d'équilibre qui ne respecte pas la condition de la Déf. 3. Illustrons les concepts définis jusqu'à présent à l'aide d'un exemple.

Exemple 4. Soit un système dynamique linéaire autonome N-dimensionnel de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}\,, \tag{1.4}$$

où la matrice réelle diagonalisable A possède la décomposition spectrale $A = PDP^{-1}$. En effectuant le changement de variables $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$, où les colonnes de P sont les vecteurs propres de A, on obtient la dynamique découplée

$$\dot{y}_i = d_i y_i\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{1.5}$$

où d_i est la i-ième valeur propre de A. En résolvant le système d'EDO, on obtient que le flot du système dynamique en $\boldsymbol{y}$ est

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{y}) = \operatorname{diag}\left(e^{d_1 t}, \ldots, e^{d_N t}\right)\boldsymbol{y}\,, \tag{1.6}$$

ce qui, dans les variables originales, équivaut à

$$\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) = P \operatorname{diag}\left(e^{d_1 t}, \ldots, e^{d_N t}\right) P^{-1}\boldsymbol{x}\,. \tag{1.7}$$

Si $d_i < 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors, dans la limite $t \to \infty$, la matrice diagonale tend vers la matrice nulle. Dans ce cas, l'origine est un point d'équilibre globalement stable de la dynamique, car les solutions $\boldsymbol{x}(t)$ convergent vers l'origine pour tout $\boldsymbol{x}(0) \in \mathbb{R}^N$. Si $d_i > 0$ pour au moins un $i \in \{1, \ldots, N\}$, alors l'origine est plutôt un point d'équilibre instable.

1. Dans plusieurs ouvrages, un tel point d'équilibre est plutôt dit *asymptotiquement stable* [81, 116], tandis que l'appellation *stable* désigne la stabilité de Lyapunov, qui est moins restrictive. Dans ce mémoire, tous les points d'équilibre stables sont considérés asymptotiquement stables.

Un autre exemple de structure dans l'espace des phases est le cycle limite [2].

Définition 5. Un *cycle limite* $\Gamma \subset \mathcal{X}$ d'un système dynamique est une courbe fermée correspondant à une trajectoire fermée qui n'est pas un point d'équilibre. Le cycle limite est dit *stable* si

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in\Gamma} \left\| \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \right\|_2 = 0 \tag{1.8}$$

pour tout $\boldsymbol{x}$ dans un voisinage $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ de Γ, où $\|\cdot\|_2$ désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.

La condition de l'Éq. (1.8) implique simplement que, dans un certain voisinage, les trajectoires atteignent le cycle limite dans la limite $t \to \infty$. Les cycles limites seront particulièrement utiles à la Sec. 2.4, car ils sont une propriété caractéristique de certains modèles écologiques.

Les trajectoires des systèmes dynamiques peuvent converger vers des structures plus générales que les points d'équilibre et les cycles limites. Afin de décrire ces phénomènes, définissons les concepts d'ensemble invariant, d'ensemble attractif et d'attracteur [81, 101, 116], qui généralisent en quelque sorte le concept de point d'équilibre.

Définition 6. Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ est dit *invariant* si $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{E}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Définition 7. Un ensemble invariant $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ est dit *attractif* s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ tel que $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V}$ pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{A}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

Définition 8. Un *attracteur* $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ est un ensemble attractif qui contient une orbite dense.

La condition d'existence d'une orbite dense de la Déf. 8 équivaut à dire qu'un attracteur $\mathcal{A}$ ne peut pas contenir d'ensemble invariant strictement plus petit que $\mathcal{A}$. Les exemples typiques d'attracteurs sont les points d'équilibre stables et les cycles limites stables, en plus des attracteurs étranges propres aux systèmes chaotiques [97]. Par définition, un attracteur est toujours localement stable au sens où les trajectoires à proximité convergent asymptotiquement vers celui-ci. Au-delà de la dynamique locale, il est pertinent de définir le bassin d'attraction des attracteurs ou, plus généralement, des ensembles attractifs.

Définition 9. Soit un ensemble attractif (ou attracteur) $\mathcal{A}$. Le bassin d'attraction de $\mathcal{A}$ est $\mathcal{B}_\mathcal{A} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}$ pour un ensemble $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ et

(i) $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{A}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$,

(ii) $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}) \notin \mathcal{A}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{V}$.

Si $\mathcal{B}_\mathcal{A} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{A}$ est globalement stable.

Nous verrons plus tard que les ensembles attractifs et leurs bassins d'attraction sont intimement reliés aux fonctions propres de l'opérateur de Koopman.

2. La définition de cycle limite présentée ici est adaptée de la définition de *periodic orbit* de [81], car ils réservent le terme *limit cycle* aux systèmes planaires.

1.2 Intégrales premières et secondes

La théorie de Koopman fait intervenir plusieurs concepts d'intégrabilité des systèmes dynamiques. Définissons-les donc ici avant de nous lancer dans la théorie de Koopman à la section suivante. Les définitions et lemmes de cette section sont adaptés de [34, 120].

Commençons par définir les intégrales premières et leurs propriétés. Dans cette section, le symbole $\boldsymbol{x}$ désigne un état quelconque du système, tandis que $\boldsymbol{x}(t)$ désigne l'état du système au temps t le long d'une trajectoire.

Définition 10. Pour un sous-ensemble ouvert $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, une *intégrale première* $I : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dot{I} = 0$, où la dépendance temporelle de I est définie implicitement par le flot de la dynamique. Une intégrale première est dite *triviale* si $I(\boldsymbol{x}) = c$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ avec $c \in \mathbb{C}$.

Communément appelées intégrales du mouvement [9, 43], quantités conservées ou constantes du mouvement [95, 103, 113], les intégrales premières sont des quantités qui restent inchangées dans le temps. Des exemples typiques sont, par exemple, la conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement en mécanique classique. En général, les intégrales premières peuvent posséder une dépendance explicite en temps. Ces intégrales premières dépendantes du temps sont plutôt définies comme $I : \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ et respectent également la propriété $\dot{I} = 0$. Or, sauf mention contraire, les intégrales premières sont considérées non triviales et indépendantes du temps dans ce mémoire.

Puisque les intégrales premières restent inchangées dans le temps, elles doivent être constantes sur les trajectoires définies par les solutions du système dynamique.

Lemme 11. *Soit un sous-ensemble ouvert $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$. Une fonction $I : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est une intégrale première si et seulement si elle est constante le long de chaque solution de $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))$ définie sur l'intervalle $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in \mathcal{T}$.*

Si une intégrale première I est connue, d'autres intégrales premières peuvent être construites comme $G(I)$ pour n'importe quelle fonction G de classe $\mathcal{C}^1$. Le nombre d'intégrales premières étant une quantité importante directement reliée à l'intégrabilité des systèmes dynamiques [34, 120], il est nécessaire d'introduire une notion d'indépendance fonctionnelle. La définition suivante est adaptée de [34, 79].

Définition 12. Soit $\zeta_i : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ et pour un entier positif k arbitraire. Les fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ sont *fonctionnellement indépendantes* sur $\mathcal{S}$ si, pour tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{S}$, la restriction de $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ sur $\mathcal{V}$ est telle que la matrice jacobienne $\mathrm{d}\zeta$ est de rang k.

La Def. 12 implique que l'indépendance fonctionnelle d'un ensemble d'intégrales premières peut être démontrée en observant le plein rang de la matrice jacobienne en tout point.

Une propriété importante des intégrales premières est que leurs ensembles de niveau définissent des sous-ensembles invariants de l'espace des états.

Définition 13. Les *ensembles de niveau* d'une fonction $\zeta : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ sont les ensembles

$$\mathcal{Z}^C = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \,|\, \zeta(\boldsymbol{x}) = C\}\,, \qquad C \in \mathbb{C}\,, \tag{1.9}$$

où l'ensemble $\mathcal{Z}^0$ est *l'ensemble des zéros* de ζ.

Lemme 14. *Soit un système dynamique possédant une intégrale première $I : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{C}$. Tout ensemble de niveau $\mathcal{Z}^C$ de I pour $C \in \mathbb{C}$ est un sous-ensemble invariant de $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit une solution du système dynamique telle que $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$. Soit également une valeur $C \in \mathbb{C}$ telle que $I(\boldsymbol{x}(t_1)) = C$ pour un $t_1 \in \mathcal{T}$ quelconque. Par le Lem. 11, $I(\boldsymbol{x}(t_1)) = C$ implique que $I(\boldsymbol{x}(t)) = C$ pour tout $t \in \mathcal{T}$. Donc, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{Z}^C$ pour tout $t \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{Z}^C$ est un sous-ensemble invariant de $\mathcal{S}$. □

En assouplissant les contraintes sur les intégrales premières, on obtient un autre concept d'intégrabilité des systèmes dynamiques particulièrement important dans le cadre de la théorie de Koopman : les intégrales secondes. La définition qui suit est adaptée de [34].

Définition 15. Une intégrale seconde $J : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\dot{J} = \alpha J$, où $\alpha : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ et où la dépendance temporelle de J est définie implicitement par le flot de la dynamique. L'intégrale seconde J est triviale si $J(\boldsymbol{x}) = c$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ avec $c \in \mathbb{C}$.

Dans le cas particulier où α est identiquement nul, les intégrales secondes sont des intégrales premières. Or, le cas qui nous intéresse dans le cadre de la théorie de Koopman est celui où α est une fonction constante, c'est-à-dire que $\alpha(\boldsymbol{x}) = c$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ avec $c \in \mathbb{C}$. En intégrant directement l'équation différentielle de $\dot{J}$, les intégrales secondes d'une telle forme ont une évolution temporelle exponentielle

$$J(\boldsymbol{x}(t)) = J(\boldsymbol{x}(0))e^{ct}\,. \tag{1.10}$$

De plus, dans ce cas, les intégrales secondes définissent des sous-espaces invariants par leurs ensembles des zéros.

Lemme 16. *Soit un système dynamique possédant une intégrale seconde $J : S \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ telle que $\dot{J} = cJ$ pour $c \in \mathbb{C}$. L'ensemble des zéros $\mathcal{Z}^0$ de J est un sous-ensemble invariant de $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit une solution du système dynamique telle que $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$. Soit une valeur $t_1 \in \mathcal{T}$ pour laquelle $\boldsymbol{x}(t_1) \in \mathcal{Z}^0$. Selon la forme de l'Éq. (1.10), $J(\boldsymbol{x}(t_1)) = 0$ implique que $J(\boldsymbol{x}(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathcal{T}$. Donc, $\boldsymbol{x}(t_1) \in \mathcal{Z}^0$ implique que $\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{Z}^0$ pour tout $t \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{Z}^0$ est un sous-espace invariant de $\mathcal{S}$. □

Concluons cette section avec un exemple simple d'intégrales première et seconde.

Exemple 17 (Oscillateur harmonique)**.** L'oscillateur harmonique est régi par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0\,, \tag{1.11}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ est la fréquence naturelle de l'oscillateur. Cette équation différentielle est de second ordre et ne correspond donc pas directement à notre forme habituelle de système dynamique. Or, en définissant les nouvelles variables $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, on peut aisément réécrire le système comme

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \qquad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1\,, \tag{1.12}$$

ce qui est un système d'EDO de premier ordre. L'énergie totale du système, donnée par

$$E(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2\,, \tag{1.13}$$

est une intégrale première, car on peut facilement vérifier que $\dot{E} = 0$ en calculant directement $\dot{E}$ par dérivation en chaîne. Chaque ensemble de niveau de E est donc un sous-ensemble invariant de l'espace des états. Ajoutons maintenant un terme d'amortissement dans la dynamique tel que

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \qquad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\gamma\, x_2 \tag{1.14}$$

pour $\gamma > 0$. Dans ce système, l'énergie n'est plus conservée et E n'est donc pas une intégrale première. Par contre, il est possible de trouver des intégrales secondes. Par exemple, la fonction

$$J(\boldsymbol{x}) = \omega^2 x_1 + \left(\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right) x_2 \tag{1.15}$$

est une intégrale seconde du système, car, en calculant sa dérivée temporelle, on obtient

$$\dot{J} = -\left(\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right) J\,. \tag{1.16}$$

De plus, par le Lem. 16, on sait que l'ensemble des zéros de J, soit

$$\mathcal{Z}^0 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right) x_2 = -\omega^2 x_1 \right\}\,, \tag{1.17}$$

est un sous-ensemble invariant. Par inspection, on remarque que si $\gamma^2 < \omega^2$ (oscillations amorties), alors la condition ne peut être satisfaite que pour $x_1 = x_2 = 0$ et le sous-ensemble invariant contient uniquement le point d'équilibre à l'origine. Pour $\gamma^2 \geq \omega^2$, qui correspond à un amortissement surcritique (aucune oscillation), le sous-ensemble invariant forme une droite passant par l'origine.

Nous avons maintenant tous les outils en main pour aborder la théorie de Koopman.

1.3 L'opérateur de Koopman et son générateur

Le paradigme fondamental de la théorie de Koopman est de s'intéresser à l'évolution temporelle d'observables, c'est-à-dire de fonctions de mesure du système comme les intégrales premières et secondes présentées à la section précédente. Cette évolution se produit alors dans un espace de fonctions plutôt que dans l'espace des états. Cette perspective permet d'adopter un formalisme d'opérateurs linéaires semblable à celui utilisé en mécanique quantique. Les concepts fondamentaux de théorie de Koopman présentés dans cette section ont été initialement définis par Koopman et Von Neumann [46, 47, 75], puis repris et généralisés dans de nombreux travaux plus récents [17, 18, 66, 70, 88]. Par souci de concision, les concepts de théorie de Koopman sont définis uniquement pour les systèmes dynamiques autonomes dans ce mémoire.

Étant donné qu'il est impossible de parler de théorie de Koopman sans parler d'observables, commençons par définir celles-ci.

Définition 18. Une *observable* g d'un système dynamique défini sur $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ est une fonction $g : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour un temps t donné, $g(\boldsymbol{x}(t))$ est la *valeur observée*.

En physique classique[3], des exemples typiques d'observables sont la position, la quantité de mouvement ou l'énergie du système. De façon plus générale, une observable est simplement une fonction scalaire de l'état du système. Par exemple,

$$g_1(\boldsymbol{x}) = x_1\,, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \quad \text{et} \quad g_3(\boldsymbol{x}) = \sin(x_1) + \sin(x_2 x_3) \tag{1.18}$$

sont trois observables bien définies sur $\mathbb{R}^{N\geq 3}$. L'observable g_1 ici retourne l'état d'une variable dynamique. L'observable g_2 est une observable linéaire, car elle est une combinaison linéaire des variables dynamiques. Finalement, g_3 est un exemple d'observable non linéaire.

Pour pouvoir effectuer des opérations sur les observables et définir des opérateurs, il faut introduire un *espace des observables* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^1$ qui possède une certaine structure minimale. Dans le cadre de ce mémoire, l'espace des observables doit être

1. un *espace vectoriel* sur $\mathbb{C}$ pour que les combinaisons linéaires d'observables soient bien définies ;
2. une *algèbre commutative* sur $\mathbb{C}$ pour que le produit d'observables soit bien défini ;

3. Le terme *observable* est également utilisé en mécanique quantique [35], mais il ne désigne pas tout à fait le même concept qu'en théorie de Koopman.

3. une algèbre commutative *normée* pour que les limites soient bien définies.

Il existe plusieurs espaces de fonctions qui satisfont ces conditions. Par exemple, l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec dérivée bornée satisfait ces conditions pour la norme $\|g\|_{C_b^1} = \|g\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty$. De plus, si le domaine $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ est un compact, la condition de dérivée bornée est trivialement satisfaite. Nous ne choisissons pas d'espace de fonctions particulier ici et considérons plutôt simplement que l'espace des observables $\mathcal{F}$ satisfait les trois conditions énoncées ci-haut.

Soit une observable g d'un système dynamique. Au temps t, la valeur observée est $g(\boldsymbol{x}(t))$, où la trajectoire $\boldsymbol{x}(t)$ dans $\mathcal{X}$ est régie par le flot $\boldsymbol{\psi}$ du système dynamique. La valeur observée peut donc être exprimée comme

$$g(\boldsymbol{x}(t)) = g(\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}(0)) = g \circ \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{x}(0))\,. \tag{1.19}$$

De façon équivalente, on peut considérer que l'observable g effectue une trajectoire dans $\mathcal{F}$ de sorte que, au temps t, l'observable est devenue $g \circ \boldsymbol{\psi}_t$. Dans ce paradigme, l'opérateur de Koopman est défini comme l'opérateur d'évolution des observables dans $\mathcal{F}$.

Définition 19. *L'opérateur de Koopman*[4] $K : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ d'un système dynamique $\boldsymbol{\psi}$, noté $K_t\,[g] \equiv K(t, g)$, est défini comme

$$K_t\,[g] = g \circ \boldsymbol{\psi}_t \tag{1.20}$$

pour tout $t \in \mathcal{T}$ et tout $g \in \mathcal{F}$.

Dans sa forme explicite, l'opérateur de Koopman est donc simplement l'opérateur de composition avec le flot de la dynamique. Ce faisant, il hérite de deux propriétés du flot, soit

(i) $K_0\,[g] = g$ pour tout $g \in \mathcal{F}$,

(ii) $K_t\,K_s\,[g] = K_{t+s}\,[g]$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{F}$.

L'opérateur de Koopman est en ce sens l'analogue du flot dans l'espace des observables. Cette nouvelle représentation possède toutefois un avantage important : l'opérateur de Koopman est un opérateur *linéaire*. Ainsi, pour tout système dynamique linéaire ou non linéaire,

$$K_t\,[\beta\, g_1 + \gamma\, g_2] = \beta\, g_1 \circ \boldsymbol{\psi}_t + \gamma\, g_2 \circ \boldsymbol{\psi}_t = \beta\, K_t\,[g_1] + \gamma\, K_t\,[g_2] \tag{1.21}$$

pour tout $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. La linéarité de l'opérateur de Koopman est donc héritée de la distributivité de la composition sur l'addition de deux fonctions[5].

L'opérateur de Koopman est particulièrement facile à utiliser dans le contexte des systèmes en temps discret, car le flot $\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x}(t))$ est habituellement connu, ce qui permet le calcul d'une forme fermée pour l'action de l'opérateur de Koopman $K_1[g] = g \circ \boldsymbol{\psi}_1$. Toutefois, pour

4. Il est aussi commun de noter l'opérateur de Koopman U et U_t.

5. Cette propriété se démontre directement comme $(f+g) \circ h(\boldsymbol{x}) = f(h(\boldsymbol{x})) + g(h(\boldsymbol{x})) = f \circ h(\boldsymbol{x}) + g \circ h(\boldsymbol{x})$ et n'est généralement valide que lorsque l'addition est du côté gauche de la composition.

les systèmes continus dans le temps, le champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ est généralement connu plutôt que le flot de la dynamique, ce qui complique la tâche pour travailler avec K_t. Un objet intéressant à considérer dans ce cas est le générateur infinitésimal de l'opérateur de Koopman.

Définition 20. Le *générateur infinitésimal de l'opérateur de Koopman (GOK)* $\mathcal{K}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est défini comme

$$\mathcal{K}[g] = \lim_{t\to 0} \frac{K_t[g] - g}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g \circ \boldsymbol{\psi}_t - g}{t} \tag{1.22}$$

pour toute observable $g \in \mathcal{F}$.

Si l'opérateur de Koopman est l'analogue du flot dans $\mathcal{F}$, le GOK est plutôt l'analogue du champ vectoriel dans $\mathcal{F}$, entre autres car son action définit les dérivées temporelles des observables comme

$$\dot{g} = \mathcal{K}[g]\,. \tag{1.23}$$

Or, même si $\boldsymbol{F}$ est non linéaire, le système dynamique est toujours linéaire dans $\mathcal{F}$. Ce système peut donc être résolu pour retrouver le lien entre le GOK et l'opérateur de Koopman, soit

$$K_t = e^{t\mathcal{K}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{K})^j}{j!}\,. \tag{1.24}$$

Cette expression se vérifie aisément en substituant K_t dans l'Éq. (1.22).

L'avantage principal du générateur est que sa forme fermée peut être calculée aisément si $\boldsymbol{F}$ est connu. Par dérivation en chaîne, la dérivée temporelle d'une observable $g \in \mathcal{F}$ est

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{N} F_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\,. \tag{1.25}$$

Par cette expression et l'Éq. (1.23), la forme générale du GOK est trivialement obtenue, soit

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{N} F_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,. \tag{1.26}$$

À cause de la linéarité de la dérivée, il est encore clair ici que le GOK est un opérateur linéaire. Il est pertinent aussi de noter que, d'un point de vue de géométrie différentielle, le GOK est simplement le champ vectoriel sur la variété $\mathbb{R}^N$ représenté dans la base $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}$ dont les composantes sont $F_1, \ldots, F_N$ [74]. Les observables sont des fonctions scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur la variété différentielle.

Les concepts présentés dans cette section sont illustrés à la Fig. 1.1 et dans l'exemple suivant.

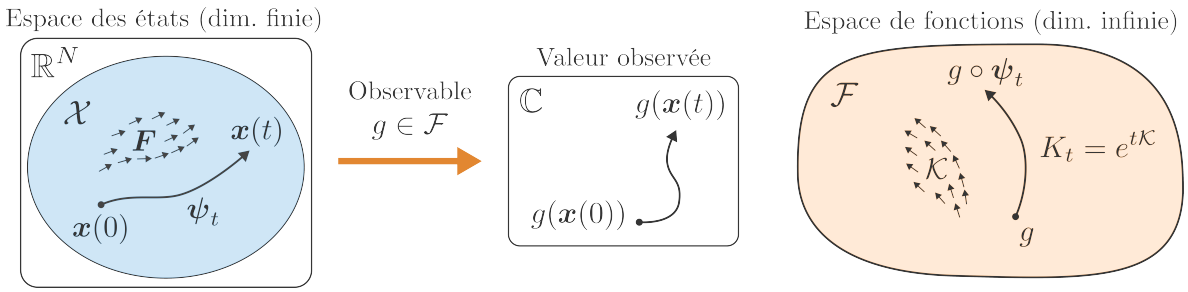


FIGURE 1.1 – Représentation schématique de l'opérateur de Koopman et de son générateur. Dans l'espace des états $\mathcal{X}$, qui est de dimension finie N, la dynamique des états est régie par un champ vectoriel (possiblement non linéaire) $\boldsymbol{F}$ qui génère le flot $\boldsymbol{\psi}_t$. Dans l'espace de fonctions $\mathcal{F}$, qui est de dimension infinie, la dynamique des observables est linéaire et est régie par l'opérateur de Koopman K_t et son générateur $\mathcal{K}$. Les deux descriptions permettent de décrire l'évolution dans le temps de la valeur observée $g(\boldsymbol{x}(t))$.

Exemple 21. Cet exemple simple provient initialement de [106] et a été repris dans [16, 17]. Soit un système dynamique de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu\, x_1\,, \\ \dot{x}_2 &= \nu\left(x_2 - x_1^2\right)\,, \end{aligned} \tag{1.27}$$

où $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Le GOK de ce système est

$$\mathcal{K} = \mu\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \nu\left(x_2 - x_1^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\,. \tag{1.28}$$

Choisissons deux premières observables $g_1(\boldsymbol{x}) = x_1$ et $g_2(\boldsymbol{x}) = x_2$. L'action du GOK sur ces observables est

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\left[g_1\right](\boldsymbol{x}) &= \mu\, x_1 = \mu\, g_1(\boldsymbol{x})\,, \\ \mathcal{K}\left[g_2\right](\boldsymbol{x}) &= \nu\left(x_2 - x_1^2\right) = \nu\left(g_2(\boldsymbol{x}) - x_1^2\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

et fait intervenir une nouvelle observable $g_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2$. L'action du GOK sur cette nouvelle observable est

$$\mathcal{K}\left[g_3\right](\boldsymbol{x}) = 2\mu\, x_1^2 = 2\mu\, g_3(\boldsymbol{x})\,. \tag{1.30}$$

Le système linéaire d'observables est maintenant fermé et peut être exprimé en notation matricielle comme

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & -\nu \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}\,. \tag{1.31}$$

Nous avons donc réexprimé le système dynamique non linéaire dans l'espace des états $\mathcal{X}$ comme un système dynamique linéaire dans l'espace de fonctions $\mathcal{F}$.

Dans l'Ex. 21, le sous-espace de dimension 3 engendré par les trois observables est invariant sous l'action du GOK (aussi appelé un sous-espace Koopman-invariant), mais ce phénomène résulte d'un agencement très particulier entre la dynamique et les observables. En général, l'action répétée du générateur génère toujours de nouvelles observables linéairement indépendantes, ce qui implique un système linéaire de dimension infinie. Cette conséquence complique nettement l'analyse des systèmes linéarisés. Pour cette raison, il est commun de chercher des observables particulières qui permettent de générer des sous-espaces invariants sous l'action du GOK. Les *fonctions propres* du GOK sont un exemple courant de ce type d'observable.

1.4 Fonctions propres et valeurs propres

Comme la théorie de Koopman considère toute dynamique comme un système linéaire d'observables, elle permet d'appliquer aux dynamiques non linéaires des méthodes d'analyse habituellement réservées aux systèmes linéaires. Plus particulièrement, l'analyse spectrale de l'opérateur de Koopman et de son générateur, soit la recherche de leurs fonctions propres et de leurs valeurs propres, est couramment utilisée pour étudier les systèmes dynamiques non linéaires [16, 17, 22, 62, 63, 65, 70, 71].

Définition 22. Une observable $\phi \in \mathcal{F}$ est une *fonction propre* du GOK si

$$\mathcal{K}[\phi] = \lambda\phi \tag{1.32}$$

pour une certaine valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ nommée *valeur propre*. Si $\phi(\boldsymbol{x}) = c$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$ avec $c \in \mathbb{C}$, alors ϕ est *triviale*.

Sauf mention explicite, les fonctions propres sont toujours considérées comme non triviales dans ce mémoire. Les fonctions propres du GOK sont des quantités dynamiques importantes, car leur évolution dans le temps est indépendante des autres observables. En ce sens, elles représentent des directions dans l'espace des observables $\mathcal{F}$ qui sont préservées par l'action du générateur et de l'opérateur de Koopman. À cause de cette propriété, tout ensemble de fonctions propres $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ du GOK génère un sous-espace Koopman-invariant de la forme

$$\Phi = \left\{ f \in \mathcal{F} \,\middle|\, f = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n \right\}, \tag{1.33}$$

c'est-à-dire que $\mathcal{K}[f] \in \Phi$ pour tout $f \in \Phi$. De plus, les fonctions propres sont, selon la valeur propre λ associée, des intégrales premières ou secondes du système dynamique.

Lemme 23. *Une fonction propre du GOK est une intégrale première si et seulement si elle est de valeur propre nulle.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{K}[\phi] = \lambda\phi$ pour toute fonction propre ϕ du GOK. De plus, selon la Déf. 10, la fonction ϕ est une intégrale première si et seulement si $\dot{\phi} = \mathcal{K}[\phi] = 0$. Par comparaison, toute fonction propre ϕ non identiquement nulle est une intégrale première si et seulement si $\lambda = 0$. □

Les fonctions propres du GOK de valeur propre non nulle permettent toutefois de définir des intégrales premières dépendantes du temps.

Lemme 24. *Pour toute fonction propre ϕ du GOK de valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction I définie comme $I(t, \boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})\, e^{-\lambda t}$ est une intégrale première dépendante du temps.*

Démonstration. La dérivée temporelle de la fonction d'intérêt est

$$\dot{I}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial t} I(t, \boldsymbol{x}) + e^{-\lambda t}\mathcal{K}[\phi](\boldsymbol{x}) = e^{-\lambda t}\lambda\phi(\boldsymbol{x}) - \lambda e^{-\lambda t}\phi(\boldsymbol{x}) = 0\,. \tag{1.34}$$

La fonction I est donc une intégrale première dépendante du temps. □

De plus, les fonctions propres du GOK sont des cas particuliers d'intégrales secondes.

Lemme 25. *Toute fonction propre du GOK est une intégrale seconde.*

Démonstration. Selon la forme de la Déf. 15, une fonction propre de valeur propre λ est une intégrale seconde avec $\alpha(\boldsymbol{x}) = \lambda$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$. □

Les fonctions propres héritent donc non seulement des propriétés des intégrales secondes, mais surtout des propriétés des intégrales secondes avec une fonction α constante. Plus particulièrement, cela implique que les ensembles des zéros des fonctions propres sont des sous-ensembles invariants de $\mathcal{X}$.

Lemme 26. *L'ensemble des zéros $\mathcal{Z}^0 \subset \mathcal{X}$ d'une fonction propre ϕ du GOK, défini comme $\mathcal{Z}^0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \,|\, \phi(\boldsymbol{x}) = 0\}$, est un ensemble invariant.*

Démonstration. Par le Lem. 25, puis par le Lem. 16. □

De plus, l'intersection entre deux ensembles invariants étant toujours invariante [101], les intersections des ensembles des zéros de plusieurs fonctions propres sont aussi invariantes.

Quel est le comportement des fonctions propres dans le temps ? En appliquant l'opérateur de Koopman sur une fonction propre du GOK, on obtient que

$$K_t\,[\phi] = e^{t\mathcal{K}}[\phi] = e^{\lambda t}\phi\,. \tag{1.35}$$

Toute fonction propre du GOK de valeur propre λ est donc une fonction propre de l'opérateur de Koopman K_t de valeur propre $e^{\lambda t}$. Par cette forme d'évolution exponentielle (qui était d'ailleurs attendue par l'Éq. (1.10)), la partie réelle de la valeur propre détermine si le module de la fonction propre croit ou décroit de façon monotone le long des solutions du système.

Lemme 27. *Soit une fonction propre ϕ du GOK de valeur propre λ. Pour tout état initial $\boldsymbol{x}(0) \in \mathcal{X}$ tel que $\phi(\boldsymbol{x}(0))$ est fini et non nul :*

(i) $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$ *implique que* $\lim_{t\to\infty} \phi(\boldsymbol{x}(t)) = 0$ *et* $\lim_{t\to-\infty} |\phi(\boldsymbol{x}(t))| = \infty$,

(ii) $\mathrm{Re}\{\lambda\} > 0$ *implique que* $\lim_{t\to\infty} |\phi(\boldsymbol{x}(t))| = \infty$ *et* $\lim_{t\to-\infty} \phi(\boldsymbol{x}(t)) = 0$,

(iii) $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ *implique que* $|\phi(\boldsymbol{x}(t))| = |\phi(\boldsymbol{x}(0))|$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour démontrer les deux premiers énoncés, considérons la norme de la valeur observée dans la limite $t \to \infty$, soit

$$\left|\lim_{t\to\infty} \phi(\boldsymbol{x}(t))\right| = \lim_{t\to\infty} |\phi(\boldsymbol{x}(t))| = \lim_{t\to\infty} \left|e^{\lambda t}\phi(\boldsymbol{x}(0))\right| = \lim_{t\to\infty} e^{\mathrm{Re}\{\lambda\}t}|\phi(\boldsymbol{x}(0)|\,, \tag{1.36}$$

où la première égalité est valide par la continuité de $|\cdot|$. Pour tout $\phi(\boldsymbol{x}(0))$ fini et non nul, l'exponentielle fait tomber la limite à 0 pour tout $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$ et fait exploser la limite à l'infini pour tout $\mathrm{Re}\{\lambda\} > 0$. La première partie des énoncés (i) et (ii) est donc prouvée. La démonstration de la deuxième partie de ces énoncés suit la même procédure en prenant plutôt la limite $t \to -\infty$. Le troisième énoncé se vérifie directement comme

$$|\phi(\boldsymbol{x}(t))| = \left|e^{i\,\mathrm{Im}\{\lambda\}t}\phi(\boldsymbol{x}(0))\right| = |\phi(\boldsymbol{x}(0))|\,, \tag{1.37}$$

car le facteur $e^{i\,\mathrm{Im}\{\lambda\}t}$ induit un déphasage, mais n'affecte pas la norme de la valeur observée. □

Cette croissance/décroissance monotone de la norme des fonctions propres a des implications importantes quant à la valeur des fonctions propres sur les attracteurs. Ce faisant, elle permet de décrire les attracteurs et leur bassin d'attraction par les fonctions propres du GOK. Le lemme suivant est adapté de résultats de Mauroy et Mezić [64, 65].

Lemme 28. *Soit un système dynamique comportant un attracteur $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ avec un bassin d'attraction $\mathcal{B}_\mathcal{A}$. Pour toute fonction propre ϕ du GOK bien définie sur $\mathcal{B}_\mathcal{A} \cup \mathcal{A}$ et associée à une valeur propre λ telle que* $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$ *, $\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. Pour tout état initial $\boldsymbol{x}(0) \in \mathcal{B}_\mathcal{A}$, la Déf. 9 implique que $\lim_{t\to\infty} \phi(\boldsymbol{x}(t)) \in \mathcal{A}$. Or, par le Lem. 27, $\lim_{t\to\infty} \phi(\boldsymbol{x}(t)) = 0$ pour $\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$. Comme ϕ est continue sur $\mathcal{B}_\mathcal{A} \cup \mathcal{A}$ et que toute fonction continue évaluée en un point doit être égale à sa limite, $\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ pour au moins un point sur $\mathcal{A}$. Finalement, tout attracteur possède une trajectoire dense, c'est-à-dire une trajectoire qui passe arbitrairement proche de ce point et de tous les autres points de l'attracteur. Par le Lem. 26 et par continuité, $\phi(\boldsymbol{x})$ doit donc être nulle pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$. □

Une propriété particulière des fonctions propres du GOK est qu'il est possible de créer de nouvelles fonctions propres en multipliant deux fonctions propres connues.

Lemme 29. *Soit deux fonctions propres du GOK ϕ_1 et ϕ_2 de valeurs propres λ_1 et λ_2. Pour $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, l'observable $\phi_1^{k_1}\phi_2^{k_2}$ est une fonction propre du GOK de valeur propre $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$.*

Démonstration. En appliquant directement le GOK sur le produit, on obtient, par la dérivée d'un produit de fonctions, que

$$\mathcal{K}\left[\phi_1^{k_1}\phi_2^{k_2}\right] = k_1\phi_1^{k_1-1}\phi_2^{k_2}\,\mathcal{K}\left[\phi_1\right] + k_2\phi_1^{k_1}\phi_2^{k_2-1}\,\mathcal{K}\left[\phi_2\right] = (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)\phi_1^{k_1}\phi_2^{k_2}\,. \tag{1.38}$$

L'observable $\phi_1^{k_1}\phi_2^{k_2}$ est donc bel et bien une fonction propre du GOK de valeur propre $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2$. □

Cette propriété est héritée du fait que le GOK est un opérateur différentiel linéaire de premier ordre. Même si les nouvelles fonctions propres obtenues de cette façon ne sont évidemment pas fonctionnellement indépendantes des fonctions propres connues, cette propriété permet dans certains cas de combiner les fonctions propres connues afin de créer des fonctions propres ayant des propriétés désirables, comme des valeurs propres nulles ou de parties réelles négatives. Par exemple, il est possible dans certains cas de combiner q fonctions propres pour créer $q-1$ intégrales premières [18, 103].

Finalement, comme le GOK est un opérateur linéaire, les fonctions propres possèdent également une propriété additive, mais celle-ci est plus restrictive.

Lemme 30. *Soit deux fonctions propres du GOK ϕ_1 et ϕ_2 de valeurs propres λ_1 et λ_2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$, alors $\beta\phi_1 + \gamma\phi_2$ est une fonction propre de valeur propre λ pour tout $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Par la linéarité du GOK,

$$\mathcal{K}\left[\beta\phi_1 + \gamma\phi_2\right] = \beta\mathcal{K}\left[\phi_1\right] + \gamma\mathcal{K}[\phi_2] = \beta\lambda\phi_1 + \gamma\lambda\phi_2 = \lambda(\beta\phi_1 + \gamma\phi_2). \tag{1.39}$$

□

Si ϕ_2 est une fonction propre triviale, le Lem. 30 montre que, comme pour tout opérateur linéaire, les fonctions propres du GOK ne sont définies qu'à un facteur constant près. Cette constante est généralement omise dans ce mémoire pour alléger la notation.

La propriété du Lem. 30 n'est évidemment pas valide pour deux fonctions propres de valeurs propres différentes. De plus, si une fonction propre ϕ est une combinaison linéaire de fonctions indépendantes, ces fonctions ne sont pas nécessairement individuellement des fonctions propres

du GOK[6]. Toutefois, pour des valeurs propres réelles, les parties réelles et imaginaires de ϕ sont des fonctions propres du GOK. En effet, pour une valeur propre réelle λ,

$$\mathcal{K}[\phi] = \mathcal{K}[\mathrm{Re}\{\phi\} + i\,\mathrm{Im}\{\phi\}] = \lambda(\mathrm{Re}\{\phi\} + i\,\mathrm{Im}\{\phi\})\,. \tag{1.40}$$

Par la linéarité du GOK et en séparant les parties réelles et imaginaires de l'équation, on obtient le système

$$\mathcal{K}[\mathrm{Re}\{\phi\}] = \lambda\,\mathrm{Re}\{\phi\}\,, \quad \mathcal{K}[\mathrm{Im}\{\phi\}] = \lambda\,\mathrm{Im}\{\phi\}\,, \tag{1.41}$$

ce qui signifie que $\mathrm{Re}\{\phi\}$ et $\mathrm{Im}\{\phi\}$ sont des fonctions propres de valeur propre λ[7]. Il est toutefois pertinent de noter que cette propriété est valide pour les systèmes dynamiques avec un champ vectoriel réel, ce qui est toujours le cas dans ce mémoire.

Concluons en reprenant l'exemple de la section précédente.

Exemple 31. Soit le système dynamique de l'Ex. 21 (repris de [16, 17, 106]). Rappelons que le système peut être linéarisé dans un sous-espace Koopman-invariant comme

$$\begin{bmatrix}\dot{g}_1\\ \dot{g}_2\\ \dot{g}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & \nu & -\nu\\ 0 & 0 & 2\mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ g_3\end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ g_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_1^2\end{bmatrix}\,. \tag{1.42}$$

Dans ce cas, la dynamique linéaire est de dimension finie et la matrice peut être diagonalisée. Les fonctions propres du GOK comprises dans le sous-espace engendré par les trois observables g_1, g_2 et g_3 sont alors données par les vecteurs propres de la matrice. Ces fonctions propres sont

$$\phi_1 = g_1\,, \quad \phi_2 = g_2 - \frac{\nu}{\nu - 2\mu}g_3\,, \quad \phi_3 = g_3 \tag{1.43}$$

de valeurs propres

$$\lambda_1 = \mu\,, \quad \lambda_2 = \nu\,, \quad \lambda_3 = 2\mu\,. \tag{1.44}$$

En fonction des variables dynamiques, les fonctions propres sont

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = x_1\,, \quad \phi_2(\boldsymbol{x}) = x_2 - \frac{\nu}{\nu - 2\mu}x_1^2\,, \quad \phi_3(\boldsymbol{x}) = x_1^2\,. \tag{1.45}$$

Remarquons au passage que $\phi_3 = \phi_1^2$ et $\lambda_3 = 2\lambda_1$, ce qui concorde avec le Lem. 29. Nous avons donc seulement deux fonctions propres fonctionnellement indépendantes ϕ_1 et ϕ_2. Ces fonctions propres impliquent les deux ensembles invariants

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1^0 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \,|\, x_1 = 0\}\,,\\ \mathcal{Z}_2^0 &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \,\middle|\, x_2 = \frac{\nu}{\nu - 2\mu}x_1^2\right\}\,.\end{aligned} \tag{1.46}$$

6. On peut penser à la série de Taylor de ϕ par exemple, où les monômes sont indépendants mais ne sont pas généralement des fonctions propres du GOK.

7. Cette propriété s'applique aussi si la valeur propre est purement imaginaire. Inversement, si $\mathrm{Re}\{\phi\}$ et $\mathrm{Im}\{\phi\}$ sont des fonctions propres de valeur propre λ, alors ϕ est fonction propre par le Lem. 30.

De plus, l'intersection entre $\mathcal{Z}_1^0$ et $\mathcal{Z}_2^0$ est également un ensemble invariant. Pour $\nu \neq 0$, cet ensemble comprend uniquement l'origine $\boldsymbol{x} = 0$ et on en déduit que l'origine est un point d'équilibre de la dynamique. Particulièrement, dans le régime où $\mu < 0$, $\nu < 0$ et $\nu \neq 2\mu$, les deux fonctions propres sont de valeur propre réelle négative et sont bien définies sur tout $\mathbb{R}^N$. Alors, pour $t \to \infty$, les deux fonctions propres vont tomber à 0 pour toute condition initiale. L'origine est donc un point d'équilibre globalement stable dans ce régime. Les ensembles invariants sont représentés à la Fig. 1.2.

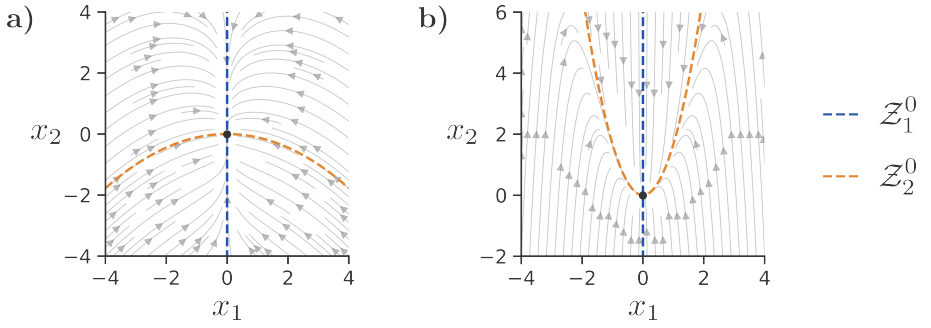


FIGURE 1.2 – Ensembles des zéros des fonctions propres pour a) $\nu = -0.2$, $\mu = -1$ et b) $\nu = -1$, $\mu = -0.2$. Les courbes bleue et orange sont respectivement les ensembles des zéros de ϕ_1 et de ϕ_2 et sont des ensembles invariants. Les deux courbes se croisent à l'origine, où se trouve un point d'équilibre globalement stable.

1.5 Isostables et isochrones

En plus de d'identifier des sous-ensembles invariants par leurs ensembles des zéros, les fonctions propres du GOK décrivent le comportement du système autour d'attracteurs à travers deux quantités importantes : les *isochrones* et les *isostables*. Utilisées depuis plusieurs décennies et dans plusieurs domaines différents [13, 51, 61, 119], les isochrones sont un outil important de réduction en dynamique de phase qui consiste à regrouper ensemble tous les points dans l'espace des états qui convergent vers la même trajectoire sur un cycle limite. Les isostables [62, 71] sont un outil complémentaire qui caractérise plutôt l'approche d'un attracteur en regroupant les points qui ont la même convergence asymptotique vers celui-ci. Ces deux quantités peuvent être définies à partir de la norme et de la phase de fonctions propres particulières du GOK. La définition suivante, adaptée de [61, 62, 71], concerne le cas d'un point d'équilibre stable où la matrice jacobienne $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ évaluée au point d'équilibre possède N valeurs propres distinctes de parties réelles strictement négatives. La généralisation aux points d'équilibre instables et aux points d'équilibre stables avec des valeurs propres de multiplicité plus grande que 1 est traitée dans [62], mais n'est pas reproduite ici.

Définition 32. Soit un système dynamique avec un point d'équilibre stable $\boldsymbol{x}^*$ pour lequel la matrice jacobienne $\mathrm{d}\boldsymbol{F}\big|_{\boldsymbol{x}^*}$ possède les valeurs propres distinctes $d_j = \alpha_j + i\beta_j$ pour $j \in \{1, \ldots, N\}$ telles que $\alpha_N \leq \ldots < \alpha_1 < 0$. Il existe une fonction propre ϕ du GOK de valeur propre $\lambda = d_1$ définie sur le bassin d'attraction $\mathcal{B}_{\boldsymbol{x}^*}$ du point d'équilibre [8].

1. Les *isostables* $\mathcal{I}_C$ sont les ensembles

$$\mathcal{I}_C = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{x}^*} |\ |\phi(\boldsymbol{x})| = C\} \tag{1.47}$$

   pour $C \geq 0$.

2. Les *isochrones* Θ_s sont les ensembles

$$\Theta_s = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{x}^*} |\ \mathrm{Arg}(\phi(\boldsymbol{x})) = s\} \tag{1.48}$$

   pour $s \in [0, 2\pi)$, où Arg dénote l'argument complexe.

En résumé, les isostables et les isochrones sont donc respectivement les ensembles de niveau du module et de l'argument complexe de la fonction propre du GOK de valeur propre $\lambda = d_1$ bien définie sur le bassin d'attraction.

Pourquoi choisir cette fonction propre ? Comme λ_1 a la plus faible partie réelle (en valeur absolue), cette valeur propre est associée à la *direction lente* du système linéarisé autour du point d'équilibre, c'est-à-dire la direction pour laquelle l'approche du point d'équilibre est la plus lente. Les courbes de niveau de $|\phi|$ sont alors celles qui regroupent les conditions initiales pour lesquelles les solutions ont la même convergence asymptotique, car les fonctions propres associées aux autres valeurs propres de la matrice jacobienne convergent plus rapidement [9]. De façon complémentaire, les isochrones sont ensuite définies comme les ensembles de niveau de l'argument complexe de la fonction propre d'intérêt. Les isochrones et les isostables ne sont pas utilisées directement dans le projet de recherche de ce mémoire, mais les fonctions propres calculées au Chap. 3 permettent parfois de définir des ensembles analogues aux isostables qui caractérisent la convergence asymptotique vers des sous-ensembles invariants.

Exemple 33. Reprenons une dernière fois la dynamique de l'Ex. 21, soit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu\, x_1\,, \\ \dot{x}_2 &= \nu\left(x_2 - x_1^2\right)\,, \end{aligned} \tag{1.49}$$

où $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dans l'Ex. 31, nous avons calculé les deux fonctions propres indépendantes

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = x_1\,, \quad \phi_2(\boldsymbol{x}) = x_2 - \frac{\nu}{\nu - 2\mu} x_1^2 \tag{1.50}$$

8. Pour un tel point d'équilibre, cette fonction propre est unique et est reliée à l'homéomorphisme du théorème de Hartman-Grobman [62, 70, 72].

9. Il est toutefois possible d'étendre le concept d'isostables et d'isochrones à ces fonctions propres pour obtenir un système de coordonnées *action-angle* [62].

de valeurs propres $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = \nu$. Rappelons également que, dans le régime $\mu < 0$ et $\nu < 0$ avec $\mu \neq 2\nu$, l'origine est un point d'équilibre globalement stable. Dans ce cas, la matrice jacobienne évaluée à l'origine possède les deux valeurs propres négatives $d_1 = \mu$ et $d_2 = \nu$ qui correspondent respectivement aux valeurs propres de ϕ_1 et ϕ_2. Les isostables du système sont donc données par les ensembles de niveau de $|\phi_1|$ si $\nu < \mu$ et par les ensembles de niveau de $|\phi_2|$ si $\mu < \nu$. Ces isostables sont illustrées à la Fig. 1.3.

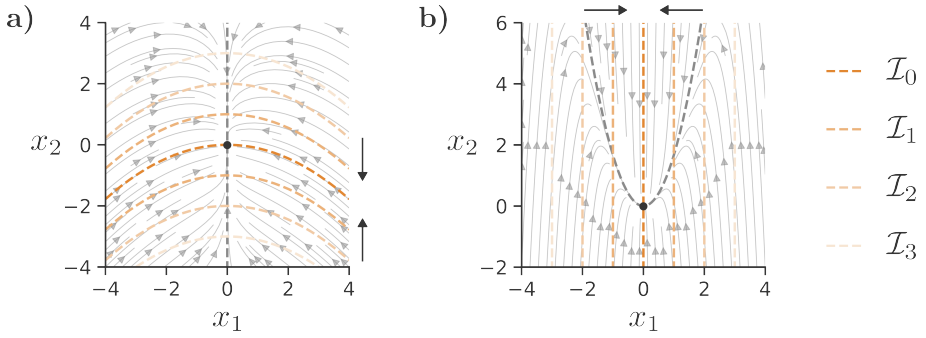


FIGURE 1.3 – Exemple simple d'isostables. a) Pour $\nu = -0.2$ et $\mu = -1$, les isostables sont données par les courbes de niveau de $|\phi_2|$. b) Pour $\nu = -1$ et $\mu = -0.2$, les isostables sont plutôt les courbes de niveau de $|\phi_1|$. Dans les deux cas, les flèches dénotent la convergence exponentielle des trajectoires vers l'isostable $\mathcal{I}_0$ et la courbe grise pointillée désigne l'ensemble des zéros de l'autre fonction propre.

1.6 Calcul exact de fonctions propres avec une forme fermée

Dans certains cas particuliers, il est possible de calculer analytiquement une forme fermée pour les fonctions propres et les valeurs propres exactes du GOK. Nous concluons ce chapitre sur la théorie de Koopman en étudiant deux exemples de ce type de système.

1.6.1 Dynamique linéaire

Le premier cas où il est possible de calculer analytiquement des formes fermées pour les fonctions propres du GOK est simplement un système dynamique linéaire de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}\,, \tag{1.51}$$

où A est une matrice réelle de taille $N \times N$. Le calcul de fonctions propres pour ce type de système est abordé dans plusieurs ouvrages [62, 69, 88]. D'abord, le GOK d'un tel système est

$$\mathcal{K} = (A\boldsymbol{x})^\top \nabla = \boldsymbol{x}^\top A^\top \nabla\,, \tag{1.52}$$

où $[\nabla]_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ est l'opérateur de gradient. Comme le système dynamique est linéaire, cherchons des fonctions propres linéaires, c'est-à-dire des observables de la forme

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{c} \tag{1.53}$$

pour un vecteur $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^N$ quelconque. L'action du GOK sur une observable de cette forme est

$$\mathcal{K}[\phi] = \boldsymbol{x}^\top A^\top \nabla \phi = \boldsymbol{x}^\top A^\top \boldsymbol{c}\,. \tag{1.54}$$

On remarque alors que, si $\boldsymbol{c}$ est un vecteur propre de $A^\top$ de valeur propre λ,

$$\mathcal{K}[\phi] = \lambda \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{c} = \lambda \phi \tag{1.55}$$

et ϕ est une fonction propre du GOK de valeur propre λ. De plus, si A est diagonalisable, alors $A^\top$ l'est aussi et il existe N fonctions propres linéaires du GOK de la forme

$$\phi_i = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{c}^i, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{1.56}$$

de valeur propre λ_i, où $\boldsymbol{c}^i$ et λ_i sont respectivement le i-ième vecteur propre et la i-ième valeur propre de la matrice $A^\top$. Des fonctions propres non linéaires peuvent ensuite être obtenues en considérant le produit de fonctions propres linéaires (Lem. 29).

Exemple 34. La dynamique de l'oscillateur amorti de l'Ex. 17 est un système linéaire pouvant être représenté en notation matricielle comme

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{1.57}$$

où $\omega \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$. En calculant les vecteurs propres de la matrice transposée, on obtient les fonctions propres

$$\begin{aligned} \phi_1(\boldsymbol{x}) &= \omega^2 x_1 + \left(\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right) x_2\,, \\ \phi_2(\boldsymbol{x}) &= \omega^2 x_1 + \left(\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\right) x_2 \end{aligned} \tag{1.58}$$

de valeurs propres $\lambda_1 = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ et $\lambda_2 = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. La fonction propre ϕ_1 est par ailleurs l'intégrale seconde de l'Ex. 17.

1.6.2 Dynamique unidimensionnelle

Outre les systèmes linéaires, il est aussi simple de calculer des fonctions propres ayant une forme fermée pour une dynamique unidimensionnelle de la forme

$$\dot{x} = F(x)\,. \tag{1.59}$$

Dans ce cas, le GOK est de la forme

$$\mathcal{K} = F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,, \tag{1.60}$$

où la dérivée partielle a été troquée pour une dérivée totale étant donné que les observables sont des fonctions univariées dans ce cas. Pour une fonction propre ϕ_λ de valeur propre λ, l'équation aux valeurs propres est donc

$$\mathcal{K}[\phi_\lambda] = F\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}x} = \lambda\phi_\lambda\,. \tag{1.61}$$

Cette EDO à variables séparables peut aisément être résolue pour obtenir les fonctions propres de la forme

$$\phi_\lambda(x) = \exp\left(\lambda\int_b^x \frac{\mathrm{d}\xi}{F(\xi)}\right) \tag{1.62}$$

de valeur propre λ pour $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$ selon la forme de F. Illustrons ce résultat en calculant les fonctions propres d'une forme normale de bifurcation.

Exemple 35. Pour un système dynamique de dimension $N = 1$, la bifurcation noeud-selle [81, 97] est un phénomène où, en faisant varier un paramètre dynamique, un point d'équilibre stable et un point d'équilibre instable convergent en un même point et disparaissent. Pour un tel système, la dynamique près du point de bifurcation correspond approximativement à la forme normale

$$\dot{x} = x^2 + \mu \tag{1.63}$$

pour un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ avec la bifurcation à $\mu = 0$ et $x = 0$. Dans le régime $\mu < 0$, ce système possède un point d'équilibre stable à $-\sqrt{-\mu}$ et un point d'équilibre instable à $\sqrt{-\mu}$, tandis que le régime $\mu > 0$ ne contient aucun point d'équilibre. Le diagramme de bifurcation est montré à la Fig. 1.4. Selon la forme générale donnée à l'Éq. (1.62), la forme normale de la bifurcation noeud-selle possède les fonctions propres

$$\phi_\lambda(x) = \exp\left(\lambda\int_b^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+\mu}\right) \tag{1.64}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui donne, en calculant l'intégrale séparément pour $\mu < 0$ et $\mu > 0$ [10],

$$\begin{aligned}
\phi_\lambda(x) &= \left(\frac{x-\sqrt{-\mu}}{x+\sqrt{-\mu}}\right)^{\frac{\lambda}{2\sqrt{-\mu}}}\,, && \mu < 0\,,\\
\phi_\lambda(x) &= \exp\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\mu}}\right)\right)\,, && \mu > 0\,.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Des exemples de ces fonctions propres sont montrés à la Fig. 1.4. Dans le régime $\mu < 0$, on remarque que la fonction est bien nulle ou infinie aux points d'équilibre si $\mathrm{Re}\{\lambda \neq 0\}$, conformément au Lem. 27.

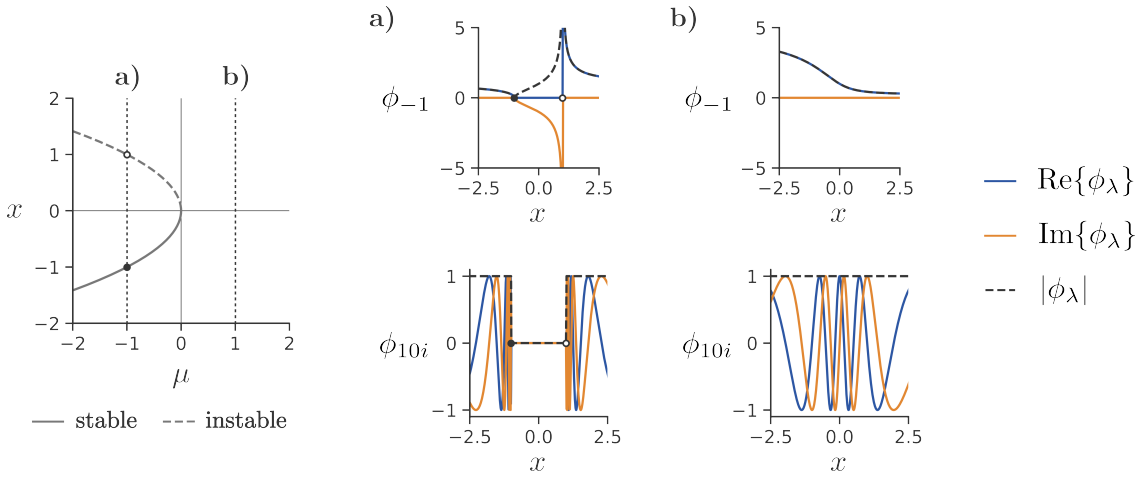


FIGURE 1.4 – Fonctions propres de la forme normale de bifurcation noeud-selle. À gauche : Diagramme de la bifurcation noeud-selle. Les courbes pleine et pointillée désignent respectivement la positions du point d'équilibre stable et instable. À droite : Fonctions propres du GOK de valeur propre -1 (haut) et $10i$ (bas) pour les paramètres a) $\mu = -1$ et b) $\mu = 1$. En haut, on observe bien que les zéros et les singularités de la fonction propre concordent avec les points d'équilibre du diagramme de bifurcation, tandis qu'en bas, la norme est conservée sur chaque ensemble invariant (propriétés attendues par le Lem. 27).

Au-delà d'exemples simples tels que la dynamique linéaire ou unidimensionnelle, le calcul de fonctions propres exactes du GOK possédant une forme fermée est ardu. C'est pourquoi, au Chap. 3, plusieurs hypothèses simplificatrices sont appliquées sur les systèmes dynamiques et sur les fonctions propres afin de mener à terme ce calcul pour certaines *familles* de systèmes complexes. Toutefois, avant de nous attaquer à ce travail, étudions d'abord les éléments importants de théorie des systèmes complexes, particulièrement en ce qui a trait à leur dynamique.

10. Les fonctions propres étant définies à un facteur constant près, la valeur de b n'est pas uniquement déterminée par la forme de la fonction propre. Pour $\mu < 0$, la forme présentée ici est obtenue pour n'importe quelle valeur finie $b \neq \pm\sqrt{-\mu}$. Pour $\mu > 0$, toutes les valeurs de b sont valides.

Chapitre 2

Systèmes complexes

Avec les concepts de théorie des systèmes dynamiques du chapitre précédent bien en main, étudions dans ce chapitre les systèmes complexes et leur dynamique. Comme mentionné dans l'introduction, nous considérons dans ce mémoire que les systèmes complexes sont définis par quelques caractéristiques fondamentales [20, 48, 73, 76]. Premièrement, ils sont composés d'un grand nombre de constituants dont les patrons d'interaction sont hétérogènes, c'est-à-dire non uniformes d'un constituant à l'autre. Deuxièmement, la dynamique résultante de l'interaction entre deux constituants est régie par des règles simples, mais non linéaires. Finalement, ces systèmes possèdent une capacité d'adaptation ou de réaction à leur environnement. Typiquement, on donne le nom de *noeud* à chaque constituant du système. Chaque interaction entre une paire de noeuds (nous considérons seulement les interactions par paire dans ce mémoire) est un *lien*. Le système complexe composé des noeuds et des liens est aussi appelé *réseau complexe* pour dénoter sa structure en réseau. Nous utilisons dans ce mémoire les termes *système complexe* et *réseau complexe* de façon interchangeable.

La Sec. 2.1 ouvre le présent chapitre en définissant le graphe, un outil indispensable pour représenter la structure des systèmes complexes. Les trois sections suivantes portent sur la dynamique des systèmes complexes en s'arrêtant plus en détail sur deux exemples : les réseaux de neurones récurrents et le modèle de Lotka-Volterra. Finalement, les Sec. 2.5 et 2.6 définissent le rang et la décomposition en valeurs singulières et présentent leur rôle dans l'étude des dynamiques de systèmes complexes.

2.1 Le graphe

L'objet mathématique de prédilection pour représenter les patrons d'interaction entre les différents constituants d'un système complexe est le graphe [12, 77].

Définition 36. Un *graphe* $\mathcal{G}$ est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}$ et d'un

ensemble d'arêtes $\mathcal{E}$, disjoint de $\mathcal{V}$, accompagné d'une fonction d'incidence γ qui associe chaque arête de $\mathcal{G}$ à une paire de sommets distincts de $\mathcal{G}$.

La fonction d'incidence retourne les deux sommets qui sont dits *reliés* par l'arête. Par exemple, pour une arête $a \in \mathcal{E}$ reliant deux sommets $b, c \in \mathcal{V}$, alors $\gamma(a) = \{b, c\}$. Or, dans ce mémoire, la fonction d'incidence est généralement implicite et les arêtes sont notées directement comme des paires (non ordonnées) $a = \{b, c\}$ de sommets. De plus, les sommets sont ordonnés et associés chacun à un entier $i \in \{1, \ldots, N\}$, où $N = \#\,\mathcal{V}$ est le nombre total de sommets du graphe. Pour représenter un système complexe avec un graphe, chaque noeud du système est simplement associé à un sommet du graphe et chaque lien est associé à une arête. La structure du système complexe peut ensuite être analysée en observant les propriétés du graphe résultant.

Dans le contexte des systèmes dynamiques, il existe une représentation plus pratique des graphes : la matrice d'adjacence. La matrice d'adjacence est une matrice symétrique de taille $N \times N$ satisfaisant

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } \{j, i\} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \tag{2.1}$$

Chaque élément A_{ij} de cette matrice encode donc la présence (1) ou l'absence (0) d'une arête reliant les sommets i et j. Les éléments diagonaux sont nuls.

Le graphe de la Déf. 36, qui porte l'appellation *graphe simple*, n'est parfois pas suffisant pour décrire adéquatement les interactions d'un système complexe. Pour encoder la directionnalité de ces interactions, on peut faire appel à un objet mathématique légèrement différent : le graphe orienté [12].

Définition 37. Un *graphe orienté* $\mathcal{G}$ est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ d'un ensemble de sommets $\mathcal{V}$ et d'un ensemble d'arcs $\mathcal{E}$, disjoint de $\mathcal{V}$, accompagné d'une fonction d'incidence γ qui associe chaque arc de $\mathcal{G}$ à un couple de sommets (pas forcément distincts) de $\mathcal{G}$.

Contrairement aux arêtes du graphe simple qui sont des paires *non ordonnées* de sommets $\{b, c\}$, les arcs du graphe orienté sont des paires *ordonnées* de sommets (b, c). On dit alors que que l'arc $a = (b, c)$ est un arc de b vers c. Pour les graphes orientés, la matrice d'adjacence peut être définie comme

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } (j, i) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.2}$$

et n'est plus nécessairement symétrique. Chaque élément A_{ij} représente alors la présence (1) ou l'absence (0) d'un arc de j vers i [1]. Pour un graphe orienté, les éléments diagonaux A_{ii} peuvent être non nuls et, si c'est le cas, représentent un arc reliant le noeud i à lui-même. Ce type d'arc porte le nom de *boucle*.

1. Dans certains ouvrages, les indices de la matrice sont inversés et A_{ij} est associé à l'arc de i vers j.

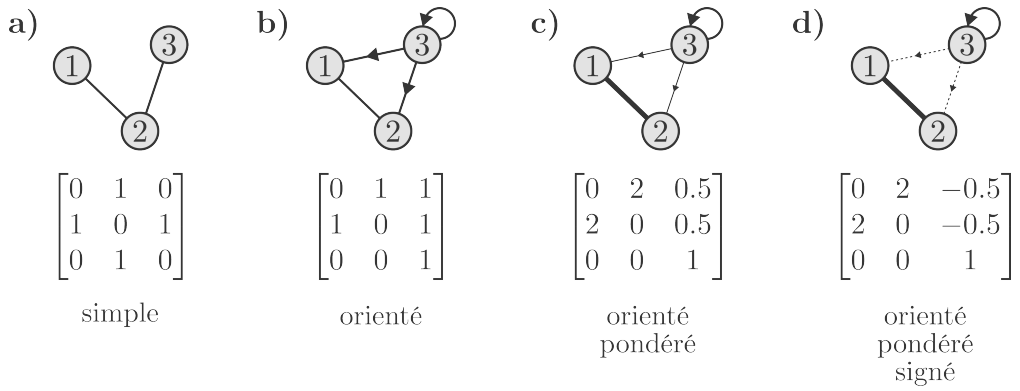


FIGURE 2.1 – Différents types de graphe et leur matrice d'adjacence/de poids associée. Les sommets sont représentés par des cercles indicés, tandis que les arêtes/arcs sont représentés par des traits. a) Un graphe simple possède une matrice d'adjacence symétrique. b) Un graphe orienté possède une matrice d'adjacence qui n'est pas forcément symétrique. De plus, ce graphe possède la boucle $(3, 3)$. c) Un graphe orienté et pondéré possède une matrice de poids avec des éléments non négatifs. Sur le dessin, les poids sont représentés par l'épaisseur du trait. d) Un graphe orienté, pondéré et signé possède une matrice de poids générale. Les arcs de signe positif sont dessinés avec un trait plein et les arcs négatifs sont pointillés.

En plus de leur orientation, certaines des interactions d'un système complexe peuvent être plus fortes que d'autres. Par exemple, dans un système neuronal, les signaux entrants dans un neurone récepteur depuis différents neurones émetteurs n'ont pas nécessairement la même importance relative. Pour modéliser ce type de propriété, les éléments binaires A_{ij} associés à chaque paire ordonnée (j, i) de sommets du graphe peuvent être troqués pour des valeurs $W_{ij} \in \mathbb{R}$ appelées *poids*. Le poids encode à la fois la présence ($W_{ij} \neq 0$) ou l'absence ($W_{ij} = 0$) d'un arc en plus de sa magnitude ($|W_{ij}|$) et du type d'interaction (signe de W_{ij}). Dans ce cas, la *matrice de poids* W résultante est privilégiée à la matrice d'adjacence pour décrire le système. Si tous les poids sont non négatifs, le graphe est dit *pondéré*. Sinon, le graphe est dit *pondéré et signé*. Sauf mention explicite, tous les graphes considérés dans cet ouvrage sont généralement orientés, pondérés et signés. Les différents types de graphes présentés dans cette section sont illustrés à la Fig. 2.1.

Exemple 38. Soit 3 personnes possédant un compte sur une application de messagerie instantanée populaire. À chaque jour, le premier et le deuxième individu s'envoient chacun deux messages d'encouragement, tandis que le troisième individu envoie un message haineux aux deux autres. Comme montré à la Fig. 2.2, on peut aisément représenter ce système à l'aide d'un graphe orienté, pondéré et signé où les sommets sont les trois personnes et les arcs représentent le nombre et le type de messages échangés quotidiennement.

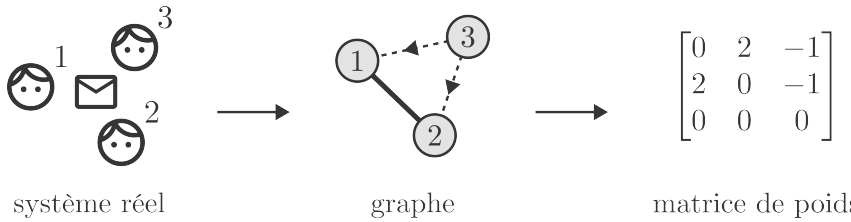


FIGURE 2.2 – Représentation par un graphe d'un réseau d'échange de messages. Les trois personnes correspondent aux $N = 3$ sommets du graphe et les arcs représentent les messages envoyés. Le poids correspond au nombre quotidien de messages. Les messages encourageants sont de signe positif et les messages haineux sont de signe négatif.

2.2 Dynamique des réseaux complexes

Parmi les différents aspects de la théorie des systèmes complexes, celui qui nous intéresse plus particulièrement dans le cadre de cet ouvrage est leur *dynamique*. Définissons donc dans cette section les dynamiques de réseaux complexes à partir des concepts de graphe et de système dynamique définis précédemment.

Soit un graphe associé à la matrice de poids W représentant un réseau complexe. On peut construire un système dynamique de dimension N où chaque variable x_i est associée à un sommet i du graphe et, par le fait même, à un noeud du réseau complexe d'intérêt. Ces variables $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ représentent une propriété quelconque de chaque noeud, appelée *l'activité* du noeud, qui évolue dans le temps. Par exemple, les variables dynamiques pourraient représenter le taux de décharge des neurones, la probabilité d'infection d'un individu dans un modèle épidémiologique ou encore la population d'une espèce dans un contexte écologique. Dans leur forme la plus générale, les dynamiques sur réseau considérées dans ce mémoire sont décrites par un système d'EDO de la forme

$$\dot{x}_i = F_i(\boldsymbol{x}; W)\,, \tag{2.3}$$

où F_i est une fonction $\mathcal{C}^1$ pour tout $i \in \mathcal{V}$. Or, le champ vectoriel est souvent séparé en deux termes associés respectivement à la dynamique interne du noeud et à l'activité générée par les interactions [7, 8, 31]. Le système d'EDO prend alors la forme

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + G_i(\boldsymbol{x}; W)\,, \tag{2.4}$$

où f_i et G_i sont encore des fonctions $\mathcal{C}^1$. Quoique cette forme ne soit pas plus restrictive que celle de l'Éq. (2.3), la séparation conceptuelle entre dynamique interne et interaction est utile pour plusieurs systèmes complexes. On peut penser par exemple à l'opposition entre guérison et infection dans un contexte épidémiologique ou entre excitation et retour à l'équilibre pour un

neurone. Pour préciser le rôle du graphe dans la dynamique, on peut restreindre d'avantage la forme du terme d'interaction. Pour ce faire, deux formes sont couramment utilisées. La première méthode consiste à définir les fonctions d'interaction G_i comme des fonctions de x_i et de la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{N} W_{ij}x_j$. La dynamique est alors de la forme

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + G_i\left(x_i, \sum_{j=1}^{N} W_{ij}x_j\right) . \tag{2.5}$$

Cette forme est utilisée entre autres dans [102] et comprend plusieurs exemples importants de dynamiques sur réseau, comme la dynamique de populations neuronales de Wilson-Cowan [118] et d'autres modèles neuronaux à taux de décharge [109]. Dans un système dynamique de cette forme, les interactions du noeud i avec chaque noeud j sont combinées linéairement par la matrice de poids du graphe, puis passées à une fonction non linéaire qui calcule l'impact effectif de toutes les interactions sur $\dot{x}_i$.

La seconde forme couramment utilisée est

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j=1} W_{ij}h_{ij}(x_i, x_j) . \tag{2.6}$$

Cette forme est particulièrement répandue dans l'étude des dynamiques de réseaux complexes [7, 8, 31, 55, 68, 89, 104, 107]. Dans ce cas, h_{ij} étant souvent une fonction non linéaire, l'interaction entre chaque paire de noeuds (i, j) est non linéaire, mais ces interactions non linéaires sont ensuite combinées linéairement pour produire l'effet total des interactions sur $\dot{x}_i$. Les deux types de modèles comportent donc tous deux une combinaison linéaire associée au graphe, mais diffèrent par l'endroit où la non-linéarité est introduite (pour chaque paire ou pour l'interaction totale). Il est toutefois important de préciser que ces deux formes ne sont pas mutuellement exclusives. Dans les cas spécifiques où le terme d'interaction est de la forme

$$G_i(\boldsymbol{x}; W) = g_i(x_i) \sum_{j=1}^{N} W_{ij}x_j \tag{2.7}$$

pour une fonction arbitraire univariée g_i, le champ vectoriel respecte à la fois la forme de l'Éq. (2.5) et celle de l'Éq. (2.6). Des modèles répandus de dynamiques sur réseau, comme le modèle écologique de dynamique de populations de Lotka-Volterra [57, 58, 111] et certains modèles épidémiologiques [5, 6, 76] possèdent un terme d'interaction de cette forme. Nous verrons également dans les sections suivantes que les formes de l'Éq. (2.5) et de l'Éq. (2.6) peuvent parfois être reliées par un changement de variable, rendant les dynamiques équivalentes sous certaines conditions.

Une propriété particulière des dynamiques de réseaux complexes est la présence de *phénomènes émergents*. Ces comportements macroscopiques non triviaux sont souvent plus intéressants que la dynamique microscopique, c'est-à-dire l'état individuel de chaque noeud. Or, comme

les équations qui décrivent cette dynamique macroscopique sont inconnues a priori, les équations microscopiques constituent un point de départ dans la caractérisation des phénomènes émergents. Illustrons l'émergence de comportements macroscopiques à l'aide de deux exemples classiques : la synchronisation dans le modèle de Kuramoto et la mémoire associative dans les réseaux de Hopfield.

Exemple 39. Cet exemple est un survol du Chap. 13 de [97]. Le modèle de Kuramoto [52] est un système d'oscillateurs couplés permettant l'émergence de synchronisation. Dans le cas où tous les oscillateurs sont couplés uniformément entre eux ($W_{ij} = 1$ pour tout i, j), la dynamique est régie par

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\} \,, \tag{2.8}$$

où θ_i est la phase de l'oscillateur i, ω_i est sa fréquence naturelle et k est une constante de couplage positive. Dans l'article original de Kuramoto, les fréquences naturelles des oscillateurs sont tirées d'une distribution $G(\omega)$ de support $\mathbb{R}$, unimodale et symétrique autour d'une fréquence μ. Le terme d'interaction tend alors à synchroniser les oscillateurs entre eux, tandis que le terme de dynamique interne tend à les désynchroniser. Une observable particulièrement intéressante pour mesurer la synchronisation dans le modèle de Kuramoto est le paramètre d'ordre

$$r = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^{i\theta_i} \right| . \tag{2.9}$$

Quand $r \approx 0$, le système est *incohérent*, car la densité d'oscillateurs est approximativement uniforme sur $[0, 2\pi)$. À l'opposé, l'état où tous les oscillateurs sont *synchronisés en phase*, c'est-à-dire que leurs phases sont égales, correspond à $r = 1$. De plus, il est connu que, dans la limite $N \to \infty$, le paramètre d'ordre tend à se stabiliser vers une certaine valeur r_∞ à long terme. Intuitivement, on pourrait s'attendre à ce que cette valeur r_∞ augmente quand le couplage k augmente, mais le comportement réel du système est plus subtil. Comme illustré à la Fig. 2.3, il existe un seuil k_c en dessous duquel une augmentation de k ne se traduit pas par une augmentation de r_∞ tant que $k < k_c$. Toujours dans la limite $N \to \infty$, cette valeur critique est

$$k_c = \frac{2}{\pi G(\mu)} \,. \tag{2.10}$$

La valeur $G(\mu)$ étant le maximum de la distribution de probabilité unimodale des fréquences naturelles (μ est le mode de la distribution), $1/G(\mu)$ quantifie la largeur de cette distribution. Donc, plus les fréquences naturelles des oscillateurs sont différentes les unes des autres, plus la valeur minimale de couplage pour avoir une synchronisation partielle augmente. Cela concorde avec l'interprétation que les fréquences naturelles tendent à désynchroniser le système, tandis que le couplage tend à le synchroniser.

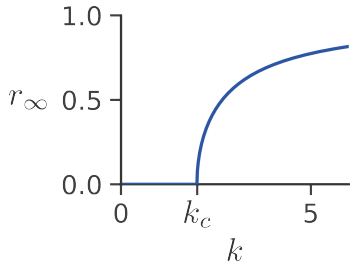


FIGURE 2.3 – Paramètre d'ordre de Kuramoto en fonction du couplage. Diagramme du paramètre d'ordre r_∞ dans la limite $t \to \infty$ et $N \to \infty$ pour la distribution de Cauchy $G(\omega) = (\pi(\omega^2 + 1))^{-1}$. Dans ce cas, la distribution est centrée autour de $\mu = 0$. Comme $G(0) = 1/\pi$, l'Éq. (2.10) donne un couplage critique de $k_c = 2$.

Exemple 40. Corécipiendaire du prix Nobel de physique 2024 pour sa contribution au développement des réseaux de neurones artificiels, J. J. Hopfield a démontré dès le début des années 80 que certains types de réseaux neuronaux, appelés depuis *réseaux de Hopfield*, peuvent encoder des états particuliers, puis les retrouver par mémoire associative [40]. Les réseaux de Hopfield sont, à l'origine, des systèmes dynamiques stochastiques et en temps discret. Or, puisque les systèmes dynamiques considérés dans ce mémoire sont déterministes et continus dans le temps, concentrons-nous sur la version en temps continu de ces réseaux développée par Hopfield dans une publication subséquente [41]. Ceux-ci sont régis par une dynamique de la forme

$$\dot{x}_i = -k_i x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \tanh(g x_j) + \theta_i \,, \qquad i \in \{1, \dots, N\} \,, \tag{2.11}$$

où g, k_i et θ_i sont des constantes réelles et W est la matrice de poids d'un graphe pondéré, mais non orienté (W est symétrique) et sans boucle ($\mathrm{diag}(W) = \mathbf{0}$). La constante g est appelée la *constante de gain* et détermine la pente de la tangente hyperbolique à l'origine. Une propriété particulièrement intéressante du système de l'Éq. (2.11) est qu'il possède une fonction d'énergie

$$E(\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} W_{ij} s_i s_j + \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{g} \int_0^{s_i} s^{-1}(\xi) \mathrm{d}\xi \,, \tag{2.12}$$

où $s_i \equiv \tanh(g x_i)$ et s^{-1} est la fonction inverse de $s(\xi) = \tanh(g\,\xi)$. Cette fonction possède deux propriétés intéressantes, soit

(i) $\dot{E}(\boldsymbol{s}) \leq 0$ pour tout $\boldsymbol{s} \in (-1, 1)^N$ et

(ii) $\dot{E}(\boldsymbol{s}) = 0$ si et seulement si $\boldsymbol{s}$ correspond à un point d'équilibre de la dynamique.

Par ces propriétés, E est une fonction de Lyapunov [81] du système et permet de trouver l'emplacement des points d'équilibre par la recherche de minimums locaux.

Dans la limite de grand gain $g \to \infty$, le deuxième terme de la fonction d'énergie tombe et

$$E(\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} W_{ij}s_i s_j \,. \tag{2.13}$$

De plus, dans cette limite, la pente de $\tanh(gx_i)$ à l'origine tend vers l'infini, ce qui implique que les variables s_i deviennent des variables binaires $s_i \in \{-1, 1\}$. Supposons qu'on veuille encoder $q \ll N$ états $\boldsymbol{\rho}^m \in \{-1, 1\}^N$ pour $m \in \{1, \ldots, q\}$, appelés *souvenirs*, dans le réseau. Supposons également que N est assez grand et que les souvenirs sont assez éloignés dans l'espace des états pour que

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \rho_j^{m'}\rho_j^m\right| \ll N \,, \qquad \text{pour tout } m' \neq m \,. \tag{2.14}$$

Soit la matrice de poids

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \sum_{m=1}^{q} \rho_i^m \rho_j^m \quad \text{pour tout } i \neq j \,, \\ W_{ii} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dans ce cas, pour un souvenir particulier $\boldsymbol{\rho}^{m'}$,

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} W_{ij}\rho_j^{m'} = \sum_{m=1}^{q} \rho_i^m \left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \rho_j^{m'}\rho_j^m\right] \approx N\rho_i^{m'} \,, \tag{2.16}$$

où l'approximation est basée sur le fait que le terme $m' = m$ domine dans l'expression entre crochets par l'Éq. (2.14). Pour un état quelconque $\boldsymbol{s}$ qui n'est pas près d'un souvenir, on a la relation approximative

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} W_{ij}s_j\right| = \left|\sum_{m=1}^{q} \rho_i^m \left[\sum_{j=1}^{N} s_j\rho_j^m\right]\right| \ll N \,, \tag{2.17}$$

car le terme entre crochets est de faible amplitude. Selon la forme de l'Éq. (2.13), la fonction d'énergie satisfait donc approximativement les relations

$$E(\boldsymbol{s}) \approx -\frac{N^2}{2} \qquad \boldsymbol{s} \in \left\{\boldsymbol{\rho}^1, \ldots, \boldsymbol{\rho}^q\right\} \,, \tag{2.18}$$

$$|E(\boldsymbol{s})| < \frac{N^2}{2} \qquad \boldsymbol{s} \notin \left\{\boldsymbol{\rho}^1, \ldots, \boldsymbol{\rho}^q\right\} \,. \tag{2.19}$$

La fonction E possède donc un minimum local à chaque souvenir, ce qui implique que les souvenirs sont des points d'équilibre stables de la dynamique. Tout état initial assez près

d'un souvenir pour se trouver dans son bassin d'attraction va converger vers le souvenir recherché.

Pour un paramètre de gain g grand mais fini, les variables s_i sont continues et les points d'équilibre ne se retrouvent pas exactement aux endroits prescrits lors de la construction de la matrice de poids. De plus, en pratique, un réseau de Hopfield peut seulement encoder $\sim 0.15N$ souvenirs avant que l'approximation ne soit plus valide. Malgré qu'il existe maintenant des modèles permettant d'encoder des souvenirs de façon beaucoup plus efficace, particulièrement en effectuant un choix judicieux de fonction d'activation [49], la mémoire associative des réseaux de Hopfield demeure un exemple classique de phénomène émergent pour les réseaux neuronaux.

Les sections suivantes sont consacrées à deux types de dynamiques sur réseau qui seront particulièrement utiles au Chap. 3 : les réseaux de neurones récurrents et le modèle de Lotka-Volterra.

2.3 Les réseaux de neurones récurrents

Bien que les travaux de Hopfield aient eu une grande influence sur le développement des réseaux neuronaux artificiels et de l'apprentissage automatique en général, l'idée d'utiliser des configurations d'unités simples appelées *neurones* pour effectuer des calculs et des opérations logiques précède les réseaux de Hopfield de plusieurs décennies. On peut penser d'abord aux travaux de McCulloch et Pitts en 1943, qui ont démontré que toute porte logique (et donc toute opération logique ou arithmétique !) peut être reproduite à partir de neurones artificiels binaires interconnectés [67]. Ces modèles de réseaux neuronaux ont été développés dans les années suivantes entre autres avec l'avènement du perceptron en apprentissage automatique [87] et du modèle de Wilson-Cowan de dynamiques de populations de neurones biologiques [118]. Aujourd'hui, il est bien connu que les réseaux de neurones récurrents (abrévié RNN pour *recurrent neural network*) sont des approximateurs universels [23, 30], c'est-à-dire que, s'ils sont de taille suffisamment grande, ils peuvent approximer n'importe quelle trajectoire sur un intervalle de temps fini avec une précision arbitraire.

Les RNN présentent une grande richesse de phénomènes dynamiques, car ils permettent la présence d'un grand nombre de points d'équilibre et de cycles limites en plus de présenter un comportement chaotique sous certaines conditions [94]. Cette richesse leur permet entre autres d'effectuer des tâches complexes d'apprentissage et de traitement d'information en utilisant une variété de méthodes d'entraînement sophistiquées [24, 100, 115]. Ces propriétés font des RNN des outils d'une grande importance en apprentissage automatique [21, 92] et pour modéliser des systèmes neuronaux biologiques en neurosciences [1, 83, 99].

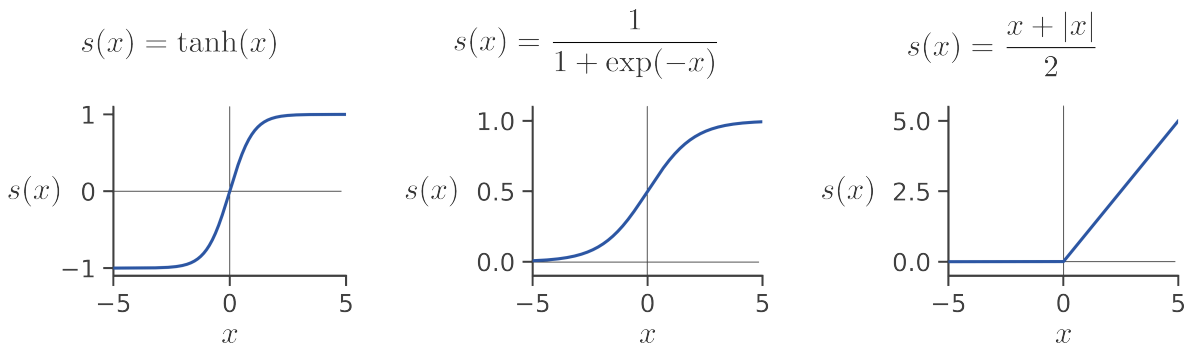


FIGURE 2.4 – Exemples courants de fonction d'activation. Les fonctions de gauche (tangente hyperbolique) et du centre (sigmoïde) sont analytiques, tandis que la fonction de droite (*Rectified Linear Unit* ou ReLU) n'est pas continûment dérivable.

Même s'il existe toute une panoplie de formes de dynamiques de type RNN, nous nous concentrons dans ce mémoire sur deux formes particulières, soit

$$\dot{x}_i = -x_i + s\left(\sum_{j=1}^{N} W_{ij}x_j + \theta_i\right), \qquad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2.20}$$

qui est une forme particulière du modèle de Wilson-Cowan utilisée entre autres par [102], ainsi que

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij}s(x_j) + \theta_i, \qquad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2.21}$$

utilisée entre autres par [24, 94, 100]. Dans les deux cas, les θ_i sont des constantes réelles et s est une fonction d'activation monotone croissante. Des exemples courants de fonction d'activation sont présentés à la Fig. 2.4. Dans ce mémoire, nous considérons uniquement des fonctions d'activation de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarquons d'abord que les deux formes de dynamique diffèrent par le fait que la matrice de poids W est *dans* l'argument de la fonction non linéaire pour l'Éq. (2.20), tandis qu'elle est *devant* la fonction non linéaire pour l'Éq. (2.21). Les RNN de l'Éq. (2.20) sont donc un exemple de dynamique de réseau de la forme générale de l'Éq. (2.5), tandis que ceux de l'Éq. (2.21) sont un exemple de la forme de l'Éq. (2.6). Si la matrice de poids W est de rang $r = N$, il existe toutefois un changement de variable reliant les deux formes de RNN. En effet, en partant de l'Éq. (2.20), le changement de variables

$$\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} \tag{2.22}$$

est tel que la dynamique obtenue en $\boldsymbol{y}$ est celle de l'Éq. (2.21). Si W est de rang $r < N$, alors la matrice de poids n'est pas inversible et le changement de variables inverse n'est pas bien défini. Les deux formes ne sont donc pas équivalentes dans ce cas.

Étudions plus en détail deux exemples particuliers de RNN.

Exemple 41 (Neurone seul en auto-interaction)**.** Comme mentionné précédemment, les RNN ont des comportements extrêmement variés. Toutefois, même un seul neurone en interaction avec lui-même possède une dynamique surprenamment riche comportant possiblement plusieurs points d'équilibre. Soit un neurone en auto-interaction dont la dynamique est de la forme

$$\dot{x} = -x + W_{11} \tanh(x) + \theta_1 \,. \tag{2.23}$$

En posant $\dot{x} = 0$, il est évident que les points d'équilibre de la dynamique correspondent aux solutions de l'équation

$$W_{11} \tanh(x) = x - \theta_1 \,. \tag{2.24}$$

Afin de déterminer le nombre de points d'équilibre que possède le système, on peut étudier qualitativement l'intersection entre la tangente hyperbolique (membre gauche) et la droite (membre droit) pour différentes valeurs des paramètres θ_1 et W_{11}. Ce faisant, on constate que le système peut posséder 1, 2 ou 3 points d'équilibre. De plus, on peut aisément calculer leur stabilité en observant le signe de $\dot{x}$ autour de chaque point d'équilibre. Différents régimes sont présentés à la Fig. 2.5.

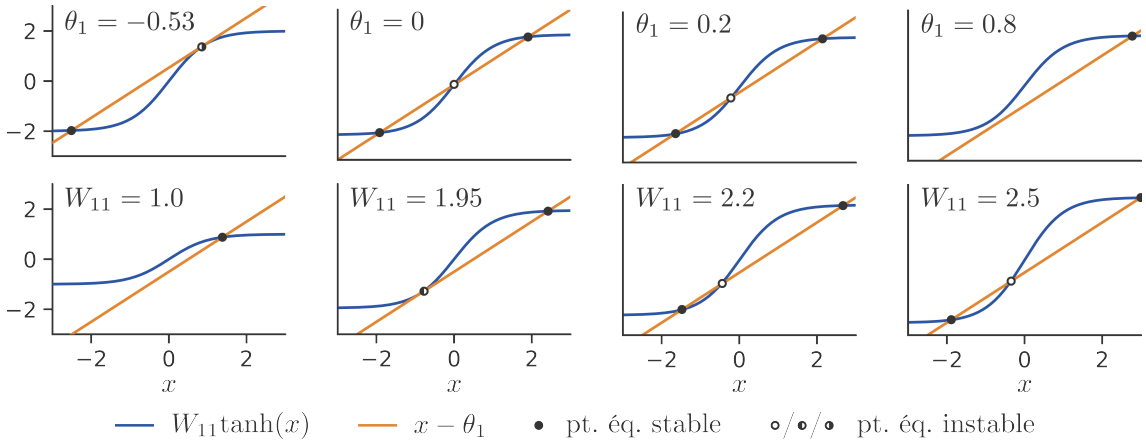


FIGURE 2.5 – Points d'équilibre du neurone en auto-interaction. Haut : Membres gauche et droit de l'Éq. (2.24) pour un poids $W_{11} = 2$ avec différentes valeurs de θ_1. Bas : Membres gauche et droit de l'Éq. (2.24) pour $\theta_1 = 0.5$ avec différentes valeurs de W_{11}. Dans les deux cas, on observe que le système possède 1, 2 ou 3 points d'équilibre. Pour les points d'équilibre instables, les côtés pleins désignent un côté où les trajectoires convergent vers le point d'équilibre (parfois appelés points d'équilibre *semi-stables*, de tels points d'équilibre sont instables selon la Déf. 3).

Exemple 42 (RNN chaotique)**.** Les travaux fondateurs de Sompolinsky et al. [94] ont déterminé sous quelles conditions un RNN avec un graphe aléatoire possède un comportement chaotique. Soit un RNN de la forme

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \tanh(g x_j) \,, \tag{2.25}$$

où g est une constante positive. Chaque élément de W est considéré comme une variable aléatoire indépendante distribuée selon une loi normale centrée à 0 de variance w^2/N pour un paramètre arbitraire $w > 0$. Définissons également le *paramètre de gain* du RNN comme

$$G = gw\,. \tag{2.26}$$

Par une approche en champ moyen (*mean-field*), il est possible de montrer que, dans le régime $N \to \infty$, le paramètre de gain permet de départager deux comportements macroscopiques. Si $G < 1$, alors le système converge vers un point d'équilibre stable à l'origine. Par contre, si $G > 1$, alors le système ne possède pas de point d'équilibre stable et son comportement est chaotique. Pour observer comment ces résultats se transposent en N fini, on peut faire des tests numériques. En général, pour $N \geq 100$, le point d'équilibre stable à l'origine est observé si $G < 1$, tandis que le comportement est chaotique si $G > 2$. Pour $1 < G < 2$, le système comporte typiquement un cycle limite. Quand le paramètre de gain augmente, le cycle limite se complexifie jusqu'à devenir chaotique pour $G > 2$. Des exemples de simulations sont présentés à la Fig. 2.6.

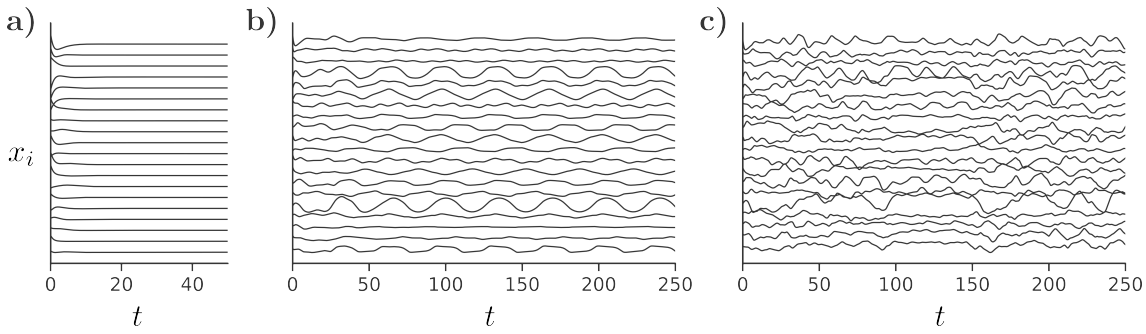


FIGURE 2.6 – Séries temporelles d'un RNN en régimes chaotique et non chaotique. Le RNN comporte $N = 100$ neurones sur un graphe aléatoire de variance w^2/N. Les séries temporelles d'un échantillon de 20 neurones sont montrées ici. Dans tous les cas, la constante g est fixée à 1. a) Pour $w = 0.8$, le paramètre de gain G est plus petit que 1 et le système converge vers un point d'équilibre. b) Pour $w = 1.5$, le paramètre de gain G est entre 1 et 2 et le système converge vers un cycle limite. c) Pour $w = 2.5$, le paramètre de gain est plus élevé que 2 et on observe un comportement chaotique.

Passons maintenant au deuxième modèle de dynamique de réseau complexe qui nous intéresse plus particulièrement : le modèle de Lotka-Volterra.

2.4 Le modèle de Lotka-Volterra

Développées en parallèle par les mathématiciens Alfred James Lotka et Vito Volterra dans les années 1920, les équations connues aujourd'hui sous le nom du modèle de Lotka-Volterra décrivent la dynamique de populations dans le cadre de relations entre prédateurs et proies [57, 58, 93, 111, 112]. Le modèle original, qui considère une population de prédateurs et une population de proies, a démontré théoriquement la présence de cycles limites générant des oscillations dans le nombre d'individus de chaque espèce, phénomène qui a d'ailleurs été observé expérimentalement notamment pour certaines populations nordiques [28] et chez les insectes [39]. La généralisation à un nombre arbitraire N de populations, qui est le modèle qui nous intéresse davantage en science des réseaux complexes, a été étudiée entre autres par Volterra lui-même quelques années plus tard [110]. Dans ce cas, les équations de la dynamique sont

$$\dot{x}_i = -c_i x_i + x_i \sum_{i=1}^{N} W_{ij} x_j \,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\} \,, \tag{2.27}$$

où $x_i \geq 0$ représente la prépondérance de la i-ième population et où la matrice de poids W représente les patrons d'interaction entre les différentes espèces. Les types d'interaction sont également encodés par le graphe avec $W_{ij} < 0$ pour les interactions *nuisibles* à l'espèce i et $W_{ij} > 0$ pour les interactions *favorables* à l'espèce i. La relation de prédation étant typiquement favorable au prédateur et défavorable à la proie, il est commun de considérer que W_{ij} et W_{ji} sont de signe opposés. Concernant la constante c_i, celle-ci est généralement négative pour les proies (il est supposé dans le modèle que leur nourriture est illimitée) et positive pour les prédateurs. Selon cette convention, un système sans interaction ($W = 0$) verra donc ses populations de proies exploser et ses populations de prédateurs s'éteindre. En lien avec les formes générales de dynamiques de réseaux complexes vues à la Sec. 2.2, le modèle de Lotka-Volterra est une dynamique satisfaisant à la fois la forme de l'Éq. (2.5) et celle de l'Éq. (2.6).

Une caractéristique particulièrement intéressante du modèle de Lotka-Volterra est que, même si la dynamique est non linéaire, l'emplacement des points d'équilibre est donné par un système linéaire. En effet, en posant $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ à l'Éq. (2.27), on obtient, sous forme matricielle,

$$\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x} \odot W\boldsymbol{x} \,, \tag{2.28}$$

où $\odot$ est le produit d'Hadamard. Par inspection, on voit que l'origine est toujours un point d'équilibre du système. Pour trouver un point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ où les populations sont non nulles et bornées ($0 < x_i^* < \infty$ pour tout i), le problème se réduit à l'équation matricielle

$$W\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c} \,. \tag{2.29}$$

Si la matrice de poids W est inversible, alors le système linéaire possède la solution

$$\boldsymbol{x}^* = W^{-1}\boldsymbol{c} \,. \tag{2.30}$$

Toutefois, $\boldsymbol{x}^*$ n'est un point d'équilibre valide du modèle que si $x_i^* > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Étudions deux exemples simples afin d'illustrer certains comportements de ces systèmes.

Exemple 43 (2 populations)**.** Considérons d'abord le modèle de Lotka-Volterra original à $N = 2$ populations et sans boucle ($W_{ii} = 0$ pour tout i). Le système est de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -c_1 x_1 + x_1 W_{12} x_2 \,, \\ \dot{x}_2 &= -c_2 x_2 + x_2 W_{21} x_1 \,, \end{aligned} \tag{2.31}$$

où c_1, c_2, W_{12} et W_{21} sont non nuls. Dans ce cas, W est inversible et son inverse est

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{W_{21}} \\ \frac{1}{W_{12}} & 0 \end{bmatrix} . \tag{2.32}$$

Selon l'Éq. (2.30), ce système possède donc un point d'équilibre à

$$\boldsymbol{x}^* = W^{-1}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \frac{c_2}{W_{21}} \\ \frac{c_1}{W_{12}} \end{bmatrix} . \tag{2.33}$$

Pour que $\boldsymbol{x}^*$ soit compris dans le domaine d'intérêt de la dynamique, on doit donc supposer que les paramètres c_2 et W_{21} sont de même signe, tout comme c_1 et W_{12}. Sous ces conditions, étudions maintenant la stabilité de $\boldsymbol{x}^*$. En linéarisant la dynamique autour du point d'équilibre, on obtient la matrice jacobienne

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}\Big|_{\boldsymbol{x}^*} = \begin{bmatrix} -c_1 + W_{12}x_2^* & x_1^* W_{12} \\ x_2^* W_{21} & -c_2 + W_{21}x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_2 W_{12}}{W_{21}} \\ \frac{c_1 W_{21}}{W_{12}} & 0 \end{bmatrix} . \tag{2.34}$$

La trace de la matrice jacobienne est nulle et son déterminant est $-c_1 c_2$. Si on suppose une interaction de type prédateur-proie, alors c_1 et c_2 sont de signe opposé et le déterminant est positif. Le point d'équilibre du système *linéarisé* est donc un centre[2]. Comme illustré à la Fig. 2.7, les vérifications numériques montrent que le point d'équilibre est bien un centre du système *non linéaire*. Les trajectoires suivent alors un cycle limite et l'évolution des populations produit des oscillations soutenues.

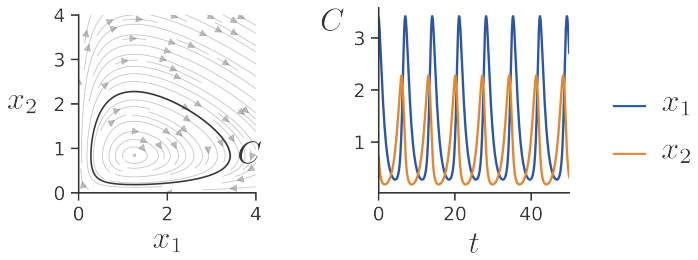


FIGURE 2.7 – Modèle de Lotka-Volterra à deux populations. Gauche : Champ vectoriel de la dynamique pour $c_1 = 1.0, c_2 = -1.0, W_{12} = 1.2, W_{21} = -0.8$. On voit que le point d'équilibre est bien un centre pour la dynamique non linéaire dans ce cas et la courbe C désigne un des cycles limites associés au point d'équilibre. Droite : Trajectoires des populations x_1 et x_2 sur le cycle limite C.

Exemple 44 (Hypothèse des équivalents)**.** Étudiée entre autres au Chap. 2 de [110], l'hypothèse des équivalents consiste à supposer qu'il existe des coefficients positifs $\mu_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, appelés *équivalents*, tels que que les interactions du système sont de la forme $W = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\mu})B$, où B est une matrice $N \times N$ antisymétrique. Le système dynamique est donc de la forme

$$\dot{x}_i = -c_i x_i + \mu_i x_i \sum_{j=1}^{N} B_{ij} x_j \,, \quad B^\top = -B \,, \tag{2.35}$$

pour $i \in \{1, \ldots, N\}$. Sous cette hypothèse, la quantité $\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\mu_i}$ est préservée par les interactions au sens où elle est une intégrale première de la dynamique dans le cas particulier où $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ [3]. De plus, les solutions d'un système de la forme de l'Éq. (2.35) possèdent plusieurs propriétés [110] :

(i) si $c_i < 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, toutes les espèces tendent vers 0 pour $t \to \infty$;

(ii) si $c_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, toutes les espèces tendent vers l'infini pour $t \to \infty$;

(iii) si $c_i > 0$ pour un $i \in \{1, \ldots, N\}$, il est impossible que toutes les espèces tombent à 0.

Sous l'hypothèse des équivalents, un point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ où toutes les populations sont non nulles et bornées doit satisfaire l'équation

$$B\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} \,, \tag{2.36}$$

où $b_i = c_i/\mu_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Or, comme la matrice B est antisymétrique, elle est forcément singulière si N est impair et le système linéaire possède alors 0 ou une infinité de solutions. Donc, l'hypothèse des équivalents interdit la présence d'un point d'équilibre isolé où les populations sont non nulles et bornées lorsqu'il y a un nombre impair de populations.

Pour N pair, en supposant que B est inversible, alors $\boldsymbol{x}^* = B^{-1}\boldsymbol{b}$ est un point d'équilibre de la dynamique si $x_i^* > 0$ pour tout i. De plus, le système possède alors l'intégrale première

$$I(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu_i} \left(x_i - x_i^* \ln(x_i) \right) \,, \tag{2.37}$$

ce qui se vérifie directement en calculant la dérivée temporelle

$$\dot{I} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\mu_i} x_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} B_{ki}^{-1} \frac{c_k}{\mu_k} \left(-\frac{c_i}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{N} B_{ij} x_j \right) = 0 \,, \tag{2.38}$$

où la propriété $B^{-\top} = -B^{-1}$ des matrices antisymétriques est nécessaire pour que la dérivée tombe à 0.

2. Voir [81] et [97] pour plus de détails sur la stabilité linéaire des points d'équilibre.

2.5 De valeurs propres à valeurs singulières

Dans le but de caractériser le lien entre structure et dynamique à grande échelle, une approche possible est d'appliquer des méthodes d'analyse linéaire à la matrice de poids W afin d'identifier des composantes structurelles macroscopiques importantes. Utilisée en théorie des graphes depuis plusieurs décennies [11, 26, 117], la décomposition spectrale, c'est-à-dire la décomposition de la matrice de poids en ses valeurs propres et vecteurs propres, est un candidat intéressant pour extraire ce type de quantité. Plus spécifiquement, la *valeur propre dominante*, c'est-à-dire celle qui a le plus grand module, et le *vecteur propre dominant* qui lui est associé ont une importance particulière. En effet, si la matrice de poids W est une matrice normale, ce qui est le cas par exemple pour un graphe non orienté, alors elle peut être décomposée comme

$$W = PDP^{\dagger}\,, \tag{2.39}$$

où D est une matrice diagonale $N \times N$ contenant les valeurs propres de W et P est une matrice $N \times N$ avec les vecteurs propres de W comme colonnes. Puisque les vecteurs propres sont normalisés, l'importance de chaque vecteur propre est en quelque sorte pondérée par la valeur propre qui lui est associée. En ce sens, lorsque W possède une valeur propre dominante, il est possible que le vecteur propre dominant associé encode assez d'information sur la structure pour pouvoir prédire le comportement macroscopique du système. Ces quantités suffisent parfois pour caractériser l'apparition de phénomènes émergents comme la synchronisation d'oscillateurs couplés dans un réseau hétérogène [85] ou l'apparition d'un point d'équilibre non nul dans un modèle de type SIS [76]. De plus, les valeurs et vecteurs propres dominants sont associés à des observables linéaires dont l'évolution est, dans certains cas, bien approximée par un petit nombre d'équations [31, 44, 55, 104].

Or, la décomposition spectrale n'est pas toujours bien adaptée à l'étude des réseaux complexes pour plusieurs raisons. Premièrement, le théorème de Perron-Frobenius [42] ne garantit la présence d'une valeur propre dominante que dans le cas où la matrice de poids W est non négative, ce qui exclut les graphes signés. Si le graphe est orienté, alors la matrice de poids W n'est pas symétrique et possède en général des valeurs propres et des vecteurs propres complexes, ce qui peut poser problème pour appliquer les méthodes de réduction dimensionnelle [104]. Finalement, pour un graphe général, la matrice de poids W n'est pas forcément diagonalisable, c'est-à-dire qu'elle ne possède pas toujours N vecteurs propres linéairement indépendants. Afin d'étendre l'analyse aux graphes dirigés, signés et pondérés généraux, il est donc pertinent de troquer la décomposition spectrale pour une méthode alternative applicable à toute matrice réelle [4] : la décomposition en valeurs singulières. La décomposition en valeurs

3. Cette propriété peut être interprétée d'un point de vue écologique comme une forme de conservation du poids total lors des interactions entre les espèces [110]. Selon cette interprétation, μ_i est l'inverse du poids moyen d'un animal de la i-ième espèce.

4. La décomposition en valeurs singulières s'applique également aux matrices complexes, mais nous nous restreignons aux matrices réelles dans le cadre de ce mémoire.

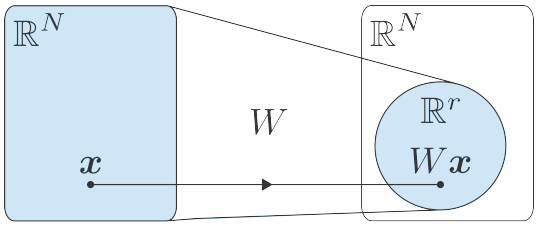


FIGURE 2.8 – Représentation conceptuelle du rang d'une matrice. La matrice W de taille $N \times N$ et de rang r est associée à une transformation linéaire envoyant les vecteurs de $\mathbb{R}^N$ vers un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ de dimension r.

singulières étant directement reliée au rang de la matrice, commençons par définir et illustrer ce concept de base d'algèbre linéaire [42].

Définition 45. Le *rang* d'une matrice M de taille $m \times n$ pour $m, n \in \mathbb{N}$ est le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de M.

Comme illustré à la Fig. 2.8, le rang d'une matrice M peut être interprété comme la dimension de l'image de la transformation linéaire associée à M. De plus, si r est le rang d'une matrice M de taille $m \times n$, alors $r \leq \min(m, n)$. De façon équivalente, le rang d'une matrice M est parfois défini comme la taille de la plus grande sous-matrice de M de déterminant non nul, ou encore comme le nombre maximal de rangées linéairement indépendantes de M.

Abordons maintenant la décomposition en valeurs singulières. La définition qui suit est adaptée de [42] et du SI de [102].

Définition 46. Soit une matrice réelle M de dimension $m \times n$ et de rang r. La *décomposition en valeurs singulières (DVS)* de M est

$$M = U\Sigma V^\top , \tag{2.40}$$

où $U = (\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^m)$ et $V = (\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^n)$ sont des matrices orthogonales de taille $m \times m$ et $n \times n$ où les colonnes sont respectivement les vecteurs propres de $MM^\top$ et de $M^\top M$. La matrice diagonale Σ de taille $m \times n$ est définie comme

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} , \tag{2.41}$$

où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_q = 0$ pour $q = \min(m, n)$ et $\sigma_i = \sqrt{d_i}$, d_i étant la i-ième valeur propre de $MM^\top$ ou $M^\top M$.

En tronquant les matrices afin de conserver uniquement les r premières colonnes de U et de V ainsi que les r premières colonnes et r premières lignes de Σ, on peut exprimer la DVS d'une

matrice M de rang r comme

$$M = U_r \Sigma_r V_r^\top \,, \tag{2.42}$$

où U_r, Σ_r et V_r sont les matrices tronquées. Les matrices U_r, Σ_r et V_r sont alors respectivement de taille $n \times r$, $r \times r$ et $r \times m$. Dans ce mémoire, les versions tronquées des matrices de la DVS sont toujours notées avec un indice r, tandis que les matrices complètes sont sans indice r.

Pour l'analyse de réseaux complexes, la DVS possède plusieurs propriétés avantageuses par rapport à la décomposition spectrale. En plus d'être applicable à n'importe quelle matrice de poids, le fait que les vecteurs singuliers soient réels évite tout passage forcé aux dynamiques complexes lors de la réduction dimensionnelle. Également, les valeurs singulières étant réelles et non négatives, la décomposition

$$W = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \, \boldsymbol{u}^i (\boldsymbol{v}^i)^\top \tag{2.43}$$

montre que les valeurs singulières ordonnent les N matrices $\boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{v}^i)^\top$ de rang 1 selon leur importance relative dans W.

Par le théorème de Schmidt–Eckart–Young–Mirsky [27, 90, 96], la DVS permet d'ailleurs d'obtenir la meilleure approximation [5] de rang m d'une matrice de rang $r > m$ en considérant comme nulles les $r - m$ dernières valeurs singulières non nulles de la matrice ($\sigma_{m+1} = \ldots = \sigma_r = 0$). La DVS hérite également d'une propriété importante de la décomposition spectrale par l'applicabilité du théorème de Weyl. La proposition qui suit provient initialement du Thm. 2 de [29], qui concerne les valeurs propres, et est prouvé pour les valeurs singulières au Thm. 3.3.16 de [42]. Encore une fois, on adopte la formulation de [102].

Proposition 47. *Soit deux matrices M_1 et M_2 de taille $m \times n$ avec $q = min(m, n)$. Alors,*

$$\sigma_{i+j-1}(M_1 + M_2) \leq \sigma_i(M_1) + \sigma_j(M_2) \,, \qquad \forall\, 1 \leq i, j, i + j - 1 \leq q \,, \tag{2.44}$$

où $\sigma_k(M)$ est la k-ième valeur singulière de M.

Cette relation est particulièrement utile pour quantifier l'impact de perturbations de la matrice de poids sur les valeurs singulières.

2.6 Dynamique et faible rang

Quantifier l'impact du rang de la matrice de poids sur la dynamique d'un système complexe n'est pas une tâche facile, car, comme mentionné maintes fois déjà, la relation entre les équations de la dynamique microscopique de chaque noeud et le comportement global du système

5. Par meilleure approximation, on entend ici celle qui minimise la norme de Frobenius de la différence entre la matrice originale et l'approximation de faible rang.

est difficile à caractériser. De plus, puisque plusieurs réseaux réels et plusieurs modèles de réseaux aléatoires sont associés à un faible rang effectif [102], c'est-à-dire une décroissance rapide des valeurs singulières, il est important de caractériser l'effet du rang sur la dynamique. Comme illustré à la Fig. 2.8, le rang est intrinsèquement relié au concept de *dimension*. Il est donc pertinent de déterminer si les réseaux complexes associés à une matrice de poids de faible rang ont une dynamique de faible dimension. Pour ce faire, une approche possible est de tenter de trouver un changement de variables optimal pour décrire la dynamique avec un nombre $r < N$ d'équations, où r est le rang de W. Si cette démarche est possible, alors on peut dire qu'une matrice de poids de faible rang implique une dynamique de faible dimension. La forme que prend cette transformation peut aussi nous informer sur l'effet du rang de W sur les trajectoires. Ce type de transformation est appelé *réduction dimensionnelle* et est défini formellement à la Sec. 3.3.

En ce sens, résumons ici quelques résultats tirés de Thibeault et al. [102]. Soit un système dynamique de la forme

$$\dot{x}_i = h_i(x_i, y_i)\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{2.45}$$

où $\boldsymbol{y} = W\boldsymbol{x}$ pour une matrice de poids W de rang $r < N$. Supposons qu'on cherche un changement de variables linéaire permettant de réduire la dimension du système de N à r. Comme démontré par Thibeault et al., le changement de variables optimal [6] dans ce cas est

$$\boldsymbol{X} = V_r^\top \boldsymbol{x}\,, \tag{2.46}$$

où V_r est la matrice de vecteurs singuliers droits de l'Éq. (2.42) de taille $N \times r$ et $X_1, \ldots, X_r$ sont les nouvelles variables. La dynamique du système réduit est alors régie par les r équations

$$\dot{\boldsymbol{X}} = V_r^\top \boldsymbol{h}\left(V_r\boldsymbol{X}, WV_r\boldsymbol{X}\right)\,. \tag{2.47}$$

Ce nouveau système ne décrit qu'approximativement la dynamique du système original, car il introduit une erreur d'alignement définie comme

$$\epsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left\| V_r^\top[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{h}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}})\right\|, \tag{2.48}$$

où $\tilde{\boldsymbol{x}} = V_r V_r^\top \boldsymbol{x}$ et $\tilde{\boldsymbol{y}} = W\tilde{\boldsymbol{x}}$. Par le choix judicieux de changement de variables, cette erreur d'alignement possède la borne supérieure

$$\epsilon(\boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{\sqrt{r}}\left\| V_r^\top J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')\left(I - V_r V_r^\top\right)\boldsymbol{x}\right\|, \tag{2.49}$$

où $J_{\boldsymbol{x}}$ est la matrice jacobienne du champ vectoriel $\boldsymbol{h}$ par rapport à $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ est un point quelconque entre $\boldsymbol{x}$ et $\tilde{\boldsymbol{x}}$, puis $\boldsymbol{y}' = W\boldsymbol{x}'$. Si la matrice jacobienne est de la forme $J_{\boldsymbol{x}} = kI_{N\times N}$, où k est une constante et I_N est la matrice identité de taille $N \times N$, alors l'erreur d'alignement est

6. Le changement de variables optimal est défini ici comme celui qui minimise la contribution des interactions W à l'erreur d'alignement introduite par la réduction dimensionnelle.

nulle. Ces résultats montrent que, en supposant que la forme du Jacobien permet une erreur d'alignement faible, un système dynamique de la forme de l'Éq. (2.45) avec une matrice W de rang r peut être bien approximé par un système dynamique de dimension r. Il existe donc un lien fort entre le rang de la matrice W et la dimension de la dynamique dans ce cas.

Exemple 48. Soit une dynamique de RNN de la forme

$$\dot{x}_i = -x_i + s\left(\sum_{j=1}^{N} W_{ij}x_j + \theta_i\right), \qquad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2.50}$$

avec une matrice de poids W de rang $r < N$, où s est une fonction d'activation sigmoïdale de classe $\mathcal{C}^1$. D'abord, remarquons que, comme $J_{\boldsymbol{x}} = -I_N$, cette dynamique peut être réduite exactement par le changement de variables

$$\boldsymbol{X} = V_r^\top \boldsymbol{x}\,. \tag{2.51}$$

La dynamique résultante est donnée par le système r-dimensionnel

$$\dot{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{X} + V_r^\top \boldsymbol{s}(W\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta})\,. \tag{2.52}$$

Par la DVS de la matrice de poids $W = U_r\Sigma_r V_r^\top$ et en rappelant que $V_r^\top V_r = I_r$ [7], cette expression peut être réécrite comme

$$\dot{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{X} + V_r^\top \boldsymbol{s}(U_r\Sigma_r\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\theta})\,. \tag{2.53}$$

Le système est alors fermé par rapport aux r nouvelles variables $\boldsymbol{X}$.

Examinons maintenant l'effet du rang de W pour deux modèles introduits précédemment.

2.6.1 Les structures de faible rang chez les RNN

Comme illustré à l'Ex. 48, les RNN de la forme

$$\dot{x}_i = -kx_i + s\left(\sum_{j=1}^{N} W_{ij}x_j + \theta_i\right), \qquad i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2.54}$$

avec une matrice de poids W de rang r sont exactement réductibles à r équations par un changement de variables linéaire donné par les vecteurs singuliers droits de W. Or, cette méthode ne permet pas de déterminer l'effet du rang pour une dynamique RNN de la forme

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij}s(x_j) + \theta_i\,, \qquad i \in \{1, \dots, N\}\,. \tag{2.55}$$

7. I_r désigne ici la matrice identité de taille $r \times r$.

Cette question est d'autant plus intéressante par le fait que les méthodes d'entraînement des RNN de cette forme font souvent intervenir des composantes de faible rang dans la matrice de poids. Par exemple, dans les réseaux de Hopfield présentés à l'Ex. 40, chaque souvenir encodé par le réseau correspond à l'ajout d'une matrice de rang 1 à la matrice de poids [40, 41]. Aussi, plusieurs méthodes d'apprentissage comme le *FORCE learning* [100] utilisent une boucle de rétroaction qui correspond à l'ajout d'une composante de rang 1 [60]. Il est donc pertinent de déterminer l'effet de ces structures de faible rang sur la dynamique du système.

Pour ce faire, Mastrogiuseppe et Ostojic [60] ont considéré la dynamique RNN de l'Éq. (2.55) avec une matrice de poids de la forme

$$W = g\chi + Q\,, \tag{2.56}$$

où χ est une matrice aléatoire, Q est une matrice de faible rang et g est un paramètre scalaire permettant d'ajuster la force des connexions aléatoires. En ce qui concerne la partie aléatoire, les éléments de χ sont tirés d'une distribution gaussienne centrée à 0 et de variance $\frac{1}{N}$. Les éléments de χ décroissent donc en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ lorsque la taille du système augmente. La matrice Q, qui représente la partie structurée des connexions, est une matrice de rang $r \ll N$ dont les éléments décroissent en $\frac{1}{N}$ quand N augmente. Dans la limite de grand N, la connectivité est donc dominée par la partie aléatoire plutôt que la partie structurée. Cette hypothèse permet de considérer que l'activité des neurones est décorrélée pour N suffisamment grand.

Pour un tel système, Mastrogiuseppe et Ostojic ont pu déterminer l'effet de la perturbation structurée Q de rang r sur la dynamique par une approche statistique en champ moyen (*Dynamical Mean-Field Theory*) [60]. Pour un g suffisamment faible, l'activité converge exponentiellement vers un sous-espace de $\mathbb{R}^N$ de dimension r. De plus, ce sous-espace est celui engendré par les r vecteurs singuliers gauches de Q de valeur singulière non nulle. Dans le régime de grand g, la perturbation structurée est négligeable et on retrouve le comportement chaotique typique des RNN sur graphe aléatoire (voir [94] et l'Ex. 42). Or, pour des valeurs de g ni trop faibles, ni trop élevées, l'activité du système converge vers le sous-espace engendré par les vecteurs singuliers gauches de Q de valeur singulière non nulle, mais présente quand même un comportement chaotique de faible amplitude à proximité de ce sous-espace. Ce régime est particulièrement intéressant, car il présente des propriétés de l'activité neuronale observée expérimentalement dans plusieurs contextes, c'est-à-dire une grande variabilité dans l'activité individuelle des neurones jumelée à une activité globale de faible dimension [32].

Les différents régimes d'activité pour une perturbation de rang 1 sont illustrés à la Fig. 2.9. Par leur approche de champ moyen, Mastrogiuseppe et Ostojic ont également étudié le comportement de ces RNN en présence de signaux d'entrée et dans l'apprentissage de certaines tâches. Ces travaux ont par la suite été généralisés au cas où le réseau possède un grand nombre de populations en interaction [10], au cas où le graphe est creux [38] et au cas où la partie structurée et aléatoire sont corrélées [91].

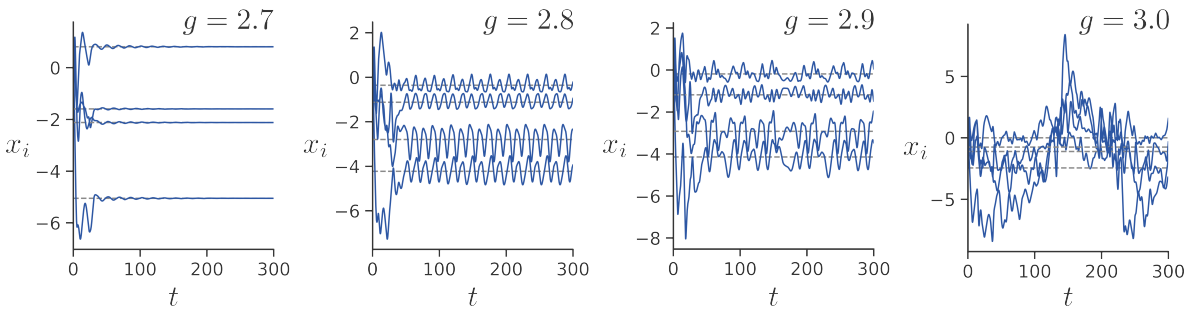


FIGURE 2.9 – Régimes d'activité d'un RNN aléatoire avec perturbation de rang 1. Les trajectoires montrées sont celles d'un échantillon de 4 neurones pour un système avec $N = 100$. La matrice $Q = \boldsymbol{m}\boldsymbol{n}^\top/N$ de rang 1 est construite à partir de deux vecteurs $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ tirés d'une distribution normale centrée à 1.5 et de variance 1. Dans la réalisation montrée ici, $\boldsymbol{m}^\top\boldsymbol{n}/N \approx 2.74$ (cette quantité est la force de la structure ou *structure strength* de [60]). La partie aléatoire χ est tirée d'une distribution normale centrée à 0 de variance $1/N$. Pour $g = 2.7$, l'activité converge vers un point d'équilibre. Pour $g = 2.8$, le système semble plutôt converger vers un cycle limite. Pour $g = 2.9$, on observe le régime le plus intéressant, car le système possède un comportement chaotique où l'activité reste près d'une valeur moyenne distincte pour chaque neurone. Finalement, pour $g = 3.0$, le comportement chaotique domine sur le comportement structuré et les trajectoires s'éloignent davantage des valeurs moyennes. Dans chaque cas, les lignes grises pointillées sont les valeurs moyennes des trajectoires sur $t \in [30, 300]$.

2.6.2 Le rang chez Lotka-Volterra

Dans le modèle de Lotka-Volterra, le rang de la matrice de poids W est directement relié à la stabilité du système [36, 80]. Le terme *stabilité* ne fait pas référence ici à la stabilité d'un point d'équilibre quelconque, mais plutôt au fait que toutes les populations du système restent bornées et non nulles pour tout $t > 0$ [2, 56]. Comme discuté brièvement à la Sec. 2.4, dans le modèle de Lotka-Votlerra, un point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ où les populations sont toutes bornées et non nulles doit satisfaire

$$W\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}\,. \tag{2.57}$$

Évidemment, si W est de rang $r = N$, alors elle est inversible et

$$\boldsymbol{x}^* = W^{-1}\boldsymbol{c} \tag{2.58}$$

est un point d'équilibre de la dynamique si $x_i^* > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Or, si W est de rang $r < N$, alors le système linéaire est sous-déterminé et il n'existe pas de solution unique. Spécifiquement, le système possède une infinité de solutions si $\boldsymbol{c} \in \text{span}\{\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^r\}$, où $\boldsymbol{u}^i$ est le i-ième vecteur singulier gauche de W. Sinon, le système linéaire ne possède aucune solution et il n'existe aucun point d'équilibre avec des populations bornées et non nulles. Or, même si $\boldsymbol{c}$ est tel qu'il existe une infinité de solutions et que certaines d'entre elles sont telles que $x_i^* > 0$ pour tout i, le système dynamique n'est pas *structurellement stable* [81], car une petite variation des paramètres $\boldsymbol{c}$ ou W peut rendre le système linéaire $W\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}$ incompatible.

Il est bien connu que selon le modèle de Lotka-Volterra, plusieurs espèces compétitionnant pour exactement les mêmes ressources ne peuvent survivre indéfiniment [8] [37]. D'un point de vue écologique, les *déficiences en rang* de W représentent des niches où plusieurs espèces doivent compétitionner de cette façon, ce qui rend l'écosystème instable. Il est d'ailleurs possible de déterminer à partir de ce phénomène des règles sur les patrons d'interaction afin de construire des écosystèmes stables [36]. De plus, lorsque W est de faible rang effectif, c'est-à-dire que les valeurs singulières ont une décroissance rapide, les systèmes montrent à la fois une dynamique rapide où l'écosystème est stable et une dynamique lente où l'écosystème est instable et où certaines populations s'éteignent [33].

Exemple 49 (Espèces se disputant la même nourriture)**.** Cet exemple simple tiré de [110] traite du cas où un nombre arbitraire N d'espèces compétitionnent pour une seule même ressource. Supposons d'abord que la consommation de cette ressource par les différentes espèces est donnée par la fonction linéaire

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i x_i \,, \tag{2.59}$$

où $\gamma_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Les équations de la dynamique sont alors de la forme

$$\dot{x}_i = -c_i x_i - \alpha_i x_i \gamma(\boldsymbol{x}) \,, \tag{2.60}$$

où $c_i < 0$ et $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Supposons également que les coefficients positifs $-c_i/\alpha_i$ sont ordonnés selon

$$-\frac{c_1}{\alpha_1} > -\frac{c_2}{\alpha_2} > \ldots > -\frac{c_N}{\alpha_N} \tag{2.61}$$

et qu'aucune paire de coefficients ne sont égaux. Dans ce cas, on a, pour tout $i < j$, que

$$\frac{\dot{x}_i}{\alpha_i x_i} - \frac{\dot{x}_j}{\alpha_j x_j} = -\frac{c_i}{\alpha_i} + \frac{c_j}{\alpha_j} \,, \tag{2.62}$$

ce qu'on peut réécrire comme la dérivée temporelle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\ln\left(x_i^{1/\alpha_i}\right) - \ln\left(x_j^{1/\alpha_j}\right)\right] = -\frac{c_i}{\alpha_i} + \frac{c_j}{\alpha_j} \,. \tag{2.63}$$

En intégrant cette équation, on obtient les intégrales secondes

$$\frac{x_i^{1/\alpha_i}}{x_j^{1/\alpha_j}} = C e^{\left(-\frac{c_i}{\alpha_i} + \frac{c_j}{\alpha_j}\right)t} \tag{2.64}$$

pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ tels que $i < j$. Comme la constante dans l'exponentielle est positive, on doit avoir que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{x_i^{1/\alpha_i}}{x_j^{1/\alpha_j}} = \infty \,. \tag{2.65}$$

8. On entend ici également un système structurellement stable et donc résistant aux faibles perturbations des paramètres.

Si toutes les populations sont bornées, alors il faut que $\lim_{t\to\infty} x_j(t) = 0$ pour tout $j \in \{2, \ldots, N\}$. On observe donc que, dans cette situation, toutes les populations s'éteignent excepté la population x_1, qui est celle avec le plus grand coefficient $-c_1/\alpha_1$.

Ce type de comportement était attendu par le rang de la matrice W. En effet, dans le cas présent la matrice de poids est de la forme

$$W = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma}^\top . \tag{2.66}$$

Cette matrice étant de rang 1, il y a donc $N - 1$ déficiences en rang, ce qui signifie que, pour un système borné et structurellement stable, $N - 1$ population doivent s'éteindre.

Maintenant que nous avons en main les concepts préalables de théorie des systèmes complexes, particulièrement en ce qui concerne leur dynamique et l'effet du rang de la matrice de poids sur celle-ci, réunissons ces concepts avec ceux de théorie de Koopman, vus dans le chapitre précédent, dans le cadre du projet de recherche principal de ce mémoire : l'étude des systèmes complexes de faible rang par théorie de Koopman.

Chapitre 3

Étude des systèmes complexes de faible rang par théorie de Koopman

Au chapitre précédent, nous avons vu que les systèmes dynamiques de la forme de l'Éq. (2.45) avec une matrice de poids de rang r peuvent être réduits approximativement à r équations par un changement de variables linéaire et que certains de ces systèmes peuvent être réduits exactement [102]. Pour cette famille de systèmes, un faible rang de la matrice de poids implique donc que la dynamique est de faible dimension au moins dans une certaine approximation. Or, excepté certains cas particuliers, ces travaux ne considèrent pas les systèmes de la forme de l'Éq. (2.6), c'est-à-dire ceux dont la matrice de poids est *devant* la fonction non linéaire. Les systèmes de cette forme étant omniprésents en dynamique des systèmes complexes [7, 8, 31, 55, 68, 89, 104, 107], il est pertinent de caractériser l'effet du rang sur de tels systèmes et, plus particulièrement, de déterminer si la relation entre le rang de la matrice de poids et la dimension de la dynamique tient dans ce cas. Le but du projet de recherche présenté dans ce chapitre est d'effectuer cette caractérisation en calculant des fonctions propres du GOK reliées au rang de la matrice de poids, puis d'utiliser ces fonctions propres pour réduire la dimension des systèmes dynamiques. Le calcul de fonctions propres exactes ayant une forme fermée étant en général très difficile, la démarche présentée ici se base sur certaines hypothèses simplificatrices afin de calculer à la fois des fonctions propres du GOK et certaines restrictions sur la forme des systèmes dynamiques. Ces restrictions définissent des *familles* de dynamiques de systèmes complexes pour lesquelles le rang de la matrice de poids est relié à la dimension de la dynamique.

En premier lieu, la Sec. 3.1 présente la méthode de calcul de fonctions propres du GOK reliées au rang de la matrice de poids, incluant les hypothèses considérées. À la Sec. 3.2, le calcul explicite des fonctions propres est effectué pour deux familles de dynamiques de systèmes complexes. Ces fonctions propres sont ensuite utilisées pour définir une méthode de réduction dimensionnelle à la Sec. 3.3. Finalement, la Sec. 3.4 présente une analyse de l'effet du rang

de la matrice de poids pour deux modèles particuliers inclus dans les familles de dynamiques, soit les réseaux de neurones récurrents et le modèle de Lotka-Volterra. Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués en collaboration avec Vincent Thibeault, Antoine Allard et Patrick Desrosiers.

3.1 Calcul de fonctions propres

Les systèmes dynamiques considérés dans ce chapitre sont de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \odot W\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}^N$, $\odot$ dénote le produit d'Hadamard et W est une matrice de poids telle que

$$\operatorname{rang}(W) = r < N \tag{3.2}$$

avec la décomposition en valeurs singulières

$$W = U\Sigma V^\top = U_r \Sigma_r V_r^\top\,, \qquad \Sigma_r = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)\,. \tag{3.3}$$

Le GOK d'un tel système est

$$\mathcal{K} = \boldsymbol{f}^\top \nabla + (\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla\,. \tag{3.4}$$

Afin d'alléger la notation, les dérivées d'une fonction $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ par rapport aux variables $\boldsymbol{x}$ sont notées

$$[\nabla f(\boldsymbol{x})]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \equiv \partial_i f(\boldsymbol{x}) \tag{3.5}$$

dans ce chapitre. Toute fonction propre ϕ du GOK de valeur propre λ doit donc respecter l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{K}[\phi] = \boldsymbol{f}^\top \nabla\phi + (\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla\phi = \lambda\phi\,. \tag{3.6}$$

La résolution d'une équation différentielle partielle à N variables de cette forme est une tâche ardue. Dans cette section, des hypothèses simplificatrices sont formulées afin d'obtenir des solutions particulières de fonctions propres ϕ et de valeurs propres λ du GOK, ainsi que certaines restrictions sur les fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ du champ vectoriel de la dynamique. Les résultats de cette démarche nous permettent de définir à la section suivante des familles de systèmes dynamiques qui possèdent des fonctions propres du GOK reliées au rang de W.

3.1.1 Séparation du générateur de Koopman

Selon la forme de l'Éq. (3.4) le générateur de Koopman peut être exprimé sans perte de généralité comme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_I \,, \tag{3.7}$$

où les deux opérateurs du membre de droite sont définis comme

$$\mathcal{K}_0 = \boldsymbol{f}^\top \nabla \,, \tag{3.8a}$$

$$\mathcal{K}_I = (\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla \,. \tag{3.8b}$$

Pour souligner la présence de la matrice de poids W dans $\mathcal{K}_I$ et son absence dans $\mathcal{K}_0$, on désigne $\mathcal{K}_I$ par le nom de *générateur d'interaction*. Cette séparation du GOK en deux nouveaux opérateurs permet l'introduction d'une première hypothèse.

Hypothèse 50. *L'observable ϕ est une fonction propre commune de $\mathcal{K}_0$ et de $\mathcal{K}_I$.*

Cette hypothèse implique que ϕ satisfait le système d'équations aux valeurs propres

$$\mathcal{K}_0[\phi] = \lambda_0 \phi \,, \tag{3.9a}$$

$$\mathcal{K}_I[\phi] = \lambda_I \phi \,, \tag{3.9b}$$

où λ_0 et λ_I sont les valeurs propres respectives de $\mathcal{K}_0$ et de $\mathcal{K}_I$. L'Hyp. 50 est une condition suffisante pour que ϕ soit fonction propre du GOK, car

$$\mathcal{K}[\phi] = \mathcal{K}_0[\phi] + \mathcal{K}_I[\phi] = (\lambda_0 + \lambda_I)\phi = \lambda\phi \tag{3.10}$$

et la valeur propre du GOK associée est simplement $\lambda = \lambda_0 + \lambda_I$. Selon la forme explicite des opérateurs, le système de l'Éq. (3.9) s'écrit comme

$$\boldsymbol{f}^\top \nabla\phi = \lambda_0 \phi \,, \tag{3.11a}$$

$$(\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla\phi = \lambda_I \phi \,. \tag{3.11b}$$

Le problème initial de résolution d'une EDP a donc été troqué pour la résolution de deux EDP plus simples. Toutefois, la recherche de fonctions propres du générateur d'interaction $\mathcal{K}_I$ est encore ardue, car le produit matriciel complique la reconstruction de ϕ dans le membre de gauche. De plus, contrairement aux systèmes hamiltoniens, les fonctions propres communes ne correspondent pas ici à un critère de commutation entre les opérateurs. Formulons une seconde hypothèse pour simplifier davantage l'Éq. (3.11b).

Hypothèse 51. *L'observable ϕ est une fonction propre du générateur d'interaction $\mathcal{K}_I$ de valeur propre $\lambda_I = 0$.*

L'Hyp. 51 restreint la recherche de fonctions propres au noyau de $\mathcal{K}_I$. L'Éq. (3.11) devient

$$\boldsymbol{f}^\top \nabla \phi = \lambda \phi \,, \tag{3.12a}$$

$$(\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla \phi = 0 \,, \tag{3.12b}$$

où λ est maintenant une valeur propre commune du GOK et de $\mathcal{K}_0$. Cette hypothèse implique également que ϕ est une intégrale première de la dynamique si $\boldsymbol{f}$ est identiquement nulle, car l'Éq. (3.12a) implique alors que $\lambda = 0$. En ce sens, on peut dire que ϕ est *préservée par les interactions du système*. Ce type d'observable a déjà été rencontré dans l'Ex. 44 concernant l'hypothèse des équivalents chez Lotka-Volterra.

L'Hyp. 51 peut sembler excessivement restrictive à première vue, car on ne sait pas a priori si le générateur d'interaction possède des fonctions propres non triviales de valeur propre nulle. Or, comme il est montré à la prochaine section, les déficiences en rang de la matrice de poids W sont directement reliées à des fonctions propres de ce type.

3.1.2 Fonctions propres du générateur d'interaction

Pour caractériser l'effet du rang de W sur la dynamique, il est souhaitable de calculer des fonctions propres du GOK reliées à cette propriété. En ce sens, étudions d'abord les fonctions propres du générateur d'interaction $\mathcal{K}_I$ (de valeur propre nulle selon l'Hyp. 51). Ces fonctions propres doivent satisfaire l'équation

$$(\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla \phi = 0 \,. \tag{3.13}$$

Puisque la matrice de poids W est de rang $r < N$, il existe $N - r$ vecteurs linéairement indépendants $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$ tels que $W^\top \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Choisissons arbitrairement ces vecteurs comme les $N - r$ derniers vecteurs singuliers gauches de W, notés $\boldsymbol{u}^\ell$ pour $\ell \in \{r+1, \ldots, N\}$. Cette propriété permet d'énoncer le lemme suivant.

Lemme 52. *Soit le ℓ-ième vecteur singulier gauche $\boldsymbol{u}^\ell$ de W tel que $\ell \in \{r+1, \ldots, N\}$. S'il existe une observable ϕ_ℓ et une fonction continue $\varphi_\ell : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\boldsymbol{g} \odot \nabla \phi_\ell = \boldsymbol{u}^\ell \varphi_\ell \,, \tag{3.14}$$

alors ϕ_ℓ est fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle.

Démonstration. En explicitant le produit scalaire et le produit matriciel, le membre de gauche de l'Éq. (3.13) peut être réécrit comme

$$(\boldsymbol{g} \odot W\boldsymbol{h})^\top \nabla \phi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i W_{ij} h_j \partial_i \phi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_j W_{ji}^\top g_i \partial_i \phi = \boldsymbol{h}^\top W^\top (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \odot \nabla \phi) \,. \tag{3.15}$$

L'équation aux valeurs propres de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle est donc équivalente à

$$\boldsymbol{h}^\top W^\top (\boldsymbol{g} \odot \nabla \phi) = 0\,. \tag{3.16}$$

S'il existe une fonction scalaire φ_ℓ telle que la relation de l'énoncé est satisfaite, alors cette équation se réduit à

$$\boldsymbol{h}^\top W^\top \boldsymbol{u}^\ell \varphi_\ell = 0\,, \tag{3.17}$$

où $\boldsymbol{u}^\ell$ est un vecteur singulier gauche de W pour $\ell \in \{r+1, \dots, W\}$. Le produit matriciel $W^\top \boldsymbol{u}^\ell$ étant nul, l'équation aux valeurs propres est respectée et ϕ_ℓ est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle. □

Le Lem. 52 fournit une condition suffisante pour obtenir des fonctions propres de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle reliées au rang de la matrice de poids. De plus, en considérant sans perte de généralité que g_i est non identiquement nulle pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ [1], la condition du Lem. 52 implique que

$$\nabla \phi_\ell = \left(\boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1}\right) \varphi_\ell\,, \tag{3.18}$$

où $\left[\boldsymbol{g}^{\odot -1}(\boldsymbol{x})\right]_i = 1/g_i(\boldsymbol{x})$. Par inspection, la forme de cette expression évoque une dérivée en chaîne, ce qui suggère une forme plus spécifique pour les fonctions propres.

Lemme 53. *Soit le ℓ-ième vecteur singulier gauche $\boldsymbol{u}^\ell$ de W et une fonction $\zeta_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$. S'il existe une observable Φ_ℓ telle que*

$$\nabla \Phi_\ell = \boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1}\,, \tag{3.19}$$

alors $\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Phi_\ell$ est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle.

Démonstration. Si la condition de l'énoncé est respectée, alors, par dérivation en chaîne,

$$\nabla \phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \zeta_\ell'(\Phi_\ell(\boldsymbol{x})) \nabla \Phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \zeta_\ell'(\Phi_\ell(\boldsymbol{x})) \left(\boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1}(\boldsymbol{x})\right)\,, \tag{3.20}$$

où ζ_ℓ' est la dérivée de la fonction univariée ζ_ℓ. En prenant le produit d'Hadamard avec $\boldsymbol{g}$ des deux côtés de l'égalité, cette relation équivaut à

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \odot \nabla \phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^\ell \zeta_\ell'(\Phi_\ell(\boldsymbol{x}))\,. \tag{3.21}$$

Par le Lem. 52 (avec $\varphi_\ell = \zeta_\ell' \circ \Phi_\ell$), ϕ_ℓ est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle. □

A priori, rien ne garantit l'existence de fonctions propres de la forme du Lem. 53. En fait, l'existence de telles fonctions propres dépend de l'existence de fonctions Φ_ℓ satisfaisant l'Éq. (3.19). À son tour, l'existence de Φ_ℓ dépend de la forme de $\boldsymbol{g}$ et de $\boldsymbol{u}^\ell$, car ces derniers doivent être tels que le membre de droite de l'Éq. (3.19) est le gradient d'une fonction scalaire. À l'aide de notions de base de formes différentielles (formes fermées/exactes et lemme de Poincaré), la proposition suivante offre une condition suffisante sur $\boldsymbol{g}$ pour l'existence de Φ_ℓ.

1. Tout système dynamique de la forme de l'Éq. (3.1) où $g_i = 0$ est équivalent à un système où $g_i \neq 0$ et $W_{ij} = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.

Proposition 54. *Si $\partial_i g_j = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$ avec $i \neq j$, alors il existe une observable Φ_ℓ satisfaisant le Lem. 53 pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$.*

Démonstration. La condition du Lem. 53 stipule que

$$\nabla \Phi_\ell = \boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1} \tag{3.22}$$

pour $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$. Si $\boldsymbol{u}^\ell$ et $\boldsymbol{g}$ sont tels que le membre droit de l'équation est le gradient d'une fonction scalaire, alors Φ_ℓ existe. En considérant Φ_ℓ comme une 0-forme et le membre de droite comme une 1-forme (le passage de vecteur à forme différentielle est trivial dans l'espace euclidien), cette condition équivaut à dire que le membre de droite doit être une forme différentielle *exacte*. Pour ce faire, celui-ci doit d'abord être une forme différentielle *fermée*, c'est-à-dire que

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^\ell}{g_i(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}x_i \right) = 0 \,, \tag{3.23}$$

où d dénote la dérivée extérieure [74, Déf. 5.5]. La variété différentielle associée au système dynamique étant simplement l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, le lemme de Poincaré [74] s'applique et toute forme différentielle fermée est exacte. L'Éq. (3.23) est alors une condition *nécessaire et suffisante* pour que le membre de droite de l'Éq. (3.22) soit le gradient d'une fonction scalaire. En explicitant la dérivée extérieure, on obtient les conditions

$$\frac{u_j^\ell}{g_j^2} \partial_i g_j = \frac{u_i^\ell}{g_i^2} \partial_j g_i \tag{3.24}$$

pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tels que $i \neq j$. Si $\partial_i g_j = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$ avec $i \neq j$, ces conditions sont trivialement satisfaites pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$ et il existe une fonction Φ_ℓ satisfaisant la condition du Lem. 53. □

Autrement dit, la condition de la Prop. 54 implique que la i-ième composante de $\boldsymbol{g}$ dépend uniquement de la variable x_i pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Pour s'assurer de l'existence de fonctions propre ϕ_ℓ de la forme donnée au Lem. 53 pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$, il suffit donc de poser que[2] $[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]_i = g_i(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

On peut toutefois faire mieux que seulement démontrer l'existence de telles fonctions propres. Dans le cas où la Prop. 54 est respectée, il est possible de calculer la forme fermée des observables Φ_ℓ. À cette fin, introduisons au préalable le concept d'antidérivée, qui sera particulièrement utile pour exprimer les fonctions propres de façon compacte.

Définition 55. *L'antidérivée* ∂^{-1} d'une fonction continue $f : \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie comme

$$\partial^{-1} f(x) = \int_b^x f(\xi) \mathrm{d}\xi \,, \tag{3.25}$$

2. La i-ième composante de $\boldsymbol{g}$ est en fait une fonction de $\boldsymbol{x}$ dont l'image est égale à une fonction univariée évaluée à x_i, mais nous écrivons $g_i(x_i)$ et considérons g_i comme une fonction univariée afin d'alléger l'écriture.

où la borne $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ est telle que $\partial^{-1} f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$.

En d'autres mots, l'antidérivée envoie simplement une fonction vers une autre fonction dont la dérivée est égale à la fonction d'origine. L'antidérivée d'une fonction n'est pas unique, car les différentes valeurs de la borne d'intégration b définissent des fonctions résultantes différentes. Dans ce mémoire, nous considérons implicitement que b prend une valeur telle que la constante d'intégration est nulle, si possible.

La définition de l'antidérivée nous permet de définir une quantité importante apparaissant dans les fonctions propres de $\mathcal{K}_I$. Dans le cas où la Prop. 54 s'applique, la fonction $\boldsymbol{\eta} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est définie comme

$$[\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})]_i = \eta_i(x_i) = \partial^{-1}\left[\frac{1}{g_i}\right](x_i)\,, \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, N\}\,. \tag{3.26}$$

Nous sommes maintenant prêts à formuler un lemme sur les formes explicites de fonctions propres de $\mathcal{K}_I$ reliées au rang de W.

Lemme 56. *Soit le ℓ-ième vecteur singulier gauche $\boldsymbol{u}^\ell$ de W, une fonction $\zeta_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et une constante C_ℓ pour $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$. Si $\partial_i g_j = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$ avec $i \neq j$, alors*

$$\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Big((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} + C_\ell\Big) \tag{3.27}$$

est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle.

Démonstration. Selon le Lem. 53, $\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Phi_\ell$ pour $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$ est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ si

$$\partial_i \Phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \frac{u_i^\ell}{g_i(x_i)} \tag{3.28}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. En intégrant les deux membres de l'Éq. (3.28) par rapport à x_i, les conditions deviennent

$$\Phi_\ell(\boldsymbol{x}) = u_i^\ell \partial^{-1}\left[\frac{1}{g_i}\right](x_i) + \tilde{\Phi}_{i,\ell}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \tag{3.29}$$

pour tout $i \in \{1, \dots N\}$, où $\tilde{\Phi}_\ell$ est une fonction inconnue sans dépendance en x_i. Pour satisfaire l'Éq. (3.29) pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la fonction Φ_ℓ prend la forme

$$\Phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} u_i^\ell \partial^{-1}\left[\frac{1}{g_i}\right](x_i) + C_\ell\,, \tag{3.30}$$

où $C_\ell \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. Par la définition de la fonction $\boldsymbol{\eta}$ et en exprimant le produit scalaire en notation vectorielle,

$$\Phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + C_\ell\,. \tag{3.31}$$

Comme cette fonction satisfait l'Éq. (3.28), l'observable

$$\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Big((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + C_\ell \Big) \tag{3.32}$$

est fonction propre du GOK de valeur propre nulle. □

Pour obtenir des fonctions propres du GOK reliées au rang de la matrice de poids, il ne reste donc qu'à déterminer les conditions sous lesquelles les fonctions propres de $\mathcal{K}_I$ du Lem. 56 sont également fonctions propres de $\mathcal{K}_0$.

3.1.3 Fonctions propres conjointes

Le Lem. 56 propose des fonctions propres ϕ_ℓ du générateur d'interaction $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle pour $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$. Or, l'observable ϕ_ℓ est également fonction propre de $\mathcal{K}_0$ de valeur propre λ_ℓ si et seulement si l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{K}_0[\phi_\ell] = \boldsymbol{f}^\top \nabla \phi_\ell = \lambda_\ell \phi_\ell \tag{3.33}$$

est satisfaite. Selon la forme explicite de ϕ_ℓ, cette condition équivaut à

$$\zeta_\ell'(\Phi_\ell)\, \boldsymbol{f}^\top \nabla \Phi_\ell = \lambda_\ell\, \zeta_\ell\left(\Phi_\ell\right) , \tag{3.34}$$

où $\zeta_\ell' = \frac{\mathrm{d}\zeta_\ell}{\mathrm{d}\Phi_\ell}$ et où Φ_ℓ est l'observable

$$\Phi_\ell = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} + C_\ell \tag{3.35}$$

avec la fonction $\boldsymbol{\eta}$ définie à l'Éq. (3.26) et $C_\ell \in \mathbb{R}$. D'abord, dans le cas où $\lambda_\ell = 0$, l'Éq. (3.34) se réduit à

$$\zeta'(\Phi_\ell) \boldsymbol{f}^\top \nabla \Phi_\ell = 0\,. \tag{3.36}$$

Toute fonction propre non triviale doit donc satisfaire

$$\boldsymbol{f}^\top \nabla \Phi_\ell = 0\,, \tag{3.37}$$

ce qui équivaut simplement à $\mathcal{K}_0[\Phi_\ell] = 0$. Si cette condition est respectée, alors Φ_ℓ (ainsi que $\zeta_\ell \circ \Phi_\ell$ pour tout ζ_ℓ de classe $\mathcal{C}^1$) est une fonction propre du GOK de valeur propre nulle.

Considérons maintenant le cas où $\lambda_\ell \neq 0$. Si $\boldsymbol{f}^\top \nabla \Phi_\ell$ est tel que l'Éq. (3.34) est fermée en Φ_ℓ, alors cette condition peut être interprétée comme une EDO de la fonction ζ_ℓ avec la variable indépendante Φ_ℓ. On peut alors aisément calculer une solution $\zeta_\ell(\Phi_\ell)$ telle que $\zeta_\ell \circ \Phi_\ell$ est fonction propre de $\mathcal{K}_0$. Cette approche permet finalement la formulation du résultat principal de cette section, soit le théorème suivant sur les fonctions propres du GOK de valeur propre non nulle.

Théorème 57 (Fonctions propres du GOK)**.** *Soit l'observable* $\Phi_\ell = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} + C_\ell$ *pour* $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$*. Si*

1. $\partial_i g_j = 0$ *pour tout* $i, j \in \{1, \dots, N\}$ *où* $i \neq j$ *;*
2. *il existe un* $C_\ell \in \mathbb{R}$ *et une fonction* $\chi_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *tels que* $\chi_\ell \circ \Phi_\ell = \boldsymbol{f}^\top \nabla \Phi_\ell$ *;*

alors l'observable

$$\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Phi_\ell \,, \quad \text{où} \quad \zeta_\ell(x) = \exp\left(\lambda_\ell \, \partial^{-1} \left[\frac{1}{\chi_\ell}\right](x)\right) , \tag{3.38}$$

est fonction propre du GOK de valeur propre $\lambda_\ell \neq 0$*.*

Démonstration. Par le Lem. 56, la condition 1 de l'énoncé implique que ϕ_ℓ est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle. De plus, par la démarche effectuée plus haut, $\phi_\ell = \zeta_\ell \circ \Phi_\ell$ est une fonction propre de $\mathcal{K}_0$ si et seulement si l'Éq. (3.34) est satisfaite. Or, sous la condition 2 de l'énoncé, cette équation devient

$$\zeta_\ell'(\Phi_\ell)\chi_\ell(\Phi_\ell) = \lambda_\ell \zeta_\ell(\Phi_\ell) \,, \tag{3.39}$$

où il est sous-entendu que la constante C_ℓ dans Φ_ℓ est telle que la condition 2 est satisfaite. Étant une EDO à variables séparables en $\zeta_\ell(\Phi_\ell)$, l'équation peut aisément être résolue pour obtenir la solution générale pour $\lambda_\ell \neq 0$, soit

$$\zeta_\ell(x) = a \exp\left(\lambda_\ell \, \partial^{-1} \left[\frac{1}{\chi_\ell}\right](x)\right) , \tag{3.40}$$

où la constante d'intégration $a \in \mathbb{R}$ peut être posée à 1 sans perte de généralité, car les fonctions propres du GOK sont définies à un facteur constant près. L'observable ϕ_ℓ de l'énoncé est donc une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle ainsi qu'une fonction propre de $\mathcal{K}_0$ de valeur propre λ_ℓ. Comme toute fonction propre commune à $\mathcal{K}_0$ et $\mathcal{K}_I$ est fonction propre du GOK, l'observables ϕ_ℓ est une fonction propre du GOK de valeur propre λ_ℓ. □

Avec le Thm. 57 en main, identifions des familles de dynamiques qui possèdent des fonctions propres reliées au rang de W.

3.2 Familles de systèmes dynamiques avec fonctions propres reliées au rang

Au Thm. 57, la condition 1 restreint la fonction $\boldsymbol{g}$ pour que l'observable ϕ_ℓ soit fonction propre de $\mathcal{K}_I$, tandis que la condition 2 restreint $\boldsymbol{f}$ afin que ϕ_ℓ soit aussi fonction propre de $\mathcal{K}_0$. La forme de cette deuxième restriction, qui contraint en fait la relation entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ selon la constante C_ℓ et la fonction χ_ℓ, permet la distinction entre différentes familles de dynamiques. Chaque famille présentée dans cette section possède donc les mêmes restrictions sur $\boldsymbol{g}$, mais une relation différente entre $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{f}$. De plus, comme chaque famille est associée à une fonction χ_ℓ et une constante C_ℓ différentes, elles possèdent des fonctions propres de formes différentes.

3.2.1 Première famille

Le principal défi dans la recherche de familles de dynamiques est l'identification de relations entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ telles que la condition 2 du Thm. 57 est satisfaite. À cet effet, il est pratique de poser d'abord une forme particulière de χ_ℓ, puis déterminer s'il existe une constante C_ℓ et une relation entre $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ telles que la contrainte est respectée. Nous considérons toujours ici que la condition 1 du Thm. 57 est satisfaite en imposant $[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]_i = g_i(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Pour la première famille, posons simplement que $\chi_\ell = -\mathrm{id}$, où id est la fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La condition 2 du Thm. 57 prend alors la forme $-\Phi_\ell = \boldsymbol{f}^\top \nabla \Phi_\ell$, ou encore

$$-(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} - C_\ell = \boldsymbol{f}^\top \left(\boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1} \right) . \tag{3.41}$$

Si la fonction $\boldsymbol{f}$ est de la forme

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{g} \odot (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{c}) \tag{3.42}$$

pour $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^N$, alors la condition de l'Éq. (3.41) devient

$$-(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} - C_\ell = -(\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{c}) \tag{3.43}$$

et est, par inspection, respectée pour $C_\ell = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{c}$. Ce résultat permet la définition de la première famille de systèmes dynamiques avec des fonctions propres reliées au rang de W. Étant donné que les fonctions propres permettront une réduction dimensionnelle à la prochaine section, nous désignons les familles de dynamiques avec des fonctions propres du Thm. 57 comme *réductibles en rang*.

Définition 58 (Famille 1)**.** La *première famille de systèmes dynamiques réductibles en rang* est composée des systèmes de la forme

$$\dot{x}_i = g_i(x_i) \left(-\eta_i(x_i) - c_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} h_j(\boldsymbol{x}) \right) , \qquad \mathrm{rang}(W) = r < N \tag{3.44}$$

avec la décomposition en valeurs singulières de l'Éq. (3.3), où $c_i \in \mathbb{R}$ et où les fonctions $\eta_i = \partial^{-1}[1/g_i]$, g_i et h_i sont de classe $\mathcal{C}_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

Chaque système dynamique appartenant la famille 1 est caractérisé par un quadruplet $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, W, \boldsymbol{c})$. Par le Thm. 57, on peut aisément calculer les formes fermées des $N-r$ fonctions propres reliées au rang pour des dynamiques de la famille 1.

Théorème 59 (Famille 1 – Fonctions propres)**.** *Soit un système dynamique appartenant à la famille 1. Alors, les $N - r$ observables*

$$\phi_\ell = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{c}) , \qquad \forall\, \ell \in \{r+1, \dots, N\} , \tag{3.45}$$

sont des fonctions propres indépendantes du GOK de valeur propre $\lambda_\ell = -1$.

Démonstration. Selon la démarche effectuée plus haut, les systèmes de la famille 1 satisfont les conditions du Thm. 57 pour la fonction $\chi_\ell = -\mathrm{id}$ et pour la constante $C_\ell = -(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{c}$. Dans ce cas, en choisissant correctement la borne d'intégration,

$$\partial^{-1}\left[\frac{1}{\chi_\ell}\right](x) = -\ln(x)\,, \tag{3.46}$$

ce qui implique que la fonction ζ_ℓ prend la forme

$$\zeta_\ell(x) = \exp\left(-\lambda_\ell \ln(x)\right) = x^{-\lambda_\ell}\,. \tag{3.47}$$

Par le Thm. 57, les observables

$$\phi_\ell = \Phi_\ell^{-\lambda_\ell} = \Big((\boldsymbol{u}^\ell)^\top(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{c})\Big)^{-\lambda_\ell} \tag{3.48}$$

sont donc des fonctions propres du GOK de valeur propre λ_ℓ pour tout $\ell \in \{r+1, \ldots, N\}$. Dans le cas particulier où $\lambda_\ell = -1$, les fonctions propres

$$\phi_\ell = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{c})\,, \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}\,, \tag{3.49}$$

sont celles de l'énoncé (les autres fonctions propres peuvent être obtenues à partir de celles-ci par le Lem. 29).

Il ne reste qu'à démontrer l'indépendence fonctionnelle des fonctions propres. Selon la Déf. 12, les fonctions propres sont fonctionnellement indépendantes si la matrice jacobienne

$$\mathrm{d}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \partial_1\phi_{r+1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \partial_N\phi_{r+1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\phi_N(\boldsymbol{x}) & \cdots & \partial_N\phi_N(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

est de rang $N-r$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Selon la forme des observables et des fonctions η_i,

$$\mathrm{d}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{u_1^{r+1}}{g_1(x_1)} & \cdots & \frac{u_N^{r+1}}{g_N(x_N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_1^{N}}{g_1(x_1)} & \cdots & \frac{u_N^{N}}{g_N(x_N)} \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Cette matrice peut être décomposée en une matrice de taille $N-r \times N$ et une matrice diagonale de taille $N \times N$ comme

$$\mathrm{d}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} u_1^{r+1} & \cdots & u_N^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{N} & \cdots & u_N^{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{g_1(x_1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{g_N(x_N)} \end{bmatrix}. \tag{3.52}$$

La matrice de gauche est de rang $N-r$, car ses rangées sont des vecteurs singuliers droits de W et sont donc linéairement indépendants. De plus, la matrice de droite est de plein rang si $g_i(x_i)$ est fini pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Comme le produit matriciel par une matrice inversible préserve le rang [42], la matrice jacobienne $\mathrm{d}\phi\big|_{\boldsymbol{x}}$ est de rang $N-r$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Les $N-r$ fonctions propres de l'énoncé sont donc fonctionnellement indépendantes. □

Notons qu'il est possible de retrouver la famille 1 avec une forme plus générale de χ_ℓ. Si la fonction χ_ℓ est définie comme $\chi_\ell = k\,\mathrm{id}$ pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors la condition 2 du Thm. 57 est respectée pour

$$\boldsymbol{f} = k\boldsymbol{g} \odot (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{c})\,, \tag{3.53}$$

ce qui implique des systèmes dynamiques de la forme

$$\dot{x}_i = g_i(x_i) \left(k\eta_i(x_i) + kc_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} h_j(\boldsymbol{x}) \right)\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,. \tag{3.54}$$

Or, en redéfinissant sans perte de généralité la fonction $g_i \to -kg_i$ et les éléments $W_{ij} \to -\frac{1}{k} W_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, on retrouve les équations

$$\dot{x}_i = g_i(x_i) \left(-\eta_i(x_i) - c_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} h_j(\boldsymbol{x}) \right)\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{3.55}$$

de la Déf. 58. Les systèmes dynamiques obtenus en posant $\chi_\ell \circ \Phi_\ell = k\Phi_\ell$ pour $k \neq 0$ font donc partie de la famille 1, mais ne sont pas inclus explicitement pour éviter une redondance dans les paramètres dynamiques.

Étudions quelques exemples particuliers.

Exemple 60 (RNN)**.** Soit un système dynamique appartenant à la famille 1 avec $g_i(x_i) = 1$, $h_j(\boldsymbol{x}) = s(x_j)$ et $c_i = -\theta_i$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, où $s(x_j)$ est une fonction d'activation sigmoïdale lisse et $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^N$. Selon la forme de g_i, les fonctions η_i sont alors

$$\eta_i(x_i) = \partial^{-1}\left[1\right](x_i) = x_i\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,. \tag{3.56}$$

Le système dynamique est donc de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{x} + W\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta}\,, \tag{3.57}$$

ce qui correspond à une des formes de dynamique de RNN présentées à la Sec. 2.3. Par le Thm. 59, ce système possède les fonctions propres du GOK

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta})\,, \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}\,. \tag{3.58}$$

Les RNN de la forme de l'Éq. (3.57) possèdent donc des *fonctions propres affines* associées aux déficiences en rang de la matrice de poids W. De plus, dans le cas particulier où $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$, les fonctions propres

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{x}\,, \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}\,, \tag{3.59}$$

sont linéaires. Les conséquences de ces fonctions propres sur la dynamique sont étudiées plus en détail à la Sec. 3.4.1.

Exemple 61 (Michaelis-Menten)**.** Il est pertinent de remarquer que le choix de la fonction d'interaction $\boldsymbol{h}$ n'a pas d'impact sur les fonctions propres reliées au rang de W. Pour illustrer cette propriété, reprenons la dynamique RNN de l'Éq. (3.57) avec $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. En substituant la fonction d'activation sigmoïdale $s(x_j)$ dans la dynamique RNN par la fonction

$$h_j^{\mathrm{MM}}(x_j) = \frac{x_j^{a_j}}{1 + x_j^{a_j}}\,, \tag{3.60}$$

où $a_j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on obtient un système de la forme

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \frac{x_j^{a_j}}{1 + x_j^{a_j}}\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{3.61}$$

qui correspond à une version du modèle de régulation génétique de Michaelis-Menten couramment étudiée en science des réseaux [3, 7, 8, 31, 45, 68, 89]. Étant donné que seule la fonction d'interaction est modifiée, ce système possède les mêmes fonctions propres linéaires que les RNN de l'exemple précédent dans le cas $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, soit

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{x}\,, \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}\,. \tag{3.62}$$

Les conclusions de la Sec. 3.4.1 sur l'effet de ces fonctions propres sur la dynamique s'appliquent donc également au modèle de Michaelis-Menten.

Exemple 62. En guise d'exemple plus général, considérons les dynamiques appartenant à la famille 1 où $g_i(x_i) = x_i^m$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et pour un certain $m \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, les fonctions η_i peuvent prendre deux formes différentes selon la valeur de m. Pour $m = 1$, on obtient que

$$\eta_i(x_i) = \partial^{-1}\left[\frac{1}{x_i}\right] = \ln x_i\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,, \tag{3.63}$$

ce qui donne un système dynamique de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \odot (-\ln(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} + W\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))\,, \tag{3.64}$$

où ln désigne le logarithme par élément. Un tel système possède les fonctions propres

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\ln(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})\,, \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}\,. \tag{3.65}$$

Si $m \neq 1$, alors on a plutôt que

$$\eta_i(x_i) = \partial^{-1}\left[x_i^{-m}\right] = \frac{1}{1-m} x_i^{1-m}\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,. \tag{3.66}$$

La dynamique est alors régie par le système

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{1-m}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\odot m} (-\boldsymbol{c} + W\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))\,, \tag{3.67}$$

où $[\boldsymbol{x}^{\odot m}]_i = x_i^m$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, et les fonctions propres sont

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \left(\frac{\boldsymbol{x}^{\odot(1-m)}}{1-m} + \boldsymbol{c} \right) , \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\} . \tag{3.68}$$

Or, il est important de noter que, selon la valeur de m, il peut être nécessaire de restreindre le domaine d'un tel système aux x_i non nuls afin que le champ vectoriel et les fonctions propres soient bien définies.

Ces exemples montrent que la famille 1 comprend certains systèmes dynamiques importants en science des réseaux, comme les RNN et le modèle de Michaelis-Menten. Pour pouvoir inclure d'autres modèles dans notre analyse, identifions une seconde famille de dynamiques.

3.2.2 Seconde famille

Une seconde famille de dynamiques réductibles en rang peut être calculée par une procédure similaire à celle de la première famille, mais en posant plutôt $\chi_\ell(x) = k_\ell$ pour $k_\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour ce choix, on obtient que $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{g}$ et $k_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$. Définissons la deuxième famille et examinons ensuite ses fonctions propres.

Définition 63 (Famille 2)**.** La *seconde famille de systèmes dynamiques réductibles en rang* contient les systèmes de la forme

$$\dot{x}_i = g_i(x_i) \left(-c_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} h_j(\boldsymbol{x}) \right) , \qquad \operatorname{rang}(W) = r < N \tag{3.69}$$

avec la décomposition en valeurs singulières de l'Éq. (3.3), où $c_i \in \mathbb{R}$ et où les fonctions $\eta_i = \partial^{-1}[1/g_i]$, g_i et h_i sont de classe $\mathcal{C}_1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Tout comme pour la famille 1, un système dynamique appartenant à la famille 2 est donc caractérisé par un quadruplet $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, W, \boldsymbol{c})$. De plus, par inspection, les systèmes de la famille 2 ont un champ vectoriel identique à ceux de la famille 1, mais sans le terme $-\eta_i(x_i)$. La fonction η_i étant définie comme l'antidérivée de $1/g_i$, elle ne peut être identiquement nulle pour g_i de classe $\mathcal{C}^1$. Les deux familles de systèmes dynamiques sont donc distinctes. Notons également qu'un système de la famille 2 doit être tel que $\boldsymbol{\eta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ce, même si cette fonction n'apparaît pas dans le champ vectoriel, car sinon l'existence de fonctions propres reliées au rang n'est pas garantie.

En premier lieu, les systèmes de la famille 2 possèdent des fonctions propres du GOK de valeur propre nulle (intégrales premières) qui ne sont pas calculées à partir du Thm. 57.

Lemme 64 (Famille 2 – Intégrales premières)**.** *Soit un système dynamique de la famille 2. S'il existe un* $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$ *tel que* $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell = 0$*, alors l'observable* $(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}$ *est une fonction propre du GOK de valeur propre nulle.*

Démonstration. Par le Lem. 56 pour $\zeta_\ell(x) = x$ et $C_\ell = 0$, l'observable de l'énoncé est une fonction propre de $\mathcal{K}_I$ de valeur propre nulle. Il ne reste donc qu'à démontrer que $(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}$ est aussi une fonction propre de $\mathcal{K}_0$ de valeur propre nulle, c'est-à-dire que

$$\mathcal{K}_0 \left[(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} \right] = 0 \,. \tag{3.70}$$

Pour une dynamique de la famille 2, le membre de gauche se réduit à

$$\boldsymbol{f}^\top \nabla \left[(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} \right] = - \left(\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{g} \right)^\top \left(\boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1} \right) = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell \,. \tag{3.71}$$

Puisque $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell = 0$ par l'énoncé, l'Éq. (3.70) est respectée et $(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}$ est une fonction propre du GOK de valeur propre nulle. □

Les systèmes de la famille 2 possèdent également des fonctions propres de valeurs propres non nulles obtenues à partir du Thm. 57. En combinant celles-ci avec les intégrales premières du Lem. 64, on obtient un ensemble de $N - r$ fonctions propres indépendantes.

Théorème 65 (Famille 2 – Fonctions propres)**.** *Soit un système dynamique appartenant à la famille 2. Alors, les* $N - r$ *observables*

$$\phi_\ell = \exp\left((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} \right) \,, \qquad \forall\, \ell \in \{r+1, \dots, N\} \,, \tag{3.72}$$

sont des fonctions propres indépendantes du GOK de valeur propre $\lambda_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$*.*

Démonstration. D'abord, pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$ tel que $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell = 0$, l'observable ϕ_ℓ est une fonction propre du GOK de valeur propre nulle par le Lem. 64, car ϕ_ℓ est une fonction $\mathcal{C}^1$ d'une intégrale première dans ce cas. Pour $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell \neq 0$, les fonctions propres sont obtenues par le Thm. 57 en posant $\chi_\ell(x) = k_\ell$ pour $k_\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dans ce cas, la condition 2 du Thm 57 implique que

$$k_\ell = \boldsymbol{f}^\top \left(\boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1} \right) \,. \tag{3.73}$$

Par inspection, cette condition est satisfaite pour $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{g}$ et $k_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$. La fonction ζ_ℓ prescrite par le Thm. 57 est alors

$$\zeta(x) = \exp\left(-\frac{\lambda_\ell}{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell} x \right) . \tag{3.74}$$

En posant $\lambda_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$, (les autres fonctions propres sont encore ici retrouvées par le Lem. 29), les fonctions propres

$$\phi_\ell = \exp\left((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} \right) \,, \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\} \,, \tag{3.75}$$

de l'énoncé sont obtenues, où les constantes C_ℓ sont posées à 0 sans perte de généralité par le fait que les fonctions propres sont définies à un facteur près.

Par la Déf. 12, les fonctions propres sont fonctionnellement indépendantes si, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, la matrice jacobienne

$$\mathrm{d}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \partial_1\phi_{r+1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \partial_N\phi_{r+1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\phi_N(\boldsymbol{x}) & \cdots & \partial_N\phi_N(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

est de rang $N - r$. Pour les fonctions propres de la famille 2, la matrice jacobienne est de la forme

$$\mathrm{d}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{u_1^{r+1}\phi_{r+1}}{g_1(x_1)} & \cdots & \frac{u_N^{r+1}\phi_{r+1}}{g_N(x_N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{u_1^{N}\phi_{N}}{g_1(x_1)} & \cdots & \frac{u_N^{N}\phi_{N}}{g_N(x_N)} \end{bmatrix}. \tag{3.77}$$

Le calcul du rang de cette matrice est grandement simplifié par la décomposition

$$\mathrm{d}\phi\Big|_{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \phi_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{r+1} & \cdots & u_N^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{N} & \cdots & u_N^{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{g_1(x_1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{g_N(x_N)} \end{bmatrix}, \tag{3.78}$$

qui consiste en une matrice diagonale de taille $N \times N$ (à droite) multipliée par une matrice de taille $N-r \times N$ (au centre), puis par une matrice diagonale de taille $N-r \times N-r$ (à gauche). En premier lieu, la matrice $N-r \times N$ au centre doit être de rang $N-r$, car ses rangées sont $N-r$ vecteurs orthogonaux. Sur $\mathcal{X}$, la matrice diagonale $N \times N$ à droite doit être de plein rang, car tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Comme la multiplication par une matrice de plein rang préserve le rang, le produit des deux matrices de droite est de rang $N - r$. Finalement, la matrice diagonale $N - r \times N - r$ de gauche est de plein rang si les fonctions propres ϕ_ℓ sont non nulles pour tout $\ell \in \{r+1, \ldots, N\}$. La fonction $\boldsymbol{\eta}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{X}$ par définition, les fonctions propres sont non nulles sur $\mathcal{X}$. La matrice jacobienne est donc toujours de rang $N - r$ et les fonctions propres sont fonctionnellement indépendantes. □

Il est important de noter que, contrairement aux fonctions propres de la famille 1, les fonctions propres du Thm. 65 ne sont pas fonctionnellement indépendantes sur leur noyau, car la fonction $\boldsymbol{\eta}$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ dans ce cas. Cette propriété nous force à exclure des portions du domaine pour certains modèles. Considérons maintenant quelques exemples de dynamiques de la famille 2.

Exemple 66 (Modèle SI)**.** Le cas où $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, c'est-à-dire les systèmes de la forme

$$\dot{x}_i = g_i(x_i) \sum_{j=1}^{N} W_{ij} h_j(\boldsymbol{x}), \qquad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{3.79}$$

est particulièrement intéressant, car $\lambda_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell = 0$ pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$ et les fonctions propres du Thm. 65 sont toutes des intégrales premières. Par exemple, pour $g_i(x_i) = 1 - x_i$ et $h_j(\boldsymbol{x}) = x_j$, on obtient le modèle épidémiologique SI (*susceptible-infected*) [5, 6, 76] sur réseau, où les équations de la dynamique sont

$$\dot{x}_i = (1 - x_i) \sum_{j=1}^{N} W_{ij} x_j \tag{3.80}$$

avec $x_i \in [0, 1)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Dans ce cas, les fonctions η_i sont de la forme

$$\eta_i(x_i) = \partial^{-1} \left[\frac{1}{1 - x_i} \right] = -\ln(1 - x_i)\,, \qquad i \in \{1, \dots, N\}\,, \tag{3.81}$$

ce qui donne les fonctions propres

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} (1 - x_i)^{-u_i^\ell}\,, \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\}\,. \tag{3.82}$$

On voit bien ici que l'exclusion des bornes supérieures ($x_i = 1$) du domaine du système dynamique est nécessaire afin que les fonctions propres et la fonction $\boldsymbol{\eta}$ soient de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 67 (Lotka-Volterra)**.** Un système dynamique de la famille 2 avec $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ correspond aux équations

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \odot (-\boldsymbol{c} + W\boldsymbol{x})\,. \tag{3.83}$$

Sur le domaine $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, ce système correspond au modèle de Lotka-Volterra à N populations présenté à la Sec. 2.4. Afin que la fonction $\boldsymbol{\eta}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$, imposons la contrainte supplémentaire des populations non nulles ($x_i > 0$). Dans ce cas, la fonction $\boldsymbol{\eta}$ prend la forme

$$\eta_i(x_i) = \partial^{-1} \left[\frac{1}{x_i} \right] = \ln x_i\,, \qquad i \in \{1, \dots, N\}\,, \tag{3.84}$$

et les monômes

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{u_i^\ell}\,, \qquad \ell \in \{1, \dots, N\}\,, \tag{3.85}$$

sont des fonctions propres du GOK de valeur propre $\lambda_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$ pour $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$. Les implications de ces fonctions propres sur la dynamique du modèle de Lotka-Volterra sont étudiées à la Sec. 3.4.2.

Exemple 68. Comme pour la première famille, considérons également l'exemple plus général où $g_i(x_i) = x_i^m$ pour $m \in \mathbb{R}$. Les équations de la dynamique sont alors de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{\odot m} \odot (-\boldsymbol{c} + W\boldsymbol{h})\,, \tag{3.86}$$

où $[x^{\odot m}]_i = x_i^m$. D'abord, excluons le cas $m = 1$, car il correspond simplement au modèle de Lotka-Volterra de l'exemple précédent pour une fonction d'interaction $\boldsymbol{h}$ générale. Pour $m \neq 1$, la fonction $\boldsymbol{\eta}$ est donnée par

$$\eta_i(x_i) = \partial^{-1}\left[x_i^{-m}\right] = \frac{1}{1-m} x_i^{1-m}\,, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}\,. \tag{3.87}$$

Les fonctions propres sont donc

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \exp\left(\frac{1}{1-m}(\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{x}^{\odot(1-m)}\right)\,, \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}\,. \tag{3.88}$$

Selon les exemples ci-haut, la famille 2 permet d'inclure entre autres le modèle SI et le modèle de Lotka-Volterra dans notre cadre d'analyse. Toutefois, comme discuté brièvement à la prochaine section, il est difficile de poser une forme de χ_ℓ adéquate pour le calcul d'une famille supplémentaire.

3.2.3 Recherche d'autres familles

Les formes des fonctions χ_ℓ posées pour la famille 1 et la famille 2 permettent de trouver une fonction $\boldsymbol{f}$ indépendante de ℓ telle que la condition 2 du Thm. 57 est respectée. Or, excepté ces deux cas, les formes spécifiques de χ_ℓ semblent bien souvent n'admettre aucune fonction $\boldsymbol{f}$ de ce type. La recherche de familles de systèmes dynamiques réductibles en rang au-delà des familles 1 et 2 est donc assez ardue. Illustrons ce problème avec un exemple.

Exemple 69. Considérons χ_ℓ de la forme $\chi_\ell(x) = x^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (les cas $k = 0$ et $k = 1$ correspondent aux familles déjà trouvées). Dans ce cas, la condition sur $\boldsymbol{f}$ et C_ℓ fournie par le Thm. 57 devient

$$\left((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta} + C_\ell\right)^k = \boldsymbol{f}^\top\left(\boldsymbol{u}^\ell \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1}\right)\,. \tag{3.89}$$

Par inspection, il semble impossible d'avoir un $\boldsymbol{f}$ satisfaisant cette condition pour tout $\boldsymbol{u}^\ell$. En effet, en développant le polynôme à gauche, on obtient entre autres le terme $\left((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}\right)^k$. En développant ce polynôme (le produit scalaire est une somme de plusieurs termes), on obtient, au moins pour un $i \in \{1, \ldots, N\}$, un terme de la forme $\left(u_i^\ell \eta_i\right)^k$. Comme le membre de droite ne possède aucun terme en $(u_i^\ell)^k$, $\boldsymbol{f}$ doit avoir une dépendance en $\boldsymbol{u}^\ell$ pour que la condition soit satisfaite.

Étant donné la difficulté de la recherche d'autres familles, nous nous contenterons des deux familles réductibles en rang déjà identifiées. Pour ces deux familles de systèmes, les fonc-

tions propres du GOK reliées au rang permettent la construction d'une méthode de réduction dimensionnelle.

3.3 Réduction dimensionnelle

Dans cette section, nous utilisons les fonctions propres de la section précédente pour réduire la dimension des systèmes dynamiques des familles 1 et 2. Puisque les systèmes réduits seront non autonomes en général, considérons ici la forme plus générale de système dynamique $\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{X}}$, où $\hat{\mathcal{X}} = \mathbb{R} \times \mathcal{X}$, définie formellement à l'Ann. B et qui inclut les systèmes dynamiques non autonomes.

En premier lieu, définissons ce que l'on entend par *réduction dimensionnelle*.

Définition 70. Soit deux systèmes dynamiques $\boldsymbol{\Psi}^N : \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{X}}$ de dimension N et $\boldsymbol{\Psi}^n : \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{Y}} \to \hat{\mathcal{Y}}$ de dimension $n < N$ avec la fonction identité $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Une *fonction de réduction* $\boldsymbol{R} : \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{Y}}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\boldsymbol{\Psi}^n \circ (\mathrm{id} \times \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{\Psi}^N$.

La réduction dimensionnelle d'un système dynamique consiste simplement à appliquer une fonction de réduction appropriée. Le système dynamique $\boldsymbol{\Psi}^n$ de plus faible dimension est nommé *système réduit* et ses variables dynamiques sont les *variables réduites*. La réduction dimensionnelle peut d'ailleurs être illustrée à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\boldsymbol{\Psi}^N} & \hat{\mathcal{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times \boldsymbol{R}} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{R}} \\ \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{Y}} & \xrightarrow[\boldsymbol{\Psi}^n]{} & \hat{\mathcal{Y}} \end{array}$$

Contrairement à plusieurs méthodes de réduction dimensionnelles *approximatives* pour lesquelles la condition de la définition s'assouplit à $\boldsymbol{\Psi}^n \circ (\mathrm{id} \times \boldsymbol{R}) \approx \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{\Psi}^N$, l'absence d'approximation dans la démarche présentée ici en fait une réduction dimensionnelle *exacte*.

3.3.1 Réduction dimensionnelle pour la première famille

Dans le but de trouver une réduction appropriée pour les dynamiques de la famille 1, on peut chercher un changement de variables vers un système où les fonctions propres sont des variables dynamiques. S'il existe un tel changement de variables, alors la réduction peut être effectuée en intégrant trivialement les variables de ce nouveau système qui correspondent aux fonctions propres du GOK. À cet effet, commençons par définir les $N - r$ nouvelles variables

$$y_\ell = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}), \qquad \ell \in \{r+1, \ldots, N\}, \tag{3.90}$$

qui sont les fonctions propres du GOK du Thm. 59. Pour compléter le changement de variables, on y ajoute les r autres variables

$$y_i = (\boldsymbol{u}^i)^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})\,, \qquad i \in \{1, \dots, r\}\,, \tag{3.91}$$

de la même forme que les fonctions propres, mais pour les r premier vecteurs singuliers $\boldsymbol{u}^i$ au lieu des $N - r$ derniers. Par le même argument que dans la preuve du Thm. 59, ces nouvelles quantités sont fonctionnellement indépendantes entre elles et avec les fonctions propres. En regroupant les N nouvelles variables, on obtient le changement complet

$$\boldsymbol{y} = U^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}) \tag{3.92}$$

qui permet l'intégration partielle des systèmes de la famille 1.

Corollaire 71. *Soit un système dynamique appartenant à la famille 1. Si la fonction inverse $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ de $\boldsymbol{\eta}$ existe et est de classe $\mathcal{C}^1$, alors le système dynamique se réduit à un système de dimension r, soit*[3]

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) \tag{3.93}$$

avec les variables réduites $\boldsymbol{Y} = U_r^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})$, les constantes $\boldsymbol{\phi}^0 = U_\perp^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(0)) + \boldsymbol{c})$ et

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}\left(U \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ e^{-t}\boldsymbol{\phi}^0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{c}\right), \tag{3.94}$$

où $U_\perp$ est la matrice $N \times (N - r)$ des $N - r$ derniers vecteurs singuliers gauches de W.

Démonstration. Soit le changement de variables $\boldsymbol{y} = U^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})$. Par dérivation en chaîne,

$$\dot{\boldsymbol{y}} = U^\top\left(\dot{\boldsymbol{x}} \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1}\right) = U^\top\left(-\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} + W\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\right). \tag{3.95}$$

D'abord, le produit de $U^\top$ avec les deux premiers termes de la parenthèse génère les variables $\boldsymbol{y}$. Pour le troisième terme, la décomposition en valeurs singulières $W = U\Sigma V^\top$ implique que la matrice $U^\top$ devant la parenthèse s'annule avec la matrice de vecteurs singuliers gauches de W. L'équation se réduit donc à

$$\dot{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{y} + \Sigma V^\top \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\,. \tag{3.96}$$

Or, comme $\sigma_i = 0$ pour tout $i > r$, le système peut être séparé en

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -y_i + \sigma_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji} h_j(\boldsymbol{x})\,, && i \in \{1, \dots, r\}\,, \\ \dot{y}_i &= -y_i\,, && i \in \{r+1, \dots, N\}\,, \end{aligned} \tag{3.97a}$$

3. La dépendance en t de $\boldsymbol{Y}(t)$ est omise pour alléger la notation.

où la forme des équations linéaires découplées pour $i \in \{r+1, \dots, N\}$ est attendue, car les variables y_i associées sont des fonctions propres du GOK par construction. Ce nouveau système d'équations n'est pas fermé en $\boldsymbol{y}$ à cause de la dépendance en $\boldsymbol{x}$ dans les fonctions d'interaction h_j. Toutefois, si $\boldsymbol{\eta}$ possède une fonction inverse $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors le changement de variables inverse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^{-1}(U\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c})$ peut être utilisé pour éliminer la dépendance en $\boldsymbol{x}$. Le système devient

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -y_i + \sigma_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji} h_j \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}(U\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}) \,, & i &\in \{1, \dots, r\} \,, \\ \dot{y}_i &= -y_i \,, & i &\in \{r+1, \dots, N\} \,. \end{aligned} \tag{3.98a}$$

Les $N - r$ dernières équations correspondant aux fonctions propres du GOK peuvent alors être intégrées pour obtenir $y_i(t) = y_i(0)e^{-t}$ pour tout $i \in \{r+1, \dots, N\}$. En définissant les variables réduites $Y_i = y_i = \left[U^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})\right]_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et les constantes $\phi_i^0 = y_i(0) = \left[U^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(0)) + \boldsymbol{c})\right]_i$ pour $i \in \{r+1, \dots, N\}$, le système résultant de dimension r est

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}\left(U \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ e^{-t}\boldsymbol{\phi}^0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{c}\right) . \tag{3.99}$$

Selon la définition de la fonction $\boldsymbol{H}$ donnée dans l'énoncé, ce système équivaut à

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) , \tag{3.100}$$

ce qui correspond au système réduit recherché. De plus, comme la matrice U_r est constituée des r premières colonnes de U et $U_\perp$ est constituée des $N - r$ dernières colonnes de U, les variables réduites et les nouvelles constantes peuvent être exprimées comme $\boldsymbol{Y} = U_r^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})$ et $\boldsymbol{\phi}^0 = U_\perp^\top(\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})$. □

Les fonctions propres du Thm. 59 permettent donc d'intégrer partiellement les systèmes dynamiques appartenant à la famille 1 de N équations différentielles autonomes à r équations différentielles non autonomes. L'intégration partielle fait également apparaître $N - r$ nouvelles constantes ϕ_i^0 correspondant aux conditions initiales des fonctions propres. Si $\boldsymbol{\phi}^0 = \boldsymbol{0}$, le système réduit est autonome. Illustrons le processus de réduction dimensionnelle en reprenant les exemples de la section précédente.

Exemple 72 (RNN – Intégration partielle)**.** Reprenons la dynamique RNN de l'Ex. 60

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{x} + W\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta} \tag{3.101}$$

avec des fonctions propres affines de la forme

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta}) \tag{3.102}$$

de valeur propre $\lambda_\ell = -1$ pour $\ell \in \{r+1, \dots, \ell\}$. Dans ce cas, le changement de variables prescrit par l'Éq. (3.92) est simplement

$$\boldsymbol{y} = U^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta}) \tag{3.103}$$

et les équations de la dynamique en $\boldsymbol{y}$ sont

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= -y_i + \sigma_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji}\, s\left(\sum_{k=1}^{N} U_{jk} y_k + \theta_j\right), \qquad && i \in \{1, \dots, r\}, \\ \dot{y}_i &= -y_i, && i \in \{r+1, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{3.104}$$

En intégrant les $N - r$ dernières équations, la nouvelle fonction d'interaction $\boldsymbol{H}$ est

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0) = \boldsymbol{s}\left(U \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ e^{-t}\boldsymbol{\phi}^0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\theta}\right). \tag{3.105}$$

Le système réduit est alors

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{s}\left(U \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ e^{-t}\boldsymbol{\phi}^0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\theta}\right) \tag{3.106}$$

et est un système autonome dans le cas particulier où $\boldsymbol{\phi}^0 = \boldsymbol{0}$.

Exemple 73 (Michaelis-Menten – Intégration partielle)**.** À l'Ex. 61, nous avons remarqué que les fonctions propres sont indépendantes de la forme de la fonction d'interaction $\boldsymbol{h}$. Comme le changement de variables permettant la réduction dimensionnelle est basé sur ces fonctions propres, il reste également inchangé sous modification de $\boldsymbol{h}$. Pour illustrer cette propriété, considérons une fois de plus la dynamique de régulation génétique de Michaelis-Menten de la forme

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \frac{x_j^{a_j}}{1 + x_j^{a_j}}, \tag{3.107}$$

où $a_j \in \{1, \dots, 4\}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Outre la substitution de la fonction d'activation sigmoïdale $\boldsymbol{s}$ par

$$h_j^{\mathrm{MM}}(x_j) = \frac{x_j^{a_j}}{1 + x_j^{a_j}}, \qquad j \in \{1, \dots, N\}, \tag{3.108}$$

ce système est de la même forme que la dynamique RNN de l'exemple précédent dans le cas $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$. On en déduit donc que le système possède les mêmes fonctions propres et que le même changement de variables, soit $\boldsymbol{y} = U^\top \boldsymbol{x}$, permet la réduction. Dans ce cas, la nouvelle fonction d'interaction est

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0) = \boldsymbol{h}^{\mathrm{MM}}\left(U \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ e^{-t}\boldsymbol{\phi}^0 \end{bmatrix}\right) \tag{3.109}$$

et les équations réduites sont

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{h}^{\mathrm{MM}} \left(U \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y} \\ e^{-t}\boldsymbol{\phi}^0 \end{bmatrix} \right) . \tag{3.110}$$

Une modification de la fonction d'interaction $\boldsymbol{h}$ préserve donc les fonctions propres et la réduction, mais modifie la fonction $\boldsymbol{H}$ du système réduit.

Exemple 74. En guise de dernier exemple, reprenons le système où $g_i(x_i) = x_i^m$ avec $m \in \mathbb{R}$. Commençons par effectuer la réduction pour le cas particulier $m = 1$. Selon l'Ex. 62, un tel système est de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \odot (-\ln(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c} + W\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) \tag{3.111}$$

et les fonctions propres du GOK sont

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\ln(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}) , \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\} , \tag{3.112}$$

où ln désigne le logarithme par élément. Le changement de variables

$$\boldsymbol{y} = U^\top (\ln(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}) \tag{3.113}$$

permet donc de réduire le système à

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma V^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) , \tag{3.114}$$

où la fonction $\boldsymbol{H}$ est de la forme générale définie au Cor. 71. Dans le cas $m \neq 1$, on a plutôt une dynamique de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{1-m}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\odot m} \odot (-\boldsymbol{c} + W\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) , \tag{3.115}$$

où $[\boldsymbol{x}^{\odot m}]_i = x_i^m$, avec les fonctions propres

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top \left(\frac{\boldsymbol{x}^{\odot(1-m)}}{1-m} + \boldsymbol{c} \right) , \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\} . \tag{3.116}$$

Le changement de variables approprié pour l'intégration partielle est donc

$$\boldsymbol{y} = U^\top \left(\frac{\boldsymbol{x}^{\odot(1-m)}}{1-m} + \boldsymbol{c} \right) , \tag{3.117}$$

et les équations réduites sont

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = -\boldsymbol{Y} + \Sigma V^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) . \tag{3.118}$$

On remarque immédiatement que les équations réduites sont les mêmes que dans le cas $m = 1$. Ce résultat est attendu, car les équations réduites sont indépendantes de la forme des fonctions propres et du changement de variable : leur forme dépend plutôt exclusivement de la fonction d'interaction $\boldsymbol{h}$. Cette fonction étant identique dans les deux cas traités ici, les équations réduites sont identiques.

3.3.2 Réduction dimensionnelle pour la seconde famille

La réduction dimensionnelle d'un système de la famille 2 peut être effectuée en suivant la même démarche que pour la famille 1. Commençons donc encore par définir $N - r$ nouvelles variables correspondant aux fonction propres du GOK, soit

$$y_\ell = \exp\left((\boldsymbol{u}^\ell)^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\right), \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\}. \tag{3.119}$$

En complétant la transformation avec r variables de la même forme, mais pour $\ell \in \{1, \dots, r\}$, on obtient le changement de variables complet

$$\boldsymbol{y} = \exp\left(U^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\right), \tag{3.120}$$

où exp désigne ici l'exponentielle de chaque élément. L'indépendance des nouvelles variables $\boldsymbol{y}$ est aisément démontrée en reproduisant la démarche de la preuve du Thm. 65. De plus, selon la définition de la famille 2, l'ensemble $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ sur lequel est défini le système dynamique est tel que les variables $\boldsymbol{y}$ sont toutes non nulles. L'équivalent du Cor. 71 peut maintenant être formulé pour la famille 2.

Corollaire 75. *Soit un système dynamique appartenant à la famille 2. Si la fonction inverse $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ de $\boldsymbol{\eta}$ existe et est de classe $\mathcal{C}^1$, alors le système dynamique se réduit à un système de dimension r, soit*[4]

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} \odot \left(-U_r^\top \boldsymbol{c} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right)\right) \tag{3.121}$$

avec les variables réduites $\boldsymbol{Y} = \exp\left(U_r^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\right)$, les constantes $\boldsymbol{\phi}^0 = \exp\left(U_\perp^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(0))\right)$ et

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}\left(U \begin{bmatrix} \ln(\boldsymbol{Y}) \\ \ln(\boldsymbol{\phi}^0) - t\, U_\perp^\top \boldsymbol{c} \end{bmatrix}\right), \tag{3.122}$$

où exp *et* ln *désignent l'exponentielle et le logarithme de chaque élément et $U_\perp$ est la matrice de taille $N \times (N-r)$ des $N - r$ derniers vecteurs singuliers gauches de W.*

Démonstration. Tout au long de la preuve, exp et ln désignent respectivement l'exponentielle et le logarithme par élément. Selon le changement de variable $\boldsymbol{y} = \exp\left(U^\top \boldsymbol{\eta}\right)$ présenté plus haut, la dynamique en $\boldsymbol{y}$ d'un système appartenant à la famille 2 est donnée par

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} \odot U^\top \left(\dot{\boldsymbol{x}} \odot \boldsymbol{g}^{\odot -1}\right) = \boldsymbol{y} \odot U^\top \left(-\boldsymbol{c} + W \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\right). \tag{3.123}$$

Par la décomposition en valeurs singulières $W = U\Sigma V^\top$ et l'orthogonalité de la matrice U, ce système équivaut à

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} \odot \left(-U^\top \boldsymbol{c} + \Sigma V^\top \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\right). \tag{3.124}$$

4. La dépendance en t de $\boldsymbol{Y}(t)$ est encore omise ici pour alléger la notation.

Si $\boldsymbol{\eta}$ possède une fonction inverse $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe un changement de variables inverse $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^{-1}(U\ln(\boldsymbol{y}))$ permettant de fermer le système en $\boldsymbol{y}$ comme

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} \odot \left(-U^\top \boldsymbol{c} + \Sigma V^\top \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}(U\ln(\boldsymbol{y}))\right). \tag{3.125}$$

Or, comme la matrice de poids W est de rang $r < N$, le deuxième terme est nul pour les $N-r$ dernières variables, c'est-à-dire que

$$\dot{y}_i = -\left[U^\top \boldsymbol{c}\right]_i y_i + \sigma_i y_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji} h_j \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}(U\ln(\boldsymbol{y})), \qquad i \in \{1,\dots,r\}, \tag{3.126a}$$

$$\dot{y}_i = -\left[U^\top \boldsymbol{c}\right]_i y_i, \qquad i \in \{r+1,\dots,N\}. \tag{3.126b}$$

Comme il est attendu, les $N-r$ dernières variables sont des fonctions propres du GOK. La solution de ces équations est $y_i(t) = y(0)e^{-\left[U^\top \boldsymbol{c}\right]_i t}$ pour tout $i \in \{r+1,\dots,N\}$. Par inspection, les variables réduites $\boldsymbol{Y} = \exp\left(U_r^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})\right)$ de l'énoncé sont égales aux r premières variables $\boldsymbol{y}$. En définissant les constantes $\boldsymbol{\phi}^0 = \exp\left(U_\perp^\top \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}(0))\right)$ comme étant égales aux conditions initiales des $N-r$ dernières variables y_i, le système réduit s'exprime comme

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} \odot \left(-U_r^\top \boldsymbol{c} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}\left(U \begin{bmatrix} \ln(\boldsymbol{Y}) \\ \ln\left(\exp\left(-t\, U_\perp^\top \boldsymbol{c}\right) \odot \boldsymbol{\phi}^0\right) \end{bmatrix}\right)\right), \tag{3.127}$$

où $U_\perp$ est la matrice de taille $N \times (N-r)$ de vecteur singuliers gauches de W de valeur singulière nulle. Par les propriétés du logarithme,

$$\ln\left(\exp\left(-t\, U_\perp^\top \boldsymbol{c}\right) \odot \boldsymbol{\phi}^0\right) = \ln(\boldsymbol{\phi}^0) - t\, U_\perp^\top \boldsymbol{c}. \tag{3.128}$$

Selon la forme de la fonction $\boldsymbol{H}$ définie dans l'énoncé, le système de l'Éq. (3.127) est donc équivalent à

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} \odot \left(-U_r^\top \boldsymbol{c} + \Sigma_r V_r^\top \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right)\right), \tag{3.129}$$

ce qui correspond bien à la forme recherchée pour le système réduit. □

Comme pour la famille 1, les fonctions propres reliées au rang de la famille 2 permettent donc la réduction du système de N équations autonomes à un systèmes de r équations généralement non autonomes comportant $N-r$ nouvelles constantes réelles $\boldsymbol{\phi}^0$ correspondant aux conditions initiales des fonctions propres. Dans ce cas, la réduction est autonome si $U_\perp^\top \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ (toutes les fonctions propres sont des intégrales premières). Reprenons certains exemples de la Sec. 3.2.2 afin d'illustrer le processus de réduction dimensionnelle.

Exemple 76 (Modèle SI – Intégration partielle)**.** Soit un système dynamique de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (1 - \boldsymbol{x}) \odot W\boldsymbol{x}. \tag{3.130}$$

Comme vu à l'Ex. 66, cette forme du modèle SI possède les $N-r$ fonctions propres

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N}(1-x_i)^{-u_i^\ell} \tag{3.131}$$

de valeur propre $\lambda_\ell = 0$ pour $\ell \in \{r+1,\dots,N\}$. Dans ce cas, le changement de variables permettant l'intégration partielle est

$$y_i = \prod_{j=1}^{N}(1-x_j)^{-u_j^i}\,, \qquad i \in \{1,\dots,N\}\,, \tag{3.132}$$

ou encore, en notation matricielle,

$$\boldsymbol{y} = \exp\Big(-U^\top \ln(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})\Big)\,, \tag{3.133}$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur dont tous les éléments sont 1. De plus, comme il existe la fonction inverse $\eta_i^{-1}(\xi) = 1-e^{-\xi}$, le changement de variables inverse est

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{1} - \exp(-U\ln(\boldsymbol{y}))\,, \tag{3.134}$$

ou encore

$$x_j = 1 - \prod_{k=1}^{N} y_k^{-U_{jk}}\,, \qquad j \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{3.135}$$

Selon l'Éq. (3.126), la dynamique en $\boldsymbol{y}$ est donc

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \sigma_i y_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji}\left(1-\prod_{k=1}^{N} y_k^{-U_{jk}}\right)\,, && i \in \{1,\dots,r\}\,,\\ \dot{y}_i &= 0\,, && i \in \{r+1,\dots,N\}\,. \end{aligned} \tag{3.136}$$

En effectuant la réduction, la nouvelle fonction d'interaction est

$$H_j(\boldsymbol{Y},t\,;\boldsymbol{\phi}^0) = 1 - \left(\prod_{k=1}^{r} Y_k^{-[U_r]_{jk}}\right)\left(\prod_{k=1}^{N-r}\left(\phi_k^0\right)^{-[U_\perp]_{jk}}\right)\,, \qquad j \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{3.137}$$

Pour simplifier la notation, définissons les constantes non nulles

$$\alpha_j\left(\boldsymbol{\phi}^0\right) = \prod_{k=1}^{N-r}\left(\phi_k^0\right)^{[U_\perp]_{jk}}\,, \qquad j \in \{1,\dots,N\}\,, \tag{3.138}$$

ce qui permet de réécrire la fonction d'interaction comme

$$H_j\left(\boldsymbol{Y},t\,;\boldsymbol{\phi}^0\right) = 1 - \frac{1}{\alpha_j\left(\boldsymbol{\phi}^0\right)}\prod_{k=1}^{r} Y_k^{-[U_r]_{jk}}\,, \qquad j \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{3.139}$$

Les équations réduites (autonomes dans ce cas, car les fonctions propres sont des intégrales premières !) sont

$$\dot{Y}_i = \sigma_i Y_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji}\left(1 - \frac{1}{\alpha_j\left(\boldsymbol{\phi}^0\right)}\prod_{k=1}^{r} Y_k^{-[U_r]_{jk}}\right)\,, \qquad i \in \{1,\dots,r\}\,. \tag{3.140}$$

Cette réduction n'est valide que sur le domaine où les variables réduites Y_i et les constantes $\alpha_j\left(\boldsymbol{\phi}^0\right)$ sont bien définies et non nulles.

La forme des équations réduites permet de tirer certaines conclusions sur le comportement des variables réduites. D'abord, on voit que les composantes du champ vectoriel du système réduit sont pondérées par les valeurs singulières σ_i. Cela implique que, s'il y a une grande différence entre les plus grandes et les plus petites valeurs singulières, les premières variables réduites auront une dynamique plus rapide que les dernières. De plus, les constantes $\alpha_j(\boldsymbol{\phi}^0)$ pondèrent en quelque sorte l'importance de la non linéarité dans les équations. En effet, plus ces constantes sont de grande taille, plus les termes non linéaires du champ vectoriel sont pondérés à la baisse. L'effet de ces observations sur l'évolution des variables du système d'origine est toutefois difficile à prédire de façon générale, car il dépend spécifiquement de la forme des vecteurs singuliers gauches de W.

Exemple 77 (Lotka-Volterra – Intégration partielle)**.** Reprenons le modèle de Lotka-Volterra

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \odot (-\boldsymbol{c} + W\boldsymbol{x}) \,, \qquad i \in \{1, \dots, N\} \,, \tag{3.141}$$

de l'Ex. 67 avec les fonctions propres monomiales

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{u_i^\ell} \,, \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\} \,. \tag{3.142}$$

Le changement de variables approprié est alors

$$y_i = \prod_{j=1}^{N} x_j^{U_{ji}} \,, \qquad i \in \{1, \dots, N\} \,, \tag{3.143}$$

et peut être exprimé en notation matricielle comme $\boldsymbol{y} = \exp\big(U^\top \ln(\boldsymbol{x})\big)$ avec exp et ln désignant l'exponentielle et le logarithme par élément. On calcule aisément le changement de variable inverse $\boldsymbol{x} = \exp(U \ln(\boldsymbol{y}))$, qui peut être réexprimé comme

$$x_i = \prod_{j=1}^{N} y_j^{U_{ij}} \,, \qquad i \in \{1, \dots, N\} \,. \tag{3.144}$$

En explicitant le produit matriciel dans la fonction $\boldsymbol{H}$ du Cor. 75 et en rappelant que U_r et $U_\perp$ correspondent respectivement aux r premières et $N-r$ dernières colonnes de U, la fonction d'interaction du système réduit s'écrit comme

$$H_j\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{r} [U_r]_{jk} \ln(Y_k) + \sum_{k=1}^{N-r} [U_\perp]_{jk} \ln\big(\phi_k^0\big) - t \sum_{k=1}^{N-r} [U_\perp]_{jk} \left[U_\perp^\top \boldsymbol{c}\right]_k\right)$$

pour $j \in \{1, \dots, N\}$. Par les propriétés du logarithme,

$$H_j\left(\boldsymbol{Y}, t\,; \boldsymbol{\phi}^0\right) = \left(\prod_{k=1}^{r} Y_k^{[U_r]_{jk}}\right) \left(\prod_{k=1}^{N-r} \left(\phi_k^0\right)^{[U_\perp]_{jk}}\right) e^{-t\left[U_\perp U_\perp^\top \boldsymbol{c}\right]_j} \tag{3.145}$$

pour $j \in \{1, \dots, N\}$. On remarque alors que le facteur du centre correspond à la constante non nulle $\alpha_j(\boldsymbol{\phi}^0)$ définie à l'Éq. (3.138) de l'exemple précédent, ce qui permet de simplifier l'expression en

$$H_j\left(\boldsymbol{Y}, t; \boldsymbol{\phi}^0\right) = e^{-t\left[U_\perp U_\perp^\top \boldsymbol{c}\right]_j} \alpha_j(\boldsymbol{\phi}^0) \prod_{k=1}^{r} Y_k^{[U_r]_{jk}}, \qquad j \in \{1, \dots, N\}. \tag{3.146}$$

On peut donc écrire le système réduit comme

$$\dot{Y}_i = Y_i \left(-[U_r^\top \boldsymbol{c}]_i + \sigma_i \sum_{j=1}^{N} V_{ji}\, e^{-t\left[U_\perp U_\perp^\top \boldsymbol{c}\right]_j} \alpha_j(\boldsymbol{\phi}^0) \prod_{k=1}^{r} Y_k^{[U_r]_{jk}} \right) \tag{3.147}$$

pour $i \in \{1, \dots, r\}$.

3.4 Effet du rang sur la dynamique

Pour les cas particuliers des RNN (famille 1) et du modèle de Lotka-Volterra (famille 2), étudions plus en détail l'effet du rang sur la dynamique à travers les fonctions propres du GOK et la réduction dimensionnelle associée.

3.4.1 Sous-espaces invariants chez les RNN

L'Ex. 60, puis l'Ex. 72 nous informent que les RNN de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{x} + W \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta}, \qquad \operatorname{rang}(W) = r < N, \tag{3.148}$$

font partie de la famille 1 et possèdent les fonctions propres affines

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta}), \quad \ell \in \{r+1, \dots, N\}, \tag{3.149}$$

de valeur propre -1. Notons que pour ces systèmes, les fonctions propres sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^N$, donc l'espace des états peut être défini comme $\mathcal{X} = \mathbb{R}^N$.

Selon le Lem. 26, le noyau de chaque fonction propre est un sous-ensemble invariant. Les $N - r$ sous-espaces affines [5]

$$\mathcal{Z}_\ell^0 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, (\boldsymbol{u}^\ell)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta}) = 0 \right\}, \quad \ell \in \{r+1, \dots, N\}, \tag{3.150}$$

de dimension $N - 1$ sont donc laissés invariants par le flot. De plus, l'intersection entre deux sous-ensembles invariants étant toujours invariante [101], les intersections entre les différents

5. Les noyaux des fonctions propres affines ne sont pas des sous-espaces vectoriels en général, car ils forment des hyperplans qui ne passent pas par l'origine. Si $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, alors les fonctions propres sont linéaires et leurs noyaux sont des sous-espaces vectoriels.

$\mathcal{Z}_\ell^0$ sont des sous-espaces affines invariants de plus faible dimension. On sait également que tous ces sous-espaces affines (les noyaux des fonctions propres ainsi que leurs intersections) sont globalement attractifs, car la valeur propre -1 de toutes les fonctions propres associées à ces sous-espaces prescrit une convergence en e^{-t}.

Dans le cas où $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$, l'intersection des noyaux de toutes les fonctions propres, soit

$$\mathcal{Z}^0 = \bigcap_{\ell=r+1}^{N} \mathcal{Z}_\ell^0 \,, \tag{3.151}$$

forme un sous-espace invariant de dimension r. Puisque toute trajectoire converge vers $\mathcal{Z}^0$, tout attracteur du système doit faire partie de $\mathcal{Z}^0$. De plus, les fonctions propres du GOK définissent des ensembles analogues aux isostables (voir Sec. 1.5), mais associés à l'ensemble invariant attractif $\mathcal{Z}^0$ au lieu d'un point d'équilibre stable ou d'un attracteur. En effet, chaque courbe de niveau de $|\phi_\ell|$ définit un ensemble de points dans l'espace des états possédant la même convergence asymptotique vers $\mathcal{Z}^0$. Par exemple, pour quatre valeurs réelles positives τ_1, τ_2, C_1 et C_2, supposons qu'il existe une trajectoire $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ et une fonction propre ϕ_ℓ telle que

$$|\phi_\ell(\tilde{\boldsymbol{x}}(\tau_1))| = C_1 \,, \qquad |\phi_\ell(\tilde{\boldsymbol{x}}(\tau_2))| = C_2 \,. \tag{3.152}$$

Alors, $|\phi_\ell(\boldsymbol{x}(\tau_2))| = C_2$ pour une trajectoire quelconque $\boldsymbol{x}(t)$ si et seulement si $|\phi_\ell(\boldsymbol{x})(\tau_1))| = C_1$. Cette relation peut être exprimée comme

$$\boldsymbol{\psi}_{\tau_2-\tau_1}\left(\mathcal{Z}^{C_1}\right) = \mathcal{Z}^{C_2} \,, \tag{3.153}$$

où $\boldsymbol{\psi}$ est le flot de la dynamique. Illustrons à l'aide d'un exemple.

Exemple 78 (RNN avec une fonction propre linéaire)**.** Soit un RNN de la forme de l'Éq. (3.148) avec la matrice de poids

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

et avec $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$. Ce système possède la fonction propre linéaire

$$\phi_3(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + x_2 + x_3 \tag{3.155}$$

de valeur propre $\lambda_3 = -1$. On sait que le noyau de cette fonction propre, soit le plan

$$\mathcal{Z}^0 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\} \,, \tag{3.156}$$

est un sous-espace invariant globalement attractif et que l'activité $\boldsymbol{x}(t)$ converge vers ce sous-espace en $\sim e^{-t}$. De plus, les courbes de niveau de $|\phi_3|$, soit les plans

$$\mathcal{Z}^C = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, |3x_1 + x_2 + x_3| = C\right\} \,, \qquad C \in \mathbb{R} \,, \tag{3.157}$$

sont les quantités analogues aux isostables mentionnées ci-haut, c'est-à-dire que toutes les trajectoires qui font partie d'une même courbe de niveau pour un certain temps $t = \tau$ font partie de la même courbe de niveau pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $\boldsymbol{y} = U^\top \boldsymbol{x}$ utilisé lors de la réduction dimensionnelle, le sous-espace invariant globalement attractif $\mathcal{Z}^0$ est simplement défini par $y_3 = 0$. La convergence du système vers le sous-espace invariant est illustrée à la Fig. 3.1.

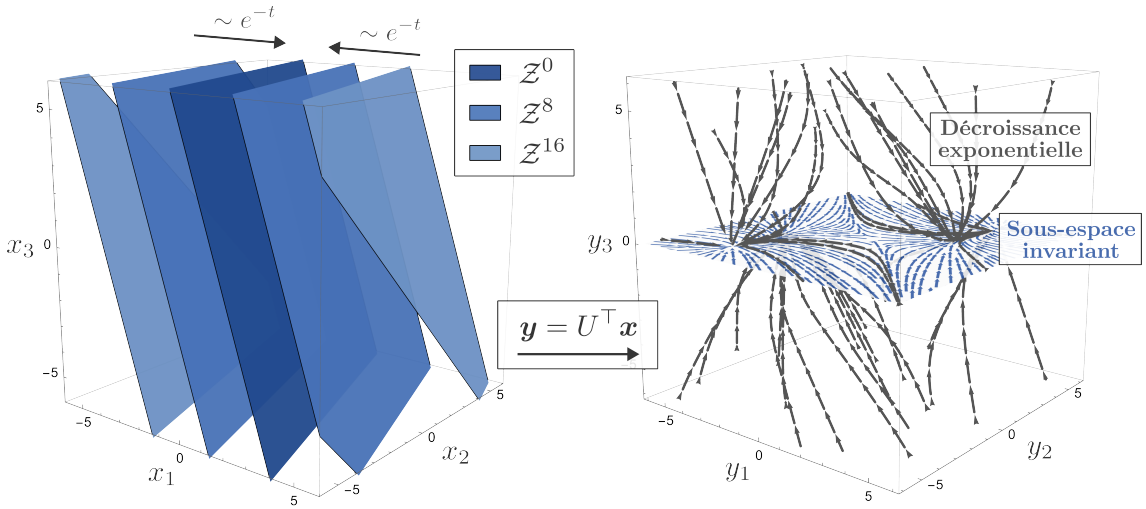


FIGURE 3.1 – RNN avec une fonction propre linéaire. Gauche : Les courbes de niveau $\mathcal{Z}^C$ de l'Éq. (3.157), montrées ici pour $C = 8$ et $C = 16$, sont des quantités analogues aux isostables pour le sous-espace invariant attractif $\mathcal{Z}^0$. Droite : Champ vectoriel de la dynamique en $\boldsymbol{y}$. Sous le changement de variables $\boldsymbol{y} = U^\top \boldsymbol{x}$, le sous-espace invariant est défini par $y_3 = 0$. Les trajectoires convergent vers ce sous-espace en $\sim \exp(-t)$.

Pour les dynamiques de RNN de la forme de l'Éq. (3.148), une matrice de poids de rang r implique donc forcément une convergence exponentielle vers un sous-espace affine de dimension maximale r. Ce comportement est déjà connu numériquement et a déjà été expliqué entre autres par approche en champ moyen (*mean-field*) [60].

Les fonctions propres du GOK reliées aux rang et les sous-espaces affines invariants permettent également de clarifier la relation entre les deux types de dynamique de RNN présentés à la Sec. 2.3, soit d'un côté la forme

$$\dot{\boldsymbol{z}} = -\boldsymbol{z} + \boldsymbol{s}\left(W\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\theta}\right) , \tag{3.158}$$

où la matrice W apparaît dans l'argument de la fonction sigmoïdale, et de l'autre côté la forme de l'Éq. (3.148), où la matrice W est devant la fonction sigmoïdale. D'abord, remarquons qu'il est possible de passer du système de l'Éq. (3.158) à celui de l'Éq. (3.148) par la transformation $\boldsymbol{x} = W\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\theta}$, mais que cette transformation n'est pas inversible quand W n'est pas de plein

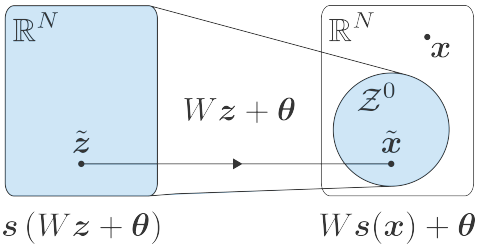


FIGURE 3.2 – Relation entre les deux formes de dynamiques de RNN. La partie de gauche représente le système de l'Éq.(3.158), tandis que la partie de droite représente le système de l'Éq. (3.148). La transformation affine $W\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\theta}$ envoie l'entièreté du système de gauche vers le sous-ensemble $\mathcal{Z}^0$ dans le système de droite. Tout $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{Z}^0$ ne possède donc pas d'équivalent dans le système de gauche.

rang. Toute solution du système de l'Éq. (3.158) est donc associée à une solution du système de l'Éq. (3.148), mais certaines solutions du système de l'Éq. (3.148) n'ont pas d'équivalent dans celui de l'Éq. (3.158).

Plus particulièrement, toute solution du système de l'Éq. (3.148) qui possède une solution équivalente dans le système de l'autre forme doit faire partie de l'intersection $\mathcal{Z}^0$. Pour démontrer cette propriété, considérons une solution $\tilde{\boldsymbol{x}}$ telle qu'il existe une solution $\tilde{\boldsymbol{z}}$ satisfaisant $\tilde{\boldsymbol{x}} = W\tilde{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\theta}$. Pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$, les fonctions propre du GOK évaluées le long de la solution $\tilde{\boldsymbol{x}}$ sont de la forme

$$\phi_\ell(\tilde{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top(\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{u}^\ell)^\top W\tilde{\boldsymbol{z}} = 0\,, \tag{3.159}$$

où la dernière égalité est causée par $(\boldsymbol{u}^\ell)^\top W = \boldsymbol{0}$. Toute solution $\tilde{\boldsymbol{x}}$ telle que $\tilde{\boldsymbol{z}}$ existe doit donc faire partie du noyau des $N-r$ fonctions propres. Cette propriété est illustrée à la Fig. 3.2.

3.4.2 Stabilité des écosystèmes chez Lotka-Volterra

Comme vu à l'Ex. 67 et à l'Ex. 77, le modèle de Lotka-Volterra décrit par

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \odot (-\boldsymbol{c} + W\boldsymbol{x}) \tag{3.160}$$

et défini sur $x_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ possède les $N-r$ fonctions propres monomiales du GOK

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{u_i^\ell}\,, \qquad \ell \in \{r+1, \dots, N\}\,, \tag{3.161}$$

de valeur propre $\lambda_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$. Le lien entre la stabilité des écosystèmes, c'est-à-dire la propriété que les populations restent non nulles et bornées dans le temps, et le rang de la matrice de poids a déjà été présenté à la Sec. 2.6.2. En particulier, rappelons que tout point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ du modèle de Lotka-Volterra tel que toutes les populations sont bornées et non nulles doit satisfaire le système linéaire

$$W\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}\,. \tag{3.162}$$

D'abord, pour toute matrice W de rang $r < N$, ce système ne possède pas de solution unique. Il possède une infinité de solutions si $\boldsymbol{c} \in \text{span}\{\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r\}$ et aucune solution si ce n'est pas le cas. On en déduit donc que la possibilité d'un écosystème stable avec une matrice W de rang r n'existe que si $\boldsymbol{c} \in \text{span}\{\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r\}$.

Or, ce résultat peut aisément être obtenu à partir des fonctions propres du GOK. D'abord, rappelons que toute fonction propre de valeur propre réelle non nulle tend vers 0 ou $\pm\infty$ dans la limite $t \to \infty$. Comme le modèle de Lotka-Volterra admet des fonctions propres monomiales, le fait qu'une fonction propre tombe à 0 ou explose à l'infini implique forcément qu'au moins une population n'est pas non nulle et bornée. Une condition nécessaire à la stabilité d'un écosystème chez Lotka-Volterra est donc que les valeurs propres des $N - r$ fonctions propres indépendantes soient toutes nulles. Les valeurs propres étant $\lambda_\ell = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{u}^\ell$, la condition que $\lambda_\ell = 0$ pour tout $\ell \in \{r+1, \dots, N\}$ équivaut à $\boldsymbol{c} \in \text{span}\{\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^r\}$, car $\boldsymbol{c}$ doit être orthogonal à tous les vecteurs singuliers gauches de W de valeur singulière nulle. Réinterprétons maintenant l'exemple de dynamique de Lotka-Volterra de faible rang effectué à la Sec. 2.6.2.

Exemple 79 (Espèces se disputant encore la même nourriture)**.** Revisitons l'Ex. 49 dans le contexte des fonctions propres du GOK. Soit donc un système à N espèces compétitionnant pour une ressource. La consommation de cette ressource est donnée par la fonction linéaire

$$\gamma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{x} \tag{3.163}$$

avec $\gamma_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. On suppose que les équations de la dynamique sont de la forme

$$\dot{x}_i = -c_i x_i - \alpha_i x_i \gamma(\boldsymbol{x}) \tag{3.164}$$

pour des constantes $c_i < 0$ et $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Ce système équivaut à une dynamique de la forme de l'Éq. (3.160) pour la matrice de poids $W = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma}^\top$. Comme cette matrice est de rang 1, un tel système possède les $N - 1$ fonctions propres

$$\phi_\ell(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{u_j^\ell}, \qquad \ell \in \{2, \dots, N\}, \tag{3.165}$$

où on remarque que le vecteur singulier gauche de valeur singulière non nulle de W est $\boldsymbol{u}^1 = \boldsymbol{\alpha}$. Soit maintenant les $N - 1$ vecteurs $\boldsymbol{w}^k \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$w_i^k = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_k} & i = k \\ -\frac{1}{\alpha_{k+1}} & i = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.166}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et $k \in \{1, \dots, N-1\}$. En vérifiant aisément que $\boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{w}^k = 0$, on en déduit que $\boldsymbol{w}^k \in \text{span}\{\boldsymbol{u}^2, \dots, \boldsymbol{u}^N\}$ pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$. Cette propriété

implique qu'il existe $N-1$ vecteur $\boldsymbol{m}^k \in \mathbb{R}^{N-1}$ tels que

$$\boldsymbol{w}^k = U_\perp \boldsymbol{m}^k\,, \qquad k \in \{1,\dots,N-1\}\,. \tag{3.167}$$

Par le Lem. 29, on peut donc créer les $N-1$ nouvelles fonctions propres monomiales

$$\tilde{\phi}_k = \prod_{\rho=1}^{N-1} \phi_{\rho+1}^{m_\rho^k} = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\left[U_\perp \boldsymbol{m}^k\right]_i} = \prod_{i=1}^{N} x_i^{w_i^k} \tag{3.168}$$

de valeur propre $\tilde{\lambda}_k = -(\boldsymbol{m}^k)^\top U_\perp^\top \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{w}^k$ pour tout $k \in \{1,\dots,N-1\}$. Selon la forme de $\boldsymbol{w}^k$ donnée à l'Éq. (3.166), les nouvelles fonctions propres sont

$$\tilde{\phi}_k = \frac{x_k^{1/\alpha_k}}{x_{k+1}^{1/\alpha_{k+1}}}\,, \qquad k \in \{1,\dots,N-1\}\,. \tag{3.169}$$

De plus, sous l'hypothèse (effectuée dans l'Ex. 49 également) que

$$-\frac{c_1}{\alpha_1} > -\frac{c_2}{\alpha_2} > \ldots > -\frac{c_N}{\alpha_N} > 0\,, \tag{3.170}$$

alors les valeurs propres

$$\tilde{\lambda}_k = -\frac{c_k}{\alpha_k} + \frac{c_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\,, \qquad k \in \{1,\dots,N-1\}\,, \tag{3.171}$$

sont toutes strictement positives. On retrouve alors les intégrales secondes de l'Ex. 49, soit

$$\frac{x_k^{1/\alpha_k}}{x_{k+1}^{1/\alpha_{k+1}}} = C_k e^{\left(-\frac{c_k}{\alpha_k}+\frac{c_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\right)t}\,, \qquad k \in \{1,\dots,N-1\}\,, \tag{3.172}$$

où C_k est une constante réelle non nulle correspondant à la condition initiale de la fonction propre $\tilde{\phi}_k$. Puisque les valeurs propres sont toujours strictement positives, on sait que les fonctions propres tendent vers l'infini dans la limite $t \to \infty$. Sous l'hypothèse que les populations sont bornées, cela implique que toutes les populations doivent tomber à 0, sauf possiblement x_1. Nous avons donc bel et bien retrouvé le résultat de l'Ex. 49 à partir des fonctions propres du GOK.

En créant de nouvelles fonctions propres par un procédé similaire à celui dans l'exemple ci-haut, il est toujours possible de combiner q fonctions propres monomiales de valeurs propres réelles non nulles pour obtenir $q-1$ *intégrales premières* monomiales[6]. Pour illustrer cette propriété, considérons une dynamique de Lotka-Volterra avec les $N-r$ fonctions propres de l'Éq. (3.161) et supposons que les valeurs propres associées sont toutes non nulles. Par la

6. Comme vu entre autres dans l'Ann. A, cette propriété est fondamentale pour calculer des constantes du mouvement sous forme de monômes dans le modèle de Kuramoto.

démarche de l'Ex. 79, toute fonction propre monomiale de la forme

$$\tilde{\phi} = \prod_{j=1}^{N-r} \phi_{j+r}^{m_j} = \prod_{i=1}^{N} x_i^{[U_\perp \boldsymbol{m}]_i} \tag{3.173}$$

pour un vecteur $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^{N-r}$ quelconque possède la valeur propre $\tilde{\lambda} = -\boldsymbol{m}^\top U_\perp^\top \boldsymbol{c}$. L'observable $\tilde{\phi}$ est alors une intégrale première si et seulement si $\boldsymbol{m}$ et $U_\perp^\top \boldsymbol{c}$ sont orthogonaux. Comme ce sont des vecteurs de longueur $N-r$, il existe $N-r-1$ vecteurs orthogonaux à $U_\perp^\top \boldsymbol{c}$, ce qui implique $N-r-1$ intégrales premières monomiales.

Comme nous l'avons fait dans la section précédente pour les RNN, considérons un exemple simple de Lotka-Volterra à 3 populations pour illustrer le rôle des courbes de niveaux des fonctions propres.

Exemple 80. Soit un système dynamique de la forme de l'Éq. (3.160) pour lequel

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{3.174}$$

Remarquons d'abord que W respecte ici l'hypothèse des équivalents abordée dans l'Ex. 44. Nous avons vu dans cet exemple que tout système comptant un nombre de populations N impair et respectant l'hypothèse des équivalents possède une matrice de poids W de déterminant nul, c'est-à-dire que W ne peut pas être de plein rang. Dans le cas présent, W est plus spécifiquement de rang 2 et le GOK possède la fonction propre [7]

$$\phi_3(\boldsymbol{x}) = x_1^3 x_3 \tag{3.175}$$

de valeur propre $\lambda_3 = -5$. Puisque la valeur propre est négative, $\lim_{t\to\infty} \phi_3(\boldsymbol{x}(t)) = 0$, ce qui implique que $x_1(t)$ ou $x_3(t)$ tombe à zéro dans la limite $t \to \infty$. Comme montré à la Fig. 3.3, les trajectoires tracées convergent dans ce cas-ci vers le sous-espace défini par $x_1 = 0$. Sur le sous-espace $x_1 = 0$, le système d'équations devient simplement

$$\dot{x}_1 = 0\,, \tag{3.176}$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-1 + 2x_3)\,, \tag{3.177}$$

$$\dot{x}_3 = x_3(1 - 3x_2)\,, \tag{3.178}$$

ce qui correspond à une dynamique de Lotka-Volterra à 2 populations (x_2 et x_3). Les cycles limites générant des oscillations soutenues des populations peuvent être observées dans le champ vectoriel tracé à la Fig. 3.3.

Comme pour les RNN, la convergence asymptotique des trajectoires vers $x_1 = 0$ ou $x_3 = 0$ est caractérisée par les ensembles de niveau de $|\phi_3|$, c'est-à-dire les ensembles

$$\mathcal{Z}^C = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \,|\, |x_1^3 x_3 = C| \right\} \tag{3.179}$$

pour $C > 0$. De façon analogue aux isostables, ces ensembles caractérisent la convergence asymptotique en $\sim e^{-5t}$ des trajectoires vers l'ensemble attractif comprenant tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ tel que $x_1 = 0$ ou $x_3 = 0$. Ces ensembles de niveau sont illustrés à la Fig. 3.3.

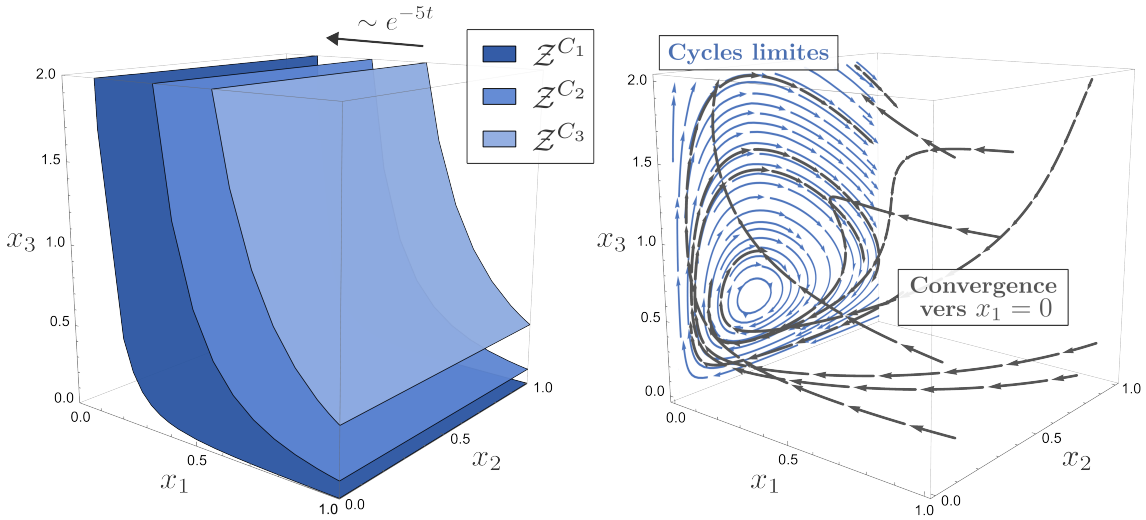


FIGURE 3.3 – Lotka-Volterra avec une fonction propre monomiale. Gauche : Les ensembles de niveau de $|\phi_3|$ pour $C_1 = 0.005$, $C_2 = 0.1$ et $C_3 = 0.4$ montrent la convergence vers $x_1 = 0$ ou $x_3 = 0$. Droite : Numériquement, les trajectoires montrent une convergence vers $x_1 = 0$. Sur ce sous-espace, on observe les cycles limites du système de Lotka-Volterra à deux populations défini par x_2 et x_3.

Concluons le mémoire en révisant les objectifs du projet de recherche et en considérant certaines avenues possibles pour des projets subséquents.

7. Pour alléger la notation, nous avons considéré ici une puissance de la fonction propre définie par $\boldsymbol{u}^3$ telle que les exposants des variables dynamiques sont entiers. Cette opération permet également d'avoir une valeur propre entière.

Conclusion

Qu'on parle d'un renard dans un écosystème, d'un neurone dans un cerveau ou d'un individu au sein d'une communauté, la recherche de relations entre la dynamique individuelle et collective des systèmes complexes est un défi scientifique majeur. L'idée fondamentale de ce mémoire est d'apporter une nouvelle perspective à cette entreprise en y introduisant la théorie de Koopman, un cadre alternatif d'analyse des systèmes dynamiques en plein essor qui s'intéresse à l'évolution *d'observables* du système dynamique, c'est-à-dire des fonctions qui mesurent une quantité dépendante de l'état du système, plutôt que l'évolution des variables dynamiques elles-mêmes. En ce sens, le but du mémoire était d'appliquer la théorie de Koopman aux systèmes complexes afin de caractériser la relation entre la structure de ces systèmes, c'est-à-dire le graphe sous-jacent encodant les patrons d'interaction, et leur comportement à grande échelle. Pour ce faire, le premier objectif était de calculer des fonctions propres de l'opérateur de Koopman reliant certaines propriétés structurelles à la dynamique macroscopique. Le second objectif était ensuite d'utiliser ces fonctions propres pour définir une méthode de réduction dimensionnelle *non linéaire*, contrairement aux nombreuses méthodes utilisant des observables linéaires pour réduire les systèmes complexes. Finalement, en raison de l'importance de cette propriété dans les modèles de réseaux aléatoires et les réseaux observés empiriquement, le rang de la matrice de poids a été choisi comme propriété structurelle d'intérêt dans ce projet.

À travers le Chap. 1, nous avons présenté les différents concepts de théorie de Koopman pertinents pour le projet, particulièrement en ce qui a trait aux approches analytiques pour les systèmes dynamiques continus dont le champ vectoriel est connu. Dans le Chap. 2, nous nous sommes ensuite tournés vers la théorie des systèmes complexes en accordant une attention particulière à la dynamique et au rang de la matrice de poids. Finalement, avec les concepts préliminaires des deux premiers chapitres bien en main, nous avons présenté au Chap. 3 le projet de recherche constituant la contribution originale principale de ce mémoire, soit l'étude des systèmes complexes de faible rang par la théorie de Koopman. Dans ce projet, nous avons d'abord établi à l'aide d'hypothèses simplificatrices une méthode de calcul simultané de fonctions propres du générateur de l'opérateur de Koopman reliées au rang et de restrictions appropriées sur le champ vectoriel de la dynamique. Nous avons utilisé cette méthode afin d'identifier deux familles générales de dynamiques de systèmes complexes où chaque déficience en rang implique une fonction propre du GOK exacte et possédant une forme fermée. Pour ces

deux familles, nous avons utilisé les fonctions propres pour définir une méthode de réduction dimensionnelle non linéaire. Finalement, nous avons étudié l'effet du rang par les fonctions propres pour deux modèles dynamiques particuliers couramment utilisés, soit les réseaux de neurones récurrents (famille 1) et le modèle de Lotka-Volterra (famille 2), ce qui a permis notamment de réinterpréter par la théorie de Koopman des phénomènes macroscopiques dont la relation avec le rang était déjà connue.

Pris ensemble, ces résultats indiquent que les objectifs du mémoire ont été atteints en partie. D'abord, nous avons calculé des fonctions propres du GOK pour des dynamiques de systèmes complexes pour deux familles de dynamiques. Ces fonctions propres relient bien une propriété structurelle, le rang, au comportement macroscopique des systèmes. Par la suite, nous avons construit une méthode de réduction dimensionnelle à partir de ces fonctions propres, ce qui permet la réduction de systèmes N-dimensionnels à r équations non autonomes pour une matrice de poids de rang r. Ces familles de systèmes dits *réductibles en rang* s'ajoutent donc à ceux découverts par Thibeault et al. [102] en tant que systèmes pour lesquels un faible rang implique une dynamique de faible dimension. Finalement, nous avons utilisé la théorie de Koopman pour caractériser plus en détail l'effet du rang sur la dynamique dans le cas des RNN et du modèle de Lotka-Volterra. Toutefois, les objectifs n'ont pas été atteints dans leur totalité, pour plusieurs raisons. Premièrement, à cause de la difficulté inhérente aux approches analytiques en théorie de Koopman, nous n'avons pas effectué le calcul de fonctions propres pour des dynamiques de systèmes complexes générales. De plus, les fonctions propres calculées dans ce mémoire permettent de caractériser l'effet du rang, mais ne considèrent pas d'autres propriétés structurelles. Un cadre d'analyse koopmanien plus général des systèmes complexes pourrait révéler d'autres relations entre propriétés structurelles et dynamiques afin de fournir une réponse plus complète au but général du mémoire. Les résultats du Chap. 3, jumelés entre autres avec ceux du projet présenté à l'Ann. A, constituent toutefois des exemples saillants de l'utilité et de la pertinence des approches analytiques en théorie de Koopman des systèmes complexes, et ce, malgré les difficultés propres à ce cadre d'analyse.

Ce travail ouvre sur diverses perspectives de recherche. Une question immédiate est de savoir si les systèmes qui ne font pas partie des deux familles de dynamiques du Chap. 3 sont également réductibles en rang. Répondre à cette question permettrait entre autres de déterminer si les deux familles présentées ici sont le produit d'une difficulté à trouver la réduction appropriée pour les autres systèmes, ou si elles représentent plutôt un début de classification des systèmes pour lesquels le rang est relié à la dimension de la dynamique. Cette avenue nécessite toutefois une réflexion approfondie sur le concept de réductibilité des systèmes dynamiques, car il est subtil de démontrer qu'un système n'est *pas* réductible, particulièrement dans le cas où les systèmes réduits non autonomes sont admissibles. Une autre extension possible des travaux présentés dans ce mémoire est l'inclusion de dynamiques avec *plasticité*, c'est-à-dire des systèmes complexes modélisés par un système dynamique où les éléments de la matrice

de poids $W(t)$ sont des variables dynamiques qui évoluent dans le temps. Cette extension est particulièrement intéressante entre autres par le fait que les RNN et le modèle de Lotka-Volterra ont tous deux des interprétations phénoménologiques pertinentes pour la plasticité, soit l'apprentissage des systèmes neuronaux et l'évolution des écosystèmes à long terme. Inclure des dynamiques de plasticité inviterait, d'une part, à l'utilisation des fonctions propres du Chap. 3 pour la caractérisation de l'évolution du rang de la matrice de poids et de son effet sur la dynamique, mais également à calculer à partir des variables $W_{ij}(t)$ de toutes nouvelles fonctions propres du GOK caractérisant l'évolution *structurelle* du système. Finalement, le travail présenté dans ce mémoire ouvre la porte à l'étude par la théorie de Koopman de l'effet d'autres propriétés structurelles des systèmes complexes sur la dynamique par l'application d'hypothèses simplificatrices différentes.

Dans le portrait global, ce mémoire constitue un pas modeste mais non négligeable vers une compréhension plus aboutie de l'effet de la structure des systèmes complexes sur les phénomènes émergents, tout en constituant une preuve de concept de l'approche koopmanienne analytique. Il contribue d'une part directement au développement des connaissances en caractérisant l'effet du rang sur le comportement macroscopique pour deux familles de systèmes dynamiques comprenant des modèles répandus de dynamique neuronale et écologique. D'autre part, il présente une méthodologie alternative originale pour l'étude des dynamiques de systèmes complexes. À un niveau plus personnel, il marque le premier pas (et, avec un peu de chance, pas le dernier) de l'auteur en recherche alliant théorie de Koopman et complexité.

Annexe A

Quand Kuramoto rencontre Koopman

Le projet présenté dans cette section a été mené par Vincent Thibeault, étudiant au doctorat, avec contributions de l'auteur du mémoire et des superviseurs Antoine Allard et Patrick Desrosiers. L'article résultant *Kuramoto Meets Koopman : Constants of motion, symmetries, and networks motifs* [103] est disponible sur *arXiv*. La contribution de l'auteur du mémoire au projet a constitué une part importante de sa maîtrise. D'abord, l'auteur du mémoire a contribué à l'obtention et à la vérification de résultats analytiques, puis à la formulation et à la démonstration de certains lemmes et théorèmes. Finalement, il a également contribué à la rédaction du matériel supplémentaire ainsi qu'à l'édition du manuscrit. Les principaux résultats du projet de recherche sont résumés dans cette annexe. Les démonstrations des lemmes et théorèmes sont disponibles dans le matériel supplémentaire de l'article, mais ne sont pas reproduites ici.

D'abord, le système dynamique considéré dans ce projet, appelé modèle de Kuramoto ou modèle de Kuramoto-Sakaguchi, est de la forme

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \sigma \sum_{k=1}^{N} W_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j - \alpha_{jk}) \,, \qquad j \in \{1, \dots, N\} \,, \tag{A.1}$$

où θ_j est la phase de l'oscillateur j, $\omega_j \in \mathbb{R}$ est sa fréquence naturelle, $\sigma \in \mathbb{R}$ est une constante de couplage globale et $-\frac{\pi}{2} < \alpha_{jk} \leq \frac{\pi}{2}$ est élément d'une matrice α qu'on appelle ici la matrice de décalage de phase (*phase lag matrix*). Dans cette annexe, le symbole i dénote le nombre imaginaire, les monômes sont notés $z^{\boldsymbol{\mu}} = z_1^{\mu_1} \dots z_N^{\mu_N}$ et $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$. En effectuant le changement de variables $z_j = e^{i\theta_j}$ et en définissant la matrice complexe

$$A = \frac{1}{2} \left(\sigma W \odot e^{-\alpha} + i \, \mathrm{diag}(\boldsymbol{\omega}) \right) \tag{A.2}$$

avec $[e^{-\alpha}]_{jk} = e^{-\alpha_{jk}}$, la dynamique complexe en $\boldsymbol{z}$ est décrite par

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{N} A_{jk} z_k - \left(\sum_{k=1}^{N} \bar{A}_{jk} \bar{z}_k \right) z_j^2 \,, \qquad j \in \{1, \dots, N\} \,, \tag{A.3}$$

où la barre dénote le complexe conjugué. Sous cette forme, le GOK s'écrit

$$\mathcal{K} = \partial_t + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \left(A_{jk} z_k - \bar{A}_{jk} \bar{z}_k z_j^2\right) \partial_j \,, \tag{A.4}$$

où ∂_t dénote la dérivée partielle par rapport au temps.

Le premier résultat de l'article regroupe les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{K}$ possède une fonction propre monomiale. Il est énoncé par le théorème suivant.

Théorème 81 (Fonctions propres monomiales)**.** *Soit un sous-ensemble non vide $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ tel que $|\alpha_{jk}| < \pi/2$ pour tout $j, k \in \mathcal{W}$. Soit un vecteur $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \dots \ \mu_N)^\top$ tel que $\mu_j \neq 0$ si et seulement si $j \in \mathcal{W}$. Il existe un $\boldsymbol{\mu}$ tel que $z^{\boldsymbol{\mu}}$ est une fonction propre monomiale de $\mathcal{K}$ de l'Éq.* (A.4) *si et seulement si*

1. *$W_{jk} = 0$ pour tout $j \in \mathcal{W}$ et $k \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$;*
2. *$W_{jk} = 0$ si $W_{kj} = 0$ pour tout $j, k \in \mathcal{W}$;*
3. *$W_{i_1 i_2} \dots W_{i_{\eta-1} i_\eta} W_{i_\eta i_1} = W_{i_1 i_\eta} W_{i_\eta i_{\eta-1}} \dots W_{i_2 i_1}$ pour toute séquence $i_1, i_2, \dots, i_\eta \in \mathcal{W}$;*
4. *$\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$ pour tout $j, k \in \mathcal{W}$ avec $j \neq k$ tels que $W_{jk} \neq 0$.*

Si $z^{\boldsymbol{\mu}}$ est une fonction propre de $\mathcal{K}$, la valeur propre associée est $i\boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\omega}$.

S'il existe une fonction propre monomiale, alors ses exposants peuvent être calculés en posant d'abord une valeur non nulle de μ_ℓ pour un $\ell \in \mathcal{W}$, puis en appliquant itérativement la relation $\mu_j = (W_{kj}/W_{jk})\,\mu_k$ jusqu'à ce que tous les éléments non nuls de $\boldsymbol{\mu}$ soient fixés. De plus, s'il existe q fonctions propres monomiales $z^{\boldsymbol{\mu}_1}, \dots, z^{\boldsymbol{\mu}_q}$, il est possible de construire $q-1$ *intégrales premières* monomiales $z^{\boldsymbol{\nu}_1}, \dots, z^{\boldsymbol{\nu}_{q-1}}$. Les exposants sont alors donnés par $(\boldsymbol{\nu}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\nu}_{q-1}) = (\boldsymbol{\mu}_1 \ \dots \ \boldsymbol{\mu}_q)O$, où O est une matrice de taille $q \times (q-1)$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes et orthogonales aux valeurs propres $(i\boldsymbol{\mu}_1^\top \boldsymbol{\omega} \ \dots \ i\boldsymbol{\mu}_q^\top \boldsymbol{\omega})$. Cette méthode de construction d'intégrales premières monomiales est d'ailleurs la même que celle présentée brièvement à la Sec. 3.4.2 pour le modèle de Lotka-Volterra.

Le deuxième résultat principal de l'article concerne les intégrales premières du modèle de Kuramoto sous forme de birapports (*cross-ratio*). Le birapport de quatre points distincts $z_a, z_b, z_c, z_d \in \mathbb{C}$ est défini comme

$$c_{abcd}(\boldsymbol{z}) = \frac{(z_c - z_a)(z_d - z_b)}{(z_c - z_b)(z_d - z_a)} \,. \tag{A.5}$$

Dans le contexte du modèle de Kuramoto, les birapports sont particulièrement intéressants entre autres par leur invariance sous transformation de Möbius, car cette propriété permet de les relier à des intégrales premières découvertes par Watanabe et Strogatz en 1994 dans le cas d'oscillateurs identiques[1] [59, 113, 114]. Depuis, des intégrales premières sous forme

1. Par *oscillateurs identiques*, on entend ici un système où tous les oscillateurs ont la même fréquence naturelle et dont la structure est un graphe simple complet.

de birapports ont été observées dans d'autres cas que les oscillateurs identiques [82, 108], mais les conditions *générales* pour la présence de birapports conservés restaient inconnues. Le deuxième résultat principal de l'article, énoncé dans le théorème suivant, exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour la conservation des birapports dans le modèle de Kuramoto.

Théorème 82 (Conservation des birapports)**.** *Le birapport c_{abcd} est une intégrale première du modèle de Kuramoto de l'Eq.* (A.1) *si et seulement si les sommets a, b, c et d du graphe décrit par la matrice complexe de l'Éq.* (A.2) *ont les mêmes*

1. *arcs vers $\{a, b, c, d\}$, c.-à-d. que*

$$A_{ba} = A_{ca} = A_{da} =: \mathcal{A}_a\,, \qquad A_{ac} = A_{bc} = A_{dc} =: \mathcal{A}_c\,,$$
$$A_{ab} = A_{cb} = A_{db} =: \mathcal{A}_b\,, \qquad A_{ad} = A_{bd} = A_{cd} =: \mathcal{A}_d\,,$$

2. *arcs depuis $\mathcal{V} \setminus \{a, b, c, d\}$, c.-à-d. que*

$$A_{ak} = A_{bk} = A_{ck} = A_{dk}\,, \quad \forall k \in \mathcal{V} \setminus \{a, b, c, d\}\,,$$

3. *fréquences naturelles décalées*

$$\omega_j - 2\,\mathrm{Im}(\mathcal{A}_j) = \omega_k - 2\,\mathrm{Im}(\mathcal{A}_k), \quad \forall j, k \in \{a, b, c, d\}\,.$$

Ces conditions permettent de déterminer les *motifs* impliquant des birapports conservés ainsi que les façons possibles de connecter ces motifs.

La troisième partie de l'article concerne les symétries de Lie [79]. Soit un système dynamique de la forme générale

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) \tag{A.6}$$

et possédant donc un GOK de la forme

$$\mathcal{K} = \partial_t + \sum_{j=1}^{N} F_j(t, \boldsymbol{x})\partial_j\,. \tag{A.7}$$

Le lemme suivant formalise en général la condition infinitésimale de symétrie dans le contexte de la théorie de Koopman.

Lemme 83 (Condition infinitésimale pour des symétries de Lie)**.** *Un groupe connexe local de transformations G agissant sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est un groupe de symétrie du système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre de l'Éq.* (A.6) *si et seulement si*

$$[\mathcal{K}, \mathcal{S}] - \mathcal{K}[\xi(t, \boldsymbol{x})]\mathcal{K} = 0 \tag{A.8}$$

pour chaque générateur $\mathcal{S} = \xi(t, \boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(t, \boldsymbol{x})\partial_j$ de G.

Dans le cas particulier où $\xi(t, \boldsymbol{x})$ est une constante, alors la condition se simplifie à $[\mathcal{K}, \mathcal{S}] = 0$. À partir de ce résultat, on peut montrer que, si un système de Kuramoto possède une source avec une fréquence naturelle ω_s connectant r sous-graphes disjoints définis par les sous-ensembles de sommets $\mathcal{W}_1, \ldots, \mathcal{W}_r$, alors

$$\mathcal{S}_\eta = \mathcal{K}_\eta - i\omega_s L_0^\eta \,, \quad \eta \in \{1, \ldots, r\} \,, \; r > 1 \tag{A.9}$$

est un générateur de symétrie, où $L_0^\eta = \sum_{j \in \mathcal{W}_\eta} z_j \partial_j$ et

$$\mathcal{K}_\eta = \sum_{j \in \mathcal{W}_\eta} \sum_{k \in \mathcal{W}_\eta \cup \{s\}} (A_{jk} z_k - \bar{A}_{jk} \bar{z}_k z_j^2) \partial_j \,. \tag{A.10}$$

Cette symétrie peut être interprétée comme l'évolution temporelle des oscillateurs d'un des sous-graphes dans le référentiel tournant où la source est immobile. Finalement, si le système possède à la fois un birapport conservé et un générateur de symétrie, il est parfois possible de générer une nouvelle intégrale première fonctionnellement indépendante. Ce dernier théorème présente des conditions suffisantes pour une forme d'intégrale première générée par symétrie (*symmetry-generated constant of motion*).

Théorème 84 (Intégrale première générée par symétrie)**.** *Soit un système de Kuramoto de l'Éq.* (A.1) *possédant un générateur de symétrie* $\mathcal{S}_\eta$ *de la forme de l'Éq.* (A.9) *associé au sous-graphe* $\mathcal{W}_\eta$ *et à la source* s*.*

A. *Si quatre sommets* $a, b, c, d \in \mathcal{V} \setminus \{s\}$ *possèdent*

1. *un seul arc entrant* $\mathcal{A}_s$ *de* s *;*
2. *des fréquences naturelles identiques ;*
3. *et que un, deux, ou trois parmi eux appartiennent à* $\mathcal{W}_\eta$*,*

alors le birapport $c_{a,b,c,d}$ *et* $\mathcal{S}_\eta[c_{a,b,c,d}]$ *sont des intégrales premières fonctionnellement indépendantes.*

B. *Si trois sommets* $u, v, w \in \mathcal{V} \setminus \{s\}$ *possèdent*

1. *un seul arc entrant* $\mathcal{A}_s$ *de* s *;*
2. *des fréquences naturelles identiques* $\omega = \omega_s - 2\,\mathrm{Im}(\mathcal{A}_s)$ *;*
3. *et que un ou deux parmi eux appartiennent à* $\mathcal{W}_\eta$*,*

alors le birapport c_{suvw} *et* $\mathcal{S}_\eta$ *sont des intégrales premières fonctionnellement indépendantes.*

Mis ensemble, les trois théorèmes de l'article mettent en lumière des possibilités jusqu'alors inconnues concernant le nombre et la forme des intégrales premières dans le modèle de Kuramoto. Ils remettent en question l'idée que l'intégrabilité partielle est restreinte aux cas de couplage global, de populations identiques ou de motifs en étoile. Finalement, tout comme les résultats principaux de ce mémoire, les résultats présentés dans cet article montrent la pertinence des approches analytiques en théorie de Koopman dans l'étude des dynamiques de systèmes complexes.

Annexe B

Systèmes dynamiques non autonomes

Seuls les systèmes dynamiques autonomes sont considérés au Chap. 1. Or, étant donné que les systèmes réduits du Chap. 3 sont non autonomes en général, il est pertinent d'adapter la définition de système dynamique de la Sec. 1.1 afin d'inclure ces systèmes. Cette annexe présente une définition plus générale de système dynamique, puis montre la relation entre la définition présentée ici et la Déf. 1 dans le cas particulier des systèmes autonomes. Le symbole $\boldsymbol{\Psi}$ dénote ici un système dynamique général (autonome ou non), tandis que $\boldsymbol{\psi}$ représente un système autonome de la Déf. 1.

Définition 85. Un *système dynamique* continu de dimension $N \in \mathbb{N}$ est une fonction $\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{X}} \to \hat{\mathcal{X}}$ de classe $\mathcal{C}^1$, où $\hat{\mathcal{X}} = \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ pour un ouvert $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ et où $\boldsymbol{\Psi}_t(\hat{\boldsymbol{x}}) \equiv \boldsymbol{\Psi}(t, \hat{\boldsymbol{x}})$ possède les propriétés

(i) $\boldsymbol{\Psi}_0(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{\boldsymbol{x}}$ pour tout $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}$,

(ii) $\boldsymbol{\Psi}_t \circ \boldsymbol{\Psi}_s(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{\Psi}_{t+s}(\hat{\boldsymbol{x}})$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}$.

La principale différence avec la Déf. 1 est que les fonctions $\boldsymbol{\Psi}_t$ ne prennent pas directement en argument un état $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, mais plutôt un couple $\hat{\boldsymbol{x}} = (s, \boldsymbol{x})$ d'une valeur de temps s et d'un état $\boldsymbol{x}$, puis retournent un nouveau couple de la même forme. Cet ajout d'une valeur temporelle dans l'argument est nécessaire puisque, contrairement aux systèmes autonomes, l'évolution de l'état d'un système non autonome ne dépend pas uniquement de l'état de départ, mais aussi du temps de départ. Le passage d'un système non autonome vers un système autonome équivalent est d'ailleurs toujours possible au prix de l'ajout d'une variable dynamique.

Dans ce mémoire, la forme fermée de la fonction $\boldsymbol{\Psi}$ est généralement inconnue. De façon similaire aux systèmes autonomes du Chap. 1, les systèmes dynamiques généraux de la Déf. 85 sont plutôt caractérisés par un système d'EDO de la forme

$$\dot{\boldsymbol{x}}\,(t) = \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x}(t)) \tag{B.1}$$

pour un champ vectoriel $\boldsymbol{G} : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$. L'existence et l'unicité de solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sont garanties sous ces conditions [101] et ces solutions correspondent aux trajectoires du système dynamique. De plus, la dépendance explicite en temps du champ vectoriel montre bien que l'évolution du système ne dépend pas seulement de l'état du système au temps t, mais aussi du temps directement. Si $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}(t_2)$ pour deux moments différents $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, alors, contrairement aux systèmes autonomes, $\dot{\boldsymbol{x}}(t_1) \neq \dot{\boldsymbol{x}}(t_2)$ en général.

Pour les systèmes autonomes, le champ vectoriel $\boldsymbol{G}$ est tel qu'il existe un champ vectoriel équivalent $\boldsymbol{F} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$ satisfaisant $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{G}(t, \boldsymbol{x})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Le passage de la fonction $\boldsymbol{\Psi}$ de la Déf. 85 à la fonction $\boldsymbol{\psi}$ est alors effectué en définissant la projection $\mathcal{P} : \hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ telle que $\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}$, où $\hat{\boldsymbol{x}} = (s, \boldsymbol{x})$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Un système dynamique $\boldsymbol{\Psi}$ de la Déf. 85 est autonome si

$$\boldsymbol{\psi}(t, \mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{x}})) = \mathcal{P} \circ \boldsymbol{\Psi}(t, \hat{\boldsymbol{x}}) \tag{B.2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{\mathcal{X}}$ et pour un $\boldsymbol{\psi}$ de la Déf. 1. Cette relation implique que l'argument temporel du couple $\hat{\boldsymbol{x}}$ n'a pas d'impact sur l'évolution du système, car cet argument est perdu lors de la projection du côté gauche.

Concluons cette annexe avec un exemple.

Exemple 86. Soit le système dynamique unidimensionnel non autonome régi par l'EDO

$$\dot{x}(t) = -2tx(t) + 4t\,. \tag{B.3}$$

Puisque cette EDO est linéaire et de premier ordre, elle s'intègre aisément à l'aide d'un facteur d'intégration pour obtenir des solutions de la forme [86]

$$x(t) = (x_0 - 2)\exp\left(-t^2\right) + 2\,, \tag{B.4}$$

où x_0 est la condition initiale (on vérifie aisément que $x(0) = x_0$). À partir des solutions, on déduit trivialement que

$$\Psi_t((0, x_0)) = \left(t, (x_0 - 2)\exp\left(-t^2\right) + 2\right)\,. \tag{B.5}$$

Or, nous n'avons pas directement la forme fermée pour $s \neq 0$. Par la propriété (ii) de la Déf. 85, celle-ci est donnée par

$$\Psi_t((s, x)) = \Psi_{t+s} \circ \Psi_{-s}((s, x))\,, \tag{B.6}$$

où $\Psi_{-s}((s, x))$ est obtenu en exprimant x_0 selon $x(s)$ à partir de l'Éq. (B.4). Par cette méthode, la forme fermée de Ψ obtenue est

$$\Psi_t((s, x)) = \left(t + s, (x - 2)\exp\left(-t^2 - 2ts\right) + 2\right)\,. \tag{B.7}$$

On observe d'ailleurs que, le système dynamique Ψ étant non autonome ici, il n'existe pas de système dynamique ψ de la forme de la Déf. 1 qui satisfait l'Éq. (B.2) pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\hat{x} \in \hat{\mathcal{X}}$.

Annexe C

Calcul de fonctions propres approximatives pour RNN

Dans cette annexe, une approche symbolique approximative de calcul de fonctions propres du générateur de l'opérateur de Koopman est présentée par l'application à une dynamique de RNN. Cette approche consiste à décomposer le générateur sur une base de monômes des variables dynamiques, puis tronquer la base à une certaine puissance afin d'approximer cet espace de fonctions comme étant invariant sous l'action du GOK. Bien que les méthodes approximatives de décomposition sur des bases de fonctions (monômes, polynômes orthogonaux, espace de Krylov) aient été l'idée initiale du projet de maîtrise de l'auteur, elles ont éventuellement été mises de côté au profit de méthodes de calcul exact à cause de problèmes reliés à la multistabilité, c'est-à-dire la présence de plusieurs attracteurs. La nature de ces obstacles est également discutée ici.

Soit la dynamique de RNN décrite par le système d'équations

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{x} + W\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta}\,, \tag{C.1}$$

pour la fonction d'activation $[\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})]_i = s(x_i) = 1/(1+e^{-x_i}) - 1/2$. Le GOK de ce système est

$$\mathcal{K} = \left(-\boldsymbol{x} + W\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\theta}\right)^\top \nabla\,. \tag{C.2}$$

Toutefois, étant donné qu'on veut éventuellement décomposer le générateur sur une base de monômes, il est pratique de représenter la fonction d'activation par sa série de Taylor

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{4} - \frac{\boldsymbol{x}^{\odot 3}}{48} + \mathcal{O}\left(\boldsymbol{x}^{\odot 5}\right)\,, \tag{C.3}$$

où $\odot$ désigne la puissance par élément. Le générateur peut donc être exprimé comme

$$\mathcal{K} = \left(\boldsymbol{\theta} + \left(\frac{W}{4} - 1\right)\boldsymbol{x} - \frac{W}{48}\boldsymbol{x}^{\odot 3} + \mathcal{O}\left(\boldsymbol{x}^{\odot 5}\right)\right)^\top \nabla\,. \tag{C.4}$$

On veut décomposer cet opérateur sur la base de monômes tronquée

$$\mathcal{M} = \left\{ x^{\boldsymbol{\mu}} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} \mu_i \leq 4 \text{ et } \mu_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, N\} \right\}, \tag{C.5}$$

où les monômes sont notés $x^{\boldsymbol{\mu}} \equiv \prod_{i=1}^{N} x_i^{\mu_i}$ pour alléger le texte. Définissons également l'ensemble des exposants $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{\mu} \,|\, x^{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{M}\}$. L'action du GOK sur un élément de base est donnée par

$$\mathcal{K}[x^{\boldsymbol{\mu}}] = \sum_{i=1}^{N} \theta_i \mu_i x^{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{e}_i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_i W_{ij} x^{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j} \tag{C.6}$$

$$- \frac{1}{48} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_i W_{ij} x^{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{e}_i + 3\boldsymbol{e}_j} + \mathcal{O}\left(\boldsymbol{x}^{\odot 5}\right), \tag{C.7}$$

où $[\boldsymbol{e_i}]_i = 1$ et $[\boldsymbol{e_i}]_j = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ avec $i \neq j$. Définissons maintenant la fonction propre ϕ du GOK de valeur propre λ comme étant approximativement contenue dans l'espace engendré par $\mathcal{M}$, ce qui implique que

$$\phi(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}} c_{\boldsymbol{\mu}} x^{\boldsymbol{\mu}}, \tag{C.8}$$

où les $c_{\boldsymbol{\mu}}$ sont des coefficients constants. Par la linéarité du GOK, l'équation aux valeurs propres associée $\mathcal{K}[\phi] = \lambda\phi$ peut donc être exprimée comme

$$\sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}} c_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{K}[x^{\boldsymbol{\mu}}] = \lambda \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}} c_{\boldsymbol{\mu}} x^{\boldsymbol{\mu}} + \mathcal{O}\left(\boldsymbol{x}^{\odot 5}\right). \tag{C.9}$$

En négligeant tous les termes de degré 5 ou plus [1] et en considérant séparément l'équation associée à chaque monôme, l'Éq. (C.9) se traduit en un système *linéaire* de la forme

$$B\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{c}. \tag{C.10}$$

Nous supposons d'ailleurs ici qu'un ordonnancement a été choisi pour les monômes, c'est-à-dire qu'il existe une bijection entre les monômes $\mathcal{M}$ et les indices $\{1, \ldots, \#\mathcal{M}\}$. Pour calculer les fonctions propres approximatives de la forme de l'Éq. (C.8), il ne reste alors qu'à calculer les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice B, qui correspondent respectivement aux coefficients $\boldsymbol{c}$ des fonctions propres et aux valeurs propres du GOK.

Toutefois, cette approche comporte des inconvénients majeurs. Le premier inconvénient est que le nombre de monômes qui composent la base croît extrêmement rapidement avec le nombre de variables, car le nombre de monômes à N variables de degré au plus d est donné par $\binom{N+d}{d}$. Pour $N = 100$, une taille relativement modeste pour un système complexe, et un degré

1. Cette approximation équivaut à considérer que l'espace engendré par $\mathcal{M}$ est un sous-espace Koopman-invariant et est intuitive si $|x_i| \ll 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$.

maximum $d = 3$, il faudrait considérer une base de 176 851 monômes et donc des matrices avec 31 milliards d'éléments. Pour cette raison, les cas que nous avons considérés n'ont pas dépassé $N = 15$.

Le deuxième obstacle à l'utilisation de cette méthode est propre aux systèmes multistables. Si le réseau étudié possède plus d'un attracteur (ce qui est excessivement courant chez les RNN), alors il est fort probable qu'il soit impossible de linéariser globalement la dynamique avec des observables de classe $\mathcal{C}^1$ [53, 54]. Dans ce cas, la seule fonction propre approximative qui est incluse dans l'espace engendré par $\mathcal{M}$ est la fonction propre triviale. En pratique, les fonctions propres approximatives obtenues possèdent uniquement des coefficients non nuls pour les éléments de base de plus haut degré, car leur évolution est mal approximée par la représentation matricielle finie du GOK. Ces fonctions propres sont donc toutes, en réalité, des approximations de la fonction propre triviale.

Bibliographie

[1] Abrevaya G. et al. *Learning Brain Dynamics With Coupled Low-Dimensional Nonlinear Oscillators and Deep Recurrent Networks*. Neural Computation 33.8 (2021), 2087. doi : 10.1162/neco_a_01401.

[2] Allesina S. et Tang S. *Stability criteria for complex ecosystems*. Nature 483.7388 (2012), 205. doi : 10.1038/nature10832.

[3] Alon U. *An Introduction to Systems Biology : Design Principles of Biological Circuits*. Chapman et Hall/CRC, 2006. doi : 10.1201/9781420011432.

[4] Anderson P. W. *More Is Different*. Science 177.4047 (1972), 393. doi : 10.1126/science.177.4047.393.

[5] Anderson R. M. et May R. M. *Infectious Diseases of Humans : Dynamics and Control*. Oxford University Press, 1991. doi : 10.1093/oso/9780198545996.003.0001.

[6] Bailey N. T. J. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications*. Griffin, 1975.

[7] Barzel B. et Barabási A.-L. *Universality in network dynamics*. Nature Physics 9.10 (2013), 673. doi : 10.1038/nphys2741.

[8] Barzel B., Liu Y.-Y. et Barabási A.-L. *Constructing minimal models for complex system dynamics*. Nature Communications 6.1 (2015), 7186. doi : 10.1038/ncomms8186.

[9] Baumgarte J. *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1.1 (1972), 1. doi : 10.1016/0045-7825(72)90018-7.

[10] Beiran M., Dubreuil A., Valente A., Mastrogiuseppe F. et Ostojic S. *Shaping Dynamics With Multiple Populations in Low-Rank Recurrent Networks*. Neural Computation 33.6 (2021), 1572. doi : 10.1162/neco_a_01381.

[11] Bonacich P. *Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification*. The Journal of Mathematical Sociology 2.1 (1972), 113. doi : 10.1080/0022250X.1972.9989806.

[12] Bondy A. et Murty U. *Graph Theory*. Springer London, 2008.

[13] Brown E., Moehlis J. et Holmes P. *On the Phase Reduction and Response Dynamics of Neural Oscillator Populations*. Neural Computation 16.4 (2004), 673. doi : 10.1162/089976604322860668.

[14] Bruder D., Fu X., Gillespie R. B., Remy C. D. et Vasudevan R. *Data-Driven Control of Soft Robots Using Koopman Operator Theory*. IEEE Transactions on Robotics 37.3 (2021), 948. doi : 10.1109/TRO.2020.3038693.

[15] Bruder D., Gillespie B., Remy C. D. et Vasudevan R. *Modeling and Control of Soft Robots Using the Koopman Operator and Model Predictive Control*. Robotics : Science and Systems 2019. 2019. doi : 10.15607/RSS.2019.XV.060.

[16] Brunton S. L., Brunton B. W., Proctor J. L. et Kutz J. N. *Koopman Invariant Subspaces and Finite Linear Representations of Nonlinear Dynamical Systems for Control*. PLOS ONE 11.2 (2016), e0150171. doi : 10.1371/journal.pone.0150171.

[17] Brunton S. L., Budišić M., Kaiser E. et Kutz J. N. *Modern Koopman Theory for Dynamical Systems*. SIAM Review 64.2 (2022), 229. doi : 10.1137/21M1401243.

[18] Budišić M., Mohr R. et Mezić I. *Applied Koopmanism*. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 22.4 (2012), 047510. doi : 10.1063/1.4772195.

[19] Cestnik R. et Martens E. A. *Integrability of a Globally Coupled Complex Riccati Array : Quadratic Integrate-and-Fire Neurons, Phase Oscillators, and All in Between*. Physical Review Letters 132.5 (2024), 057201. doi : 10.1103/PhysRevLett.132.057201.

[20] Charbonneau P. *Natural Complexity : A Modeling Handbook*. Princeton University Press, 2017. doi : 10.2307/j.ctt1vwmgzt.

[21] Chauhan N. K. et Singh K. *A Review on Conventional Machine Learning vs Deep Learning*. 2018 International Conference on Computing, Power and Communication Technologies (GUCON). 2018, 347. doi : 10.1109/GUCON.2018.8675097.

[22] Colbrook M. J., Drysdale C. et Horning A. *Rigged Dynamic Mode Decomposition : Data-Driven Generalized Eigenfunction Decompositions for Koopman Operators*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems (2025), 1150. doi : 10.1137/24M1662370.

[23] Cybenko G. *Approximation by superpositions of a sigmoidal function*. Mathematics of Control, Signals and Systems 2.4 (1989), 303. doi : 10.1007/BF02551274.

[24] DePasquale B., Cueva C. J., Rajan K., Escola G. S. et Abbott L. F. *full-FORCE : A target-based method for training recurrent networks*. PLOS ONE 13.2 (2018), e0191527. doi : 10.1371/journal.pone.0191527.

[25] Dogra A. S. et Redman W. *Optimizing Neural Networks via Koopman Operator Theory*. Advances in Neural Information Processing Systems. T. 33. Curran Associates, Inc., 2020, 2087.

[26] Donath W. E. et Hoffman A. J. *Lower Bounds for the Partitioning of Graphs*. IBM Journal of Research and Development 17.5 (1973), 420. doi : 10.1147/rd.175.0420.

[27] Eckart C. et Young G. *The approximation of one matrix by another of lower rank*. Psychometrika 1.3 (1936), 211. doi : 10.1007/BF02288367.

[28] Elton C. et Nicholson M. *The Ten-Year Cycle in Numbers of the Lynx in Canada*. Journal of Animal Ecology 11.2 (1942), 215. doi : 10.2307/1358.

[29] Fan K. *Maximum Properties and Inequalities for the Eigenvalues of Completely Continuous Operators*. Proceedings of the National Academy of Sciences 37.11 (1951), 760. doi : 10.1073/pnas.37.11.760.

[30] Funahashi K.-i. et Nakamura Y. *Approximation of dynamical systems by continuous time recurrent neural networks*. Neural Networks 6.6 (1993), 801. doi : 10.1016/S0893-6080(05)80125-X.

[31] Gao J., Barzel B. et Barabási A.-L. *Universal resilience patterns in complex networks*. Nature 530.7590 (2016), 307. doi : 10.1038/nature16948.

[32] Gao P. et Ganguli S. *On simplicity and complexity in the brave new world of large-scale neuroscience*. Current Opinion in Neurobiology 32 (2015), 148. doi : 10.1016/j.conb.2015.04.003.

[33] Gilpin W. *Optimization hardness constrains ecological transients*. arXiv preprint (2024). doi : 10.48550/arXiv.2403.19186.

[34] Goriely A. *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems*. World Scientific, 2001. doi : 10.1142/3846.

[35] Griffiths D. J. et Schroeter D. F. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018. doi : 10.1017/9781316995433.

[36] Haerter J. O., Mitarai N. et Sneppen K. *Food Web Assembly Rules for Generalized Lotka-Volterra Equations*. PLOS Computational Biology 12.2 (2016), e1004727. doi : 10.1371/journal.pcbi.1004727.

[37] Hardin G. *The Competitive Exclusion Principle*. Science 131.3409 (1960), 1292. doi : 10.1126/science.131.3409.1292.

[38] Herbert E. et Ostojic S. *The impact of sparsity in low-rank recurrent neural networks*. PLOS Computational Biology 18.8 (2022), e1010426. doi : 10.1371/journal.pcbi.1010426.

[39] Holling C. S. *Principles of Insect Predation*. Annual Review of Entomology 6.Volume 6, 1961 (1961), 163. doi : 10.1146/annurev.en.06.010161.001115.

[40] Hopfield J. J. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities.* Proceedings of the National Academy of Sciences 79.8 (1982), 2554. DOI : 10.1073/pnas.79.8.2554.

[41] Hopfield J. J. *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons.* Proceedings of the National Academy of Sciences 81.10 (1984), 3088. DOI : 10.1073/pnas.81.10.3088.

[42] Horn R. A. et Johnson C. R. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, 2013. DOI : 10.1017/CBO9780511810817.

[43] Howland R. A. *Intermediate Dynamics : A Linear Algebraic Approach.* Springer, 2006. DOI : 10.1007/0-387-28316-1.

[44] Jiang J. et al. *Predicting tipping points in mutualistic networks through dimension reduction.* Proceedings of the National Academy of Sciences 115.4 (2018), E639. DOI : 10.1073/pnas.1714958115.

[45] Karlebach G. et Shamir R. *Modelling and analysis of gene regulatory networks.* Nature Reviews Molecular Cell Biology 9.10 (2008), 770. DOI : 10.1038/nrm2503.

[46] Koopman B. O. *Hamiltonian Systems and Transformation in Hilbert Space.* Proceedings of the National Academy of Sciences 17.5 (1931), 315. DOI : 10.1073/pnas.17.5.315.

[47] Koopman B. O. et Neumann J. v. *Dynamical Systems of Continuous Spectra.* Proceedings of the National Academy of Sciences 18.3 (1932), 255. DOI : 10.1073/pnas.18.3.255.

[48] Krakauer D. C. *The Complex World : An Introduction to the Foundations of Complexity Science.* SFI Press, 2024.

[49] Krotov D. *A new frontier for Hopfield networks.* Nature Reviews Physics 5.7 (2023), 366. DOI : 10.1038/s42254-023-00595-y.

[50] Kundu P., Kori H. et Masuda N. *Accuracy of a one-dimensional reduction of dynamical systems on networks.* Physical Review E 105.2 (2022), 024305. DOI : 10.1103/PhysRevE.105.024305.

[51] Kuramoto Y. *Rhythms and turbulence in populations of chemical oscillators.* Physica A : Statistical Mechanics and its Applications 106.1 (1981), 128. DOI : 10.1016/0378-4371(81)90214-4.

[52] Kuramoto Y. *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators.* International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. T. 39. 1975, 420. DOI : 10.1007/BFb0013365.

[53] Kvalheim M. D. et Revzen S. *Existence and uniqueness of global Koopman eigenfunctions for stable fixed points and periodic orbits*. Physica D : Nonlinear Phenomena 425 (2021), 132959. DOI : 10.1016/j.physd.2021.132959.

[54] Kvalheim M. D. et Sontag E. D. *Global linearization of asymptotically stable systems without hyperbolicity*. Systems & Control Letters 203 (2025), 106163. DOI : 10.1016/j.sysconle.2025.106163.

[55] Laurence E., Doyon N., Dubé L. J. et Desrosiers P. *Spectral Dimension Reduction of Complex Dynamical Networks*. Physical Review X 9.1 (2019), 011042. DOI : 10.1103/PhysRevX.9.011042.

[56] Law R. et Morton R. D. *Permanence and the Assembly of Ecological Communities*. Ecology 77.3 (1996), 762. DOI : 10.2307/2265500.

[57] Lotka A. J. *Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems*. Proceedings of the National Academy of Sciences 6.7 (1920), 410. DOI : 10.1073/pnas.6.7.410.

[58] Lotka A. J. *Elements of Physical Biology*. Williams & Wilkins, 1925.

[59] Marvel S. A., Mirollo R. E. et Strogatz S. H. *Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action*. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 19.4 (2009), 043104. DOI : 10.1063/1.3247089.

[60] Mastrogiuseppe F. et Ostojic S. *Linking Connectivity, Dynamics, and Computations in Low-Rank Recurrent Neural Networks*. Neuron 99.3 (2018), 609. DOI : 10.1016/j.neuron.2018.07.003.

[61] Mauroy A. et Mezić I. *On the use of Fourier averages to compute the global isochrons of (quasi)periodic dynamics*. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 22.3 (2012), 033112. DOI : 10.1063/1.4736859.

[62] Mauroy A., Mezić I. et Moehlis J. *Isostables, isochrons, and Koopman spectrum for the action–angle representation of stable fixed point dynamics*. Physica D : Nonlinear Phenomena 261 (2013), 19. DOI : 10.1016/j.physd.2013.06.004.

[63] Mauroy A. et Mezic I. *Analytic Extended Dynamic Mode Decomposition*. arXiv preprint (2024). DOI : 10.48550/arXiv.2405.15945.

[64] Mauroy A. et Mezić I. *A spectral operator-theoretic framework for global stability*. 52nd IEEE Conference on Decision and Control. 2013, 5234. DOI : 10.1109/CDC.2013.6760712.

[65] Mauroy A. et Mezić I. *Global Stability Analysis Using the Eigenfunctions of the Koopman Operator*. IEEE Transactions on Automatic Control 61.11 (2016), 3356. DOI : 10.1109/TAC.2016.2518918.

[66] A. Mauroy, I. Mezić et Y. Susuki, éd. *The Koopman Operator in Systems and Control : Concepts, Methodologies, and Applications*. Springer, 2020. DOI : 10.1007/978-3-030-35713-9.

[67] McCulloch W. S. et Pitts W. *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. The bulletin of mathematical biophysics 5.4 (1943), 115. DOI : 10.1007/BF02478259.

[68] Meena C., Hens C., Acharyya S., Haber S., Boccaletti S. et Barzel B. *Emergent stability in complex network dynamics*. Nature Physics 19.7 (2023), 1033. DOI : 10.1038/s41567-023-02020-8.

[69] Mezić I. *Analysis of Fluid Flows via Spectral Properties of the Koopman Operator*. Annual Review of Fluid Mechanics 45 (2013), 357. DOI : 10.1146/annurev-fluid-011212-140652.

[70] Mezić I. *Spectral Properties of Dynamical Systems, Model Reduction and Decompositions*. Nonlinear Dynamics 41.1-3 (2005), 309. DOI : 10.1007/s11071-005-2824-x.

[71] Mezić I. *Spectrum of the Koopman Operator, Spectral Expansions in Functional Spaces, and State-Space Geometry*. Journal of Nonlinear Science 30.5 (2020), 2091. DOI : 10.1007/s00332-019-09598-5.

[72] Mezić I. et Banaszuk A. *Comparison of systems with complex behavior*. Physica D : Nonlinear Phenomena 197.1 (2004), 101. DOI : 10.1016/j.physd.2004.06.015.

[73] Mitchell M. *Complexity : A Guided Tour*. Oxford University Press, 2009. DOI : 10.1093/oso/9780195124415.001.0001.

[74] Nakahara M. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Taylor & Francis, 2003. DOI : 10.1201/9781420056945.

[75] Neumann J. v. *Zur Operatorenmethode In Der Klassischen Mechanik*. Annals of Mathematics 33.3 (1932), 587. DOI : 10.2307/1968537.

[76] Newman M. *Networks*. Oxford University Press, 2018. DOI : 10.1093/oso/9780198805090.001.0001.

[77] Nica B. *A Brief Introduction to Spectral Graph Theory*. EMS Press, 2018. DOI : 10.4171/188.

[78] Nicolaou Z. G., Cho H., Zhang Y., Kutz J. N. et Brunton S. L. *Signature of glassy dynamics in dynamic modes decompositions*. arXiv preprint (2025). DOI : 10.48550/arXiv.2502.10918.

[79] Olver P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, 1986. DOI : 10.1007/978-1-4684-0274-2.

[80] Otto S. P. et Day T. *A Biologist's Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution*. Princeton University Press, 2011.

[81] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2001. DOI : 10.1007/978-1-4613-0003-8.

[82] Pikovsky A. et Rosenblum M. *Partially Integrable Dynamics of Hierarchical Populations of Coupled Oscillators*. Physical Review Letters 101.26 (2008), 264103. DOI : 10.1103/PhysRevLett.101.264103.

[83] Ramezanian-Panahi M., Abrevaya G., Gagnon-Audet J.-C., Voleti V., Rish I. et Dumas G. *Generative Models of Brain Dynamics*. Frontiers in Artificial Intelligence 5 (2022). DOI : 10.3389/frai.2022.807406.

[84] Redman W. T., Bello-Rivas J., Fonoberova M., Mohr R., Kevrekidis Y. G. et Mezić I. *Identifying Equivalent Training Dynamics*. Advances in Neural Information Processing Systems 37 (2024), 23603.

[85] Restrepo J. G., Ott E. et Hunt B. R. *Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators*. Physical Review E 71.3 (2005), 036151. DOI : 10.1103/PhysRevE.71.036151.

[86] Riley K. F., Hobson M. P. et Bence S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering : A Comprehensive Guide*. Cambridge University Press, 2006. DOI : 10.1017/CBO9780511810763.

[87] Rosenblatt F. *The perceptron : a probabilistic model for information storage and organization in the brain*. Psychological Review 65.6 (1958), 386. DOI : 10.1037/h0042519.

[88] Rowley C. W., Mezić I., Bagheri S., Schlatter P. et Henningson D. S. *Spectral analysis of nonlinear flows*. Journal of Fluid Mechanics 641 (2009), 115. DOI : 10.1017/S0022112009992059.

[89] Sanhedrai H., Gao J., Bashan A., Schwartz M., Havlin S. et Barzel B. *Reviving a failed network through microscopic interventions*. Nature Physics 18.3 (2022), 338. DOI : 10.1038/s41567-021-01474-y.

[90] Schmidt E. *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*. Mathematische Annalen 63.4 (1907), 433. DOI : 10.1007/BF01449770.

[91] Schuessler F., Dubreuil A., Mastrogiuseppe F., Ostojic S. et Barak O. *Dynamics of random recurrent networks with correlated low-rank structure*. Physical Review Research 2.1 (2020), 013111. DOI : 10.1103/PhysRevResearch.2.013111.

[92] Shinde P. P. et Shah S. *A Review of Machine Learning and Deep Learning Applications*. 2018 Fourth International Conference on Computing Communication Control and Automation (ICCUBEA). 2018, 1. DOI : 10.1109/ICCUBEA.2018.8697857.

[93] Solé R. V. et Bascompte J. *Self-Organization in Complex Ecosystems*. Princeton University Press, 2006. DOI : 10.1515/9781400842933.

[94] Sompolinsky H., Crisanti A. et Sommers H. J. *Chaos in Random Neural Networks*. Physical Review Letters 61.3 (1988), 259. DOI : 10.1103/PhysRevLett.61.259.

[95] Steeb W. H. et Erig W. *On the constants of the motion of a generalized lotka-volterra model*. Lettere al Nuovo Cimento 36.7 (1983), 188. DOI : 10.1007/BF02887585.

[96] Stewart G. W. *On the Early History of the Singular Value Decomposition*. SIAM Review 35.4 (1993), 551. DOI : 10.1137/1035134.

[97] Strogatz S. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 3e éd. CRC Press, 2024.

[98] Strogatz S. et al. *Fifty years of 'More is different'*. Nature Reviews Physics 4.8 (2022), 508. DOI : 10.1038/s42254-022-00483-x.

[99] Sussillo D. *Neural circuits as computational dynamical systems*. Current Opinion in Neurobiology. Theoretical and computational neuroscience 25 (2014), 156. DOI : 10.1016/j.conb.2014.01.008.

[100] Sussillo D. et Abbott L. F. *Generating Coherent Patterns of Activity from Chaotic Neural Networks*. Neuron 63.4 (2009), 544. DOI : 10.1016/j.neuron.2009.07.018.

[101] Teschl G. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2012. DOI : 10.1090/gsm/140.

[102] Thibeault V., Allard A. et Desrosiers P. *The low-rank hypothesis of complex systems*. Nature Physics 20.2 (2024), 294. DOI : 10.1038/s41567-023-02303-0.

[103] Thibeault V., Claveau B., Allard A. et Desrosiers P. *Kuramoto meets Koopman : Constants of motion, symmetries, and network motifs*. arXiv preprint (2025). DOI : 10.48550/arXiv.2504.06248.

[104] Thibeault V., St-Onge G., Dubé L. J. et Desrosiers P. *Threefold way to the dimension reduction of dynamics on networks : An application to synchronization*. Physical Review Research 2.4 (2020), 043215. DOI : 10.1103/PhysRevResearch.2.043215.

[105] Tu C., Grilli J., Schuessler F. et Suweis S. *Collapse of resilience patterns in generalized Lotka-Volterra dynamics and beyond*. Physical Review E 95.6 (2017), 062307. DOI : 10.1103/PhysRevE.95.062307.

[106] Tu J. H., Rowley C. W., Luchtenburg D. M., Brunton S. L. et Kutz J. N. *On dynamic mode decomposition : Theory and applications*. Journal of Computational Dynamics 1.2 (2014), 391. DOI : 10.3934/jcd.2014.1.391.

[107] Vegué M., Thibeault V., Desrosiers P. et Allard A. *Dimension reduction of dynamics on modular and heterogeneous directed networks*. PNAS Nexus 2.5 (2023), pgad150. DOI : 10.1093/pnasnexus/pgad150.

[108] Vlasov V., Zou Y. et Pereira T. *Explosive synchronization is discontinuous*. Physical Review E 92.1 (2015), 012904. DOI : 10.1103/PhysRevE.92.012904.

[109] Vogels T. P., Rajan K. et Abbott L. F. *Neural Network Dynamics*. Annual Review of Neuroscience 28.Volume 28, 2005 (2005), 357. doi : 10.1146/annurev.neuro.28.061604.135637.

[110] Volterra V. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars et cie., 1931.

[111] Volterra V. *Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Animal Species living together*. ICES Journal of Marine Science 3.1 (1928), 3. doi : 10.1093/icesjms/3.1.3.

[112] Wangersky P. J. *Lotka-Volterra Population Models*. Annual Review of Ecology and Systematics 9 (1978), 189. doi : 10.1146/annurev.es.09.110178.001201.

[113] Watanabe S. et Strogatz S. H. *Constants of motion for superconducting Josephson arrays*. Physica D : Nonlinear Phenomena 74.3 (1994), 197. doi : 10.1016/0167-2789(94)90196-1.

[114] Watanabe S. et Strogatz S. H. *Integrability of a globally coupled oscillator array*. Physical Review Letters 70.16 (1993), 2391. doi : 10.1103/PhysRevLett.70.2391.

[115] Werbos P. *Backpropagation through time : what it does and how to do it*. Proceedings of the IEEE 78.10 (1990), 1550. doi : 10.1109/5.58337.

[116] Wiggins S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003. doi : 10.1007/b97481.

[117] Wilf H. S. *The Eigenvalues of a Graph and Its Chromatic Number*. Journal of the London Mathematical Society s1-42.1 (1967), 330. doi : 10.1112/jlms/s1-42.1.330.

[118] Wilson H. R. et Cowan J. D. *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons*. Biophysical Journal 12.1 (1972), 1. doi : 10.1016/S0006-3495(72)86068-5.

[119] Winfree A. T. *Patterns of phase compromise in biological cycles*. Journal of Mathematical Biology 1.1 (1974), 73. doi : 10.1007/BF02339491.

[120] Zhang X. *Integrability of Dynamical Systems : Algebra and Analysis*. Springer, 2017. doi : 10.1007/978-981-10-4226-3.