

Effets de la dimension des réseaux hyperboliques sur la modélisation de la structure communautaire

Mémoire

Béatrice Désy

Maîtrise en physique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Béatrice Désy, 2022

Effets de la dimension des réseaux hyperboliques sur la modélisation de la structure communautaire

Mémoire

Béatrice Désy

Sous la direction de:

Antoine Allard, directeur de recherche
Patrick Desrosiers, codirecteur de recherche

Résumé

Le cadre théorique de la géométrie des réseaux consiste à placer des points, les noeuds, dans un espace métrique, puis les connecter par des liens par paires selon la distance qui les sépare. Lorsque la géométrie sous-jacente est hyperbolique, de nombreuses propriétés de réseaux qui proviennent de données empiriques peuvent être élégamment expliquées à l'aide de la proximité entre les noeuds et des caractéristiques de ces espaces si particuliers, dont la courbure est négative. Le modèle de réseaux hyperboliques le plus couramment utilisé attribue à chaque noeud une coordonnée radiale associée à son nombre total de liens et une coordonnée angulaire. Avec celle-ci, les noeuds peuvent être envoyés à un cercle, et à plus petite distance angulaire ils ont plus de chances d'être connectés, ce qui encode la similarité avec les autres noeuds. Or, dans de nombreux systèmes réels, il existe plus d'un facteur poussant les éléments à s'associer, et donc plusieurs manières d'être similaires ou pas. Cela se reflète dans les modèles de réseaux hyperboliques de plus grande dimension, où plus d'une coordonnée angulaire est associée à chaque noeud, qui est alors envoyé à une sphère de plus grande dimension à la place du cercle.

Dans ce mémoire, on étudie les effets de la dimension des modèles de réseaux hyperboliques aléatoires. En particulier, la distribution des distances angulaires entre les noeuds connectés change selon la dimension. Or, la coordonnée angulaire des noeuds est aussi utilisée pour modéliser la structure communautaire, c'est-à-dire lorsque des sous-groupes de noeuds, les communautés, sont reliés plus densément entre eux qu'au reste du réseau. Par conséquent, augmenter le nombre de coordonnées angulaires affecte naturellement comment les communautés peuvent être générées et la manière dont elles sont reliées entre elles. Ces effets sont quantifiés en simulant des réseaux hyperboliques qui possèdent de la structure communautaire. Une différence marquée est observée entre le cas le plus simple et l'ajout d'une seule dimension, où la structure communautaire générée est plus diversifiée et réaliste.

Abstract

The framework of network geometry involves placing points, nodes of a network, in a metric space and then creating pairwise connections, the edges, according to the distance between them. When the underlying geometry is hyperbolic, many network properties are elegantly explained by the closeness between nodes through properties of these negatively curved spaces. The flagship model of this framework assigns to each node one radial coordinate related to its total number of connections and one angular coordinate related to its similarity to other nodes. Nodes can thus be mapped to a circle where a smaller angular distance increases the chances to be connected, hence the idea of similarity. However, in many systems, there is more than one factors that drives relationships between elements, and thus more than one way in which they can be similar or not. This is captured by higher dimensional hyperbolic network models, where each node has more angular coordinates that maps it to a higher dimensional sphere instead of the circle.

In this master's thesis, we study the effects of the dimension of hyperbolic network models. In particular, the distribution of angular distances between connected nodes changes with dimension. Yet, nodes' angular coordinates are also used to model hyperbolic networks' community structure, when some subgroups of nodes, the communities, are more densely connected than to the rest of the network. Hence, increasing the number of angular coordinates naturally affects how communities can be created and how they are related to one another. These effects are quantified through simulations of hyperbolic networks possessing community structure. A significant difference is observed between the simplest case and the addition of a single dimension, in which case the community structure generated is more diverse and realistic.

Table des matières

Résumé ii

Abstract iii

Table des matières iv

Liste des figures vi

Liste des notations vii

Remerciements xi

Avant-propos xiii

Introduction 1

1 Éléments de géométrie 3
- 1.1 Notions préalables . . . 5
- 1.2 Mesure et probabilités . . . 13
- 1.3 Géométrie sphérique . . . 17
  - 1.3.1 Définitions . . . 17
  - 1.3.2 Mesure sphérique . . . 18
  - 1.3.3 Propriétés . . . 19
- 1.4 Géométrie hyperbolique . . . 21
  - 1.4.1 Remarques historiques . . . 21
  - 1.4.2 Définitions . . . 24
  - 1.4.3 Mesure hyperbolique . . . 27
  - 1.4.4 Modèle de la boule conforme . . . 29
  - 1.4.5 Propriétés . . . 30

2 Réseaux hyperboliques 32
- 2.1 Notions de réseaux . . . 34
  - 2.1.1 Réseaux et structure communautaire . . . 34
  - 2.1.2 Réseaux aléatoires . . . 40
- 2.2 Modèle $\mathbb{H}^{D+1}$ . . . 42
  - 2.2.1 Liens avec la physique statistique . . . 45
  - 2.2.2 Popularité et similarité . . . 46
- 2.3 Modèle $\mathbb{S}^D$ . . . 47
  - 2.3.1 Quasi-isométrie . . . 48

2.3.2 Variable η comme seuil angulaire des liens . . . 50
2.4 Revue de littérature . . . 52
2.4.1 Réseaux hyperboliques et structure communautaire . . . 53
2.4.2 Modèles hyperboliques de plus grande dimension . . . 53
2.4.3 Relations entre la dimension et la structure communautaire . . . 54

3 Dimension et structure communautaire des réseaux hyperboliques 56
3.1 Résumé . . . 56
3.2 Abstract . . . 56
3.3 Introduction . . . 57
3.4 Hyperbolic networks models . . . 60
3.5 Effects of dimensionality . . . 63
3.5.1 Angular distance between connected nodes . . . 64
3.5.2 Number of nearest neighbors . . . 68
3.6 Impacts on community structure . . . 70
3.6.1 Generating communities in hyperbolic spaces . . . 70
3.6.2 Global assessment of angular dependency . . . 72
3.6.3 Local count of neighboring communities . . . 74
3.7 Summary and future work . . . 75
3.8 Appendix A : Explicit computations for angular densities . . . 77
3.8.1 Modes of angular distance between connected node pairs . . . 77
3.8.2 Probability density function for η . . . 78
3.8.3 Marginalized connection probability . . . 78
3.9 Appendix B : Other thresholding methods for block matrices . . . 79
3.10 Complément : Étalement maximal des communautés angulaires . . . 80

Conclusion 83

Bibliographie 87

Liste des figures

1.1 Cinquième postulat d'Euclide, figure inspirée de [4, Figure 1.1.1] 3
1.2 Intuition sur la forme des triangles sphériques, euclidiens et hyperboliques, lorsqu'ils sont projetés dans $\mathbb{R}^2$ 4
1.3 Volume des sphères selon le rayon et la dimension. 20
1.4 Illustration de la négation de l'axiome des parallèles par Lobachevsky dans [27]. 22
1.5 Représentations des trois modèles projectifs principaux du plan hyperbolique H^2. 23
1.6 Représentation de l'espace hyperbolique H^2 dans $\mathbb{R}^{1,2}$. 25
1.7 Volume D-dimensionnel d'une boule hyperbolique selon la dimension et le rayon. 28
1.8 Différence entre la distance hyperbolique d_h et son approximation $\tilde{d}_h$. 31

2.1 Petit réseau en arbre. 36
2.2 Réseau simple en (a) et sa matrice binaire représentant les liens (en noir) entre les noeuds avec une structure par blocs en (b). 38
2.3 Forme générale de la probabilité de connexion selon la valeur du paramètre β. . 44
2.4 Régime où la distance hyperbolique approximative est une mauvaise approximation en relation avec la probabilité de connexion du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$. 49

3.1 Airports network embedded in the hyperbolic disk using the Mercator algorithm [58]. 59
3.2 Probability density function of angular distance between points sampled uniformly at random on a D-sphere. 63
3.3 Probability density functions of angular distance between connected nodes in the $\mathbb{S}^D$ model. 66
3.4 Probability density functions of angular distance between all connected nodes in the $\mathbb{S}^D$ model. 67
3.5 Number of nearest neighbors n_{nn} given by Eq. (3.26) for $D \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. . . . 69
3.6 Example of sampling hyperbolic random graphs with angular community structure in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$. 71
3.7 Stable rank to dimension ratio and Shannon entropy of community block matrices in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$, when increasing the angular dispersion of nodes. 73
3.8 Average community degree $\langle k \rangle$ of hyperbolic random graphs with angular communities sampled in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$. 75
3.9 Community degree $\langle k \rangle$ with alternative binarization methods. 79
3.10 Disposition de $n = 10$ distributions normales équidistantes et de même écart-type sur l'intervalle $I := [0, 2\pi)$. 80
3.11 Étalement maximal des communautés angulaires selon leur nombre n, en fonction d'un écart-type maximal à partir duquel le mélange des distributions normales est indiscernable d'une distribution uniforme sur l'espace. 81

Liste des notations

Notations générales

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels, excluant les infinis.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels, excluant zéro.
$\mathscr{P}(A)$	Ensemble puissance de l'ensemble A.
$A \times A$	Produit cartésien usuel, A est supposé être un ensemble, aussi noté A^2.
$x \cdot y$	Produit scalaire usuel, x et y sont supposés être des points d'un espace vectoriel.
$\|x\|$	Norme euclidienne de x.
d_e	Distance euclidienne, voir exemple 1.1.1.
Prob$[A]$	Mesure de probabilité de l'évènement A.
Vol(M)	Volume de M, qui est supposée être une variété.
$\mathcal{B}(x, r)$	Boule ouverte centrée en x et de rayon r, voir définition 1.1.5.
D	Dimension.
H	Fonction échelon de Heaviside.
Γ	Fonction Gamma.

Notations associées aux espaces sphériques et hyperboliques

$S^D(R)$	D-sphère de rayon R, parfois notée S^D, voir définition 1.3.1.
θ	Séparation angulaire, voir définition 1.1.3.
d_s	Distance sphérique, voir définition 1.3.1.
Φ	Variable aléatoire à support dans $S^D(R)$.
X	Variable aléatoire à support dans $[0, \pi]$.
$\mathbb{R}^{1,D-1}$	Espace de Lorentz, voir définition 1.4.1.
$x \circ y$	Produit scalaire de Lorentz entre $x, y \in \mathbb{R}^{1,D-1}$, voir définition 1.4.1.
$\|\|x\|\|$	Norme de Lorentz de $x \in \mathbb{R}^{1,D-1}$, voir définition 1.4.1.
$\|\|\|x\|\|\|$	Module de $x \in \mathbb{R}^{1,D-1}$.
$H^D(\zeta)$	Nappe supérieure de l'hyperboloïde de dimension D et de courbure $-1/\zeta^2$ dans $\mathbb{R}^{1,D-1}$, voir définition 1.4.2.
d_h	Distance hyperbolique, voir définition 1.4.2.
$\tilde{d}_h$	Distance hyperbolique approximative, voir équation (1.64).
$B^D(\zeta, R)$	Boule ouverte de rayon R dans $H^D(\zeta)$.

Notations associées aux réseaux et modèles de réseaux hyperboliques

g	Réseau ou graphe, voir définition 2.1.1.
V	Ensemble des noeuds d'un réseau, voir définition 2.1.1.
E	Ensemble des liens d'un réseau, voir définition 2.1.1.
a_{ij}	Matrice des connexions d'un réseau, voir définition 2.1.1.
k_i	Degré du noeud i, voir définition 2.1.1.
N	Taille d'un réseau, son nombre de noeuds, voir définition 2.1.1.
c^u	Étiquette associée à la communauté u, voir définition 2.1.7.
c_i	Étiquette associée à la communauté du noeud i, voir définition 2.1.7.
n	Nombre de communautés, voir définition 2.1.7.
Q	Modularité, voir équation (2.7).
γ	Exposant d'une distribution de Pareto.
$\mathcal{G}_N$	Ensemble de tous les graphes simples et non dirigés à N noeuds.
G	Réseau aléatoire, voir définition 2.1.8.
p_{ij}	Probabilité d'un lien entre les noeuds i et j, voir définition 2.1.2.
$\langle k_i \rangle$	Espérance du degré du noeud i.
$\mathbb{H}^{D+1}$	Modèle de réseau aléatoire hyperbolique, voir définition 2.2.1.
p_h	Fonction de probabilité de connexion du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$.
β	Paramètre des fonctions de probabilité de connexion des modèles $\mathbb{S}^D$ et $\mathbb{H}^{D+1}$.
μ	Paramètre de la fonction de probabilité de connexion du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$.
θ_{ij}	Séparation angulaire entre les noeuds i et j.
$\mathbb{S}^D$	Modèle de réseau aléatoire hyperbolique, voir définition 2.3.1.
p_s	Fonction de probabilité de connexion du modèle $\mathbb{S}^D$.
κ_i	Degré latent du noeud i dans le modèle $\mathbb{S}^D$.
κ_0	Degré latent minimal dans le modèle $\mathbb{S}^D$.
$\hat{\mu}$	Paramètre de la fonction de probabilité de connexion du modèle $\mathbb{S}^D$.
$\hat{R}$	Rayon de la sphère $S^D(\hat{R})$ dans le modèle $\mathbb{S}^D$.
χ	Distance effective dans le modèle $\mathbb{S}^D$, aussi notée χ_{ij} si définie entre les noeuds i et j.
ξ	Changement de variables entre $\mathbb{H}^{D+1}$ et $\mathbb{S}^D$.
η	Popularité par paire, aussi notée η_{ij} si définie entre les noeuds i et j.

Pour mamie, Ingrid, les choux
et tous les autres qui ne me liront
jamais.

Happily, some of them kept
records of their troubles. You'll
learn from them - if you want to.
Just as some day, if you have
something to offer, someone will
learn something from you. It's a
beautiful reciprocal arrangement.
And it isn't education.
It's history.
It's poetry.

J. D. Salinger, 1951

Remerciements

Ce mémoire de maîtrise s'inscrit dans une trame narrative tricotée de longues heures de travail dont la majorité semblerait avoir été perdue aux yeux de tous sauf les plus averti.e.s. Des embûches aux fiertés encore à venir, rien de cet ouvrage aurait été possible sans la panoplie d'êtres humains extraordinaires qui m'entourent.

Tout d'abord, je tiens à remercier Patrick du fond du coeur, qui m'a repêchée dans Dynamica en m'enseignant un langage de la recherche qui parle autant à mon humanité qu'à ma (légère) fibre mathématique. D'ailleurs, félicitations à tous mes collègues passé.e.s et présent.e.s dans Dynamica, qui honorent la philosophie de la science ô combien juste, mais ludique, de son fondateur Louis J. Dubé. Un autre merci tout particulier s'impose pour Antoine, que j'ai appris à connaître et apprécier dans les premières ébauches de mon projet de maîtrise et qui a su m'aider à trouver et garder un fil conducteur pour ma recherche.

Cette maîtrise en temps de pandémie n'aurait pas été la même sans mon amie Marina et sa famille, qui resteront pour moi un modèle d'équilibre entre la conviction, la douceur et le courage, en toutes circonstances, même (et surtout) les plus saugrenues.

À mon fidèle acolyte Vincent, toujours prêt à discuter de notions mathématiques autour d'une bière, idéalement face à face, autrement au travers d'un écran, je dirais qu'il n'y a pas de mots qui décrivent l'ampleur de ma gratitude pour ces rencontres toujours aussi fructueuses et amusantes. Espérons qu'elles n'aient été qu'un prélude à de nombreuses autres à venir.

Merci à mes ami.e.s, ma famille, mes amours, qui n'ont rien à voir avec ce projet mais tout à voir avec le sens donné au quotidien pour pouvoir replonger chaque fois dans l'absurdité de la recherche théorique. Je ressens une gratitude toute particulière envers celles et ceux qui m'emmènent jouer dehors, marcher au-dessus du vide dans des lieux qui défient toute définition de la joliesse (et aussi un peu la gravité).

Sur une note plus dissonante, j'aimerais aussi remercier de tout mon être certains organismes qui ont joué un rôle fondamental à retrouver l'existence et l'énergie nécessaires à la complétion de ma maîtrise.

Le Cercle Polaire	*S.O.S Violence conjugale*	*Équijustice Capitale Nationale*
418 623-7800	1 800 363-9010 | 24/7	418 648-6662
cerclepolaire.com	sosviolenceconjugale.ca	equijustice.ca

Aux gens qui m'ont orientée de près ou de loin vers ces ressources lorsque l'effacement me guettait, toutes les femmes en moi vous remercient, infiniment.

Avant-propos

Ce mémoire par article est divisé en trois chapitres, dont le troisième constitue une adaptation d'un article soumis et en processus de révision au moment du dépôt final. Le manuscrit est disponible sur la plateforme arχiv [1] depuis le 19 septembre 2022. Les deux premiers chapitres mettent en place les notions de base sur lesquelles sont fondés les résultats présentés au chapitre 3. Celui-ci est le seul écrit en anglais, à l'exception du résumé qui a été traduit et d'un complément. Certaines définitions présentées aux chapitres 1 et 2 sont reportées de manière plus concise dans le chapitre 3 puisque l'article est un ouvrage indépendant.

Toute la recherche ayant mené à cet article a été menée de front par l'étudiante, avec le soutien régulier des directeur et codirecteur de recherche. Il en va de même pour la rédaction et les figures, majoritairement accomplies par l'étudiante, à l'exception du contenu de la figure 3.1 dont les données ont été générées par Prof. Antoine Allard. La première auteure est Béatrice Désy, et les co-auteurs sont Antoine Allard et Patrick Desrosiers.

Introduction

Chaque chose, du plus petit neurone à la plus grande ville, du point le plus abstrait à l'être humain le plus réel (et complexe), existe dans des lieux. Plus souvent qu'autrement les voisinages, emboîtements et associations entre ces lieux expliquent les relations entre ce qui les habite. Par exemple, même dans notre monde hyperconnecté, les chances de devenir ami.e d'un être humain qui habite dans la même ville et qui fréquente les mêmes établissements sont bien plus élevées que de développer des liens sociaux avec quelqu'un à l'autre bout du monde. Et même, deux personnes séparées de milliers de kilomètres qui développeraient des liens le feraient certainement en se rejoignant dans les lieux plus abstraits de leurs intérêts. Les mots dans nos cerveaux proviennent de lieux sémantiques et nous permettent de former des idées et éventuellement les communiquer entre nous, en se rejoignant alors dans un lieu physique ou virtuel. Les quartiers, villes et régions sont reliés par des moyens de transport, tandis que les espaces virtuels où nous pouvons nous rencontrer le sont par d'immenses architectures technologiques de serveurs, de câbles et de satellites partout sur la planète. Malgré leur omniprésence, comprendre la structure de telles interrelations est loin d'être simple, même au sein d'un sous-domaine le plus particulier.

Un réseau est une manière simple, élégante et efficace de modéliser un système constitué d'éléments individuels qui sont reliés par paires, comme par exemple des aéroports reliés par des vols directs, des neurones reliés par des synapses ou des humains associés socialement par des relations ou des contacts. En soi, un réseau est donc tout bonnement un ensemble de liens entre des choses. Lorsque peu de liens existent, un cadre théorique pour étudier de tels systèmes peut paraître superflu. Or, lorsque les systèmes sont très grands et complexes, il devient pratique de les représenter ainsi, comme nous verrons en plus de détails au début du chapitre 2. Les réseaux au coeur de ce travail possèdent une caractéristique supplémentaire : leurs noeuds existent dans certains lieux. Ce sont en fait des points d'un espace métrique, c'est-à-dire qu'il y a une distance bien définie entre chaque paire de noeuds. On peut donc fort intuitivement imaginer des points dans un espace tel que la distance entre chaque paire de points détermine la probabilité que les points soient connectés, et voilà tout établie (intuitivement) la notion de réseau géométrique aléatoire.

Or, la définition et la manière de calculer la distance entre des points varie d'un espace à l'autre. Disons en ville, doit-on nécessairement suivre les rues quadrillées, ou peut-on voler d'un point à l'autre ? Sur un ballon, la distance entre deux points est-elle donnée par une courbe qui suit sa surface ou bien un arc qui passe à l'intérieur ? Les réponses à ces questions définissent précisément de quels espaces métriques il est question. Un type d'espace particulièrement intéressant pour y déposer les noeuds d'un réseau est l'espace hyperbolique, un espace lisse à courbure négative aux propriétés étranges et fascinantes. Par exemple, une infinité de lignes parallèles différentes peuvent passer en un point et les aires des disques augmentent prodigieusement plus vite selon le rayon que dans les espaces euclidiens avec lesquels nous sommes plus familiers. Ces propriétés de l'espace sous-jacent font en sorte que les réseaux qui y sont déposés, sous certaines conditions, présentent des caractéristiques qui rappellent celles de nombreux réseaux issus de données réelles, qu'elles soient économiques, technologiques, biologiques ou sociales. C'est à cet égard que le formalisme des réseaux hyperboliques est important, tant du point de vue théorique pour expliquer lesdites caractéristiques que du point de vue plus appliqué pour approfondir notre compréhension des réseaux qui nous entourent.

Notamment, de nombreux réseaux présentent une structure agrégée, où des sous-ensembles de noeuds sont plus densément reliés entre eux qu'avec le reste du réseau. On dit alors que ces sous-groupes correspondent aux communautés et un tel réseau possède alors de la structure communautaire. Il s'avère que dans les réseaux hyperboliques, la structure communautaire est modélisée à l'aide de la proximité angulaire des noeuds. Cela signifie qu'en une dimension, les communautés sont en quelque sorte représentées par des amas sur le cercle, en deux dimensions par des amas sur la sphère et ainsi de suite. Déjà, on peut se demander très justement si la structure communautaire qui peut être modélisée en différentes dimensions est équivalente. Il s'avère que ce n'est pas le cas, et ce mémoire dévoile les détails qui nous poussent à cette conclusion.

Pour comprendre ce travail, il y a donc deux grandes familles de notions avec lesquelles se familiariser : les espaces hyperboliques et les réseaux, afin d'en arriver aux réseaux hyperboliques. La structure générale de ce mémoire suit ces grandes lignes. Dans le chapitre 1, on introduit des notions préalables en lien avec les espaces métriques et les probabilités, avant de présenter quelques éléments de géométrie des espaces sphériques et hyperboliques. Le corps du chapitre 2 est pour sa part constitué de notions de réseaux, et en particulier des principaux modèles de réseaux hyperboliques en dimension arbitraire. Ce second chapitre se termine sur une revue de littérature détaillée sur la structure communautaire et la dimension des réseaux hyperboliques. Enfin, le chapitre 3 contient le manuscrit d'un article à venir où on présente nos résultats sur l'importance de la dimension pour la modélisation de la structure communautaire des réseaux hyperboliques.

Chapitre 1

Éléments de géométrie

Il serait presque irrespectueux de parler de géométrie sans parler des *Éléments* d'Euclide [2], et à plus forte raison ici, considérant l'importance de cette œuvre pour la découverte de la géométrie hyperbolique. Les *Éléments* sont un ensemble de treize livres écrits aux alentours de 300 ans avant cette ère par un certain géomètre grec nommé Euclide, mais colligeant les travaux de nombreux autres de ses contemporains. Le premier livre commence avec vingt-trois définitions, neuf principes communs s'apparentant à des règles de logique, mais surtout les cinq postulats [1] suivants [2, 3] :

(1) Produire une ligne droite de n'importe quel point à n'importe quel point.
(2) Prolonger une droite finie de manière continue en ligne droite.
(3) Tracer un cercle au moyen de n'importe quel centre et n'importe quel rayon.
(4) Que tous les angles droits soient égaux les uns aux autres.
(5) Que, si une ligne droite tombe sur deux lignes droites en faisant du même côté deux angles intérieurs plus petits que deux droits, ces deux droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où se trouvent les angles plus petits que deux droits.

Les quatre premiers postulats sont assez intuitifs, contrairement au cinquième qui requiert l'idée de l'infini. Tel qu'illustré à la figure 1.1, si deux lignes droites sont croisées par une troisième ligne de sorte que la somme des angles intérieurs soit plus petite que π, alors les

1. Au sens strict, le mot « postulat » pourrait aussi être traduit par « exigence » [3].

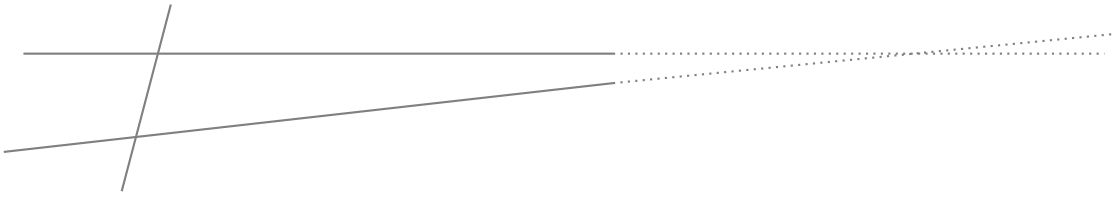


FIGURE 1.1 – Cinquième postulat d'Euclide, figure inspirée de [4, Figure 1.1.1]

deux lignes se croiseront du côté de ceux-ci éventuellement. Or, lorsque la somme des deux angles intérieurs approche π, le point d'intersection des deux lignes tend à l'infini, et par définition si cette somme est égale à π les lignes sont parallèles. Il s'avère que le cinquième postulat d'Euclide est équivalent à *l'axiome des parallèles* de la géométrie euclidienne [4]. Selon cet axiome, si on a une ligne droite infinie et un point extérieur à cette droite, il existe une unique autre ligne droite infinie passant par le point et ne croisant jamais la première droite. Dans l'une comme l'autre formulation, le cinquième postulat a soulevé pendant des siècles la critique de ne pas sembler assez évident pour être accepté sans preuve.

Cette critique a mené de nombreux mathématiciens au travers des siècles à tenter de prouver le cinquième postulat à partir des quatre premiers, sans succès. Et avec raison, car le cinquième postulat est en fait indépendant des quatre premiers. Avec d'autres versions de l'axiome des parallèles, d'autres géométries émergent. L'équivalent d'une ligne droite infinie en géométrie sphérique est un grand arc de cercle. Dans un sens qui deviendra plus clair au fil de ce chapitre, il s'avère qu'en géométrie sphérique il n'existe *aucune* ligne droite infinie distincte et parallèle à une autre, c'est-à-dire que deux grands cercles distincts vont toujours se croiser. En revanche, en géométrie hyperbolique il y a une *infinité* de telles lignes droites infinies. Il s'agit ici simplement de se donner une intuition sur la dualité entre la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, à la lumière de ce qu'on comprend intuitivement de la géométrie euclidienne. Cette dualité s'exprime aussi dans la forme des triangles, dont la somme des angles intérieurs est respectivement plus grande et plus petite que π en géométrie sphérique et hyperbolique, ce qui se reflète par leur forme bombée ou amincie lorsque ceux-ci sont illustrés à la figure 1.2. Encore un autre aspect de cette dualité est le rôle des fonctions trigonométriques hyperboliques en géométrie hyperbolique, équivalent à celui des fonctions trigonométriques standards en géométrie sphérique. L'objectif de ce chapitre est de mieux saisir les grandes lignes de ces géométries.

Les paragraphes précédents s'inspirent et résument l'amorce de l'ouvrage de Ratcliffe [4, Chapitre 1], une version informelle et condensée de l'histoire de la découverte des espaces hyperboliques. Des remarques historiques plus détaillées à ce sujet sont aussi présentées à la section 1.4.1. Du reste, le présent chapitre met en place les notions essentielles des espaces hyperboliques sur lesquels seront éventuellement définis les réseaux aléatoires. La section 1.1

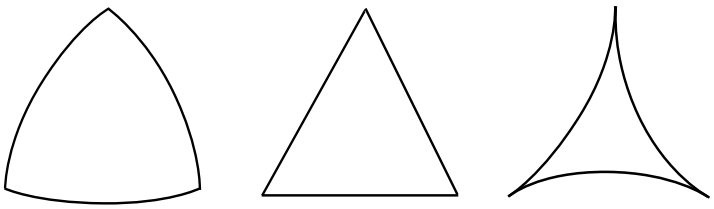


FIGURE 1.2 – Intuition sur la forme des triangles sphériques, euclidiens et hyperboliques, lorsqu'ils sont projetés dans $\mathbb{R}^2$

introduit sommairement quelques notions d'espaces métriques, de topologie et de géométrie différentielle. Tout aussi brièvement, on présente à la section 1.2 un aperçu de la théorie de la mesure et des probabilités. Ce contexte est ensuite appliqué afin de définir plus spécifiquement les géométries sphériques et hyperboliques, respectivement aux sections 1.3 et 1.4. Des références supplémentaires sont fournies dans chaque section. On suppose que la personne qui lit ces lignes est familière avec la théorie des ensembles et le calcul différentiel.

1.1 Notions préalables

Cette section se veut en quelque sorte une randonnée mathématique en bottes de sept lieues vers les variétés riemanniennes, qui constituent après tout l'ingrédient de base des géométries sphériques et hyperboliques. Pour y arriver sans s'égarer, de nombreux ouvrages ont été consultés. On suit d'abord le classique de Rudin [5] pour évoquer certaines notions d'espace et de topologie métriques, ainsi que le manuel de Nakahara [6] pour les notions de topologie générale et les liens avec la physique. Enfin, l'approche adoptée par Morita [7] permet de compléter avec quelques notions de géométrie différentielle. Des références plus précises sont disséminées dans le texte et certaines notions sont présentées plus intuitivement, notamment celles en lien avec la courbure.

À partir d'un ensemble de points, de nombreuses propriétés découlent naturellement lorsqu'entre les points est définie une *distance*.

Définition 1.1.1 (Espace métrique) Soit un ensemble $\mathcal{X}$. Si chaque paire de points $x, y \in \mathcal{X}$ est associée à un nombre réel $d(x, y)$, appelé la *distance entre x et y*, tel que

i) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$ (positivité) ;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, pour tout $z \in \mathcal{X}$ (inégalité triangulaire),

alors la paire $(\mathcal{X}, d)$ est un *espace métrique*. Toute fonction $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ qui respecte ces trois propriétés est une *fonction de distance* ou une *métrique*.

L'espace métrique est parfois simplement noté $\mathcal{X}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion de fonction de distance possible. Si la condition i) est remplacée par $d(x, y) \geq 0$ si $x \neq y$, c'est-à-dire que d n'est pas définie positive et deux points distincts peuvent être à une distance nulle, la fonction et l'espace sont dits *pseudo-métriques* ou *semi-métriques*. Une métrique essentielle en physique découle du produit scalaire entre des vecteurs d'un espace vectoriel.

Définition 1.1.2 (Espace vectoriel) Un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur un corps $\mathcal{K}$ est un ensemble au sein duquel les opérations d'addition de vecteurs (les éléments de $\mathcal{V}$) et de multiplication

par les scalaires (les éléments de $\mathcal{K}$) sont bien définies et respectent les axiomes suivants

$$\begin{aligned}
&\text{i) } x+y=y+x && \text{v) } a(x+y)=ax+ay\\
&\text{ii) } (x+y)+z=x+(y+z) && \text{vi) } (a+b)x=ax+bx\\
&\text{iii) } \exists 0\in\mathcal{V} \text{ t.q. } x+0=x && \text{vii) } (ab)x=a(bx)\\
&\text{iv) } \forall x\in\mathcal{V},\ \exists -x \text{ t.q } x+(-x)=0 && \text{viii) } \exists 1\in\mathcal{K} \text{ t.q. } 1x=x,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

où $x, y, z \in \mathcal{V}$ et $a, b \in \mathcal{K}$. Un espace vectoriel peut être muni d'un *produit scalaire*, soit une fonction $\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ commutative, distributive sur l'addition de vecteurs et bilinéaire. Il suit alors une norme définie par

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}, \tag{1.2}$$

ainsi qu'une distance, soit la norme de la différence entre deux vecteurs. Si en plus l'espace est complet [a], alors il s'agit d'un *espace de Hilbert.*

a. C'est-à-dire que les suites dont les termes se rapprochent convergent à un point de l'espace.

L'exemple de prédilection d'espace vectoriel est l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$ de dimension D.

Exemple 1.1.1 (Espaces euclidiens). Pour tout entier positif D, l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$ est l'ensemble des points

$$\mathbb{R}^D = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_D)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}\, \forall i = 1, \ldots, D\}, \tag{1.3}$$

où $(x_1, x_2, \ldots, x_D)$ sont les *coordonnées* de x. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^D$. Étant donné l'addition $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_D + y_D) \in \mathbb{R}^D$ et la multiplication par un scalaire $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_D) \in \mathbb{R}^D$, l'espace euclidien possède la structure d'*espace vectoriel sur le corps des réels*. Le *produit scalaire* est défini par

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{D} x_i y_i, \tag{1.4}$$

et il en découle la *norme d'un vecteur*

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{D} x_i^2}. \tag{1.5}$$

À partir d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et donc d'une norme, on peut définir une métrique [5, Théorème 1.37], ici la *distance euclidienne* entre les points de $\mathbb{R}^D$,

$$d_e(x, y) = |y - x|. \tag{1.6}$$

Le nombre de coordonnées D est la *dimension* de l'espace.

Remarquons qu'il est ici question d'« espaces », au pluriel. Celui-ci est utilisé pour dénoter la différence entre des espaces de dimensions distinctes, car malgré la similarité de la structure

métrique, les espaces eux-mêmes sont fort différents d'une dimension à l'autre. Dans l'exemple précédent, le produit scalaire entre deux vecteur définit la distance euclidienne standard, mais il en découle aussi la *séparation angulaire*.

Définition 1.1.3 (Séparation angulaire) Soient $x, y \in \mathbb{R}^D$. La *séparation angulaire entre deux vecteurs* $\theta : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \to [0, \pi]$ est donnée par l'angle

$$\theta(x, y) = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x|\,|y|}\right). \tag{1.7}$$

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$, il est possible que $\theta(x, y) = 0$ pour $x \neq y$, par exemple avec $y = \alpha x$, $\alpha \neq 1$. Par conséquent, la séparation angulaire ne constitue pas une métrique sur $\mathbb{R}^D$, mais bien une pseudo-métrique. En revanche, sur les sphères, la séparation angulaire est bel et bien une fonction de distance, qui sera développée à la section 1.3. Lorsque les points sont identifiés par des indices, la séparation angulaire est parfois notée plus succinctement à l'aide de ceux-ci, soit $\theta(x_u, x_v) = \theta_{uv}$.

Une transformation entre deux espaces qui préserve la distance entre les points est appelée une *isométrie* [8].

Définition 1.1.4 (Isométrie) Soient deux espaces métriques $(\mathcal{X}, d)$ et $(\mathcal{X}', d')$. Une bijection $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ telle que

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \tag{1.8}$$

pour tout $x, y \in \mathcal{X}$ est appelée une *isométrie* et on dit alors que f préserve les distances.

Lorsque deux espaces sont reliés par une isométrie, ils sont à toutes fins pratiques équivalents puisque la bijection et son inverse permettent de passer de l'un à l'autre sans changer les distances. Le concept mathématique de *boule* définit les voisinages des points dans des espaces métriques.

Définition 1.1.5 (Boule) Soit un espace métrique $(\mathcal{X}, d)$ et $x \in \mathcal{X}$. Alors, la *boule* ou le *voisinage* $\mathcal{B}(x, r)$ est l'ensemble de points

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in \mathcal{X}\,;\, d(x, y) < r\}. \tag{1.9}$$

La boule est ouverte lorsque les points $y \in \mathcal{X}$ tels que $d(x, y) = r$ ne sont pas inclus comme ci-haut, mais elle peut aussi être *fermée* si ces points sont inclus dans la boule.

Les boules ouvertes sont les ensembles fondamentaux de la topologie standard sur $\mathbb{R}^D$, liée à la structure métrique de l'espace, mais la topologie est en soi une branche plus générale des mathématiques. L'étymologie du mot « topologie » vient en fait du grec « topos », soit le *lieu*, et la discipline mathématique correspondante s'intéresse justement aux lieux, les *voisinages* des points d'un espace.

Définition 1.1.6 (Topologie) Soit $\mathcal{X}$ un ensemble et τ une collection de sous-ensembles de $\mathcal{X}$. Si et seulement si τ est telle que

i) $\emptyset \in \tau$, $\mathcal{X} \in \tau$;

ii) si $U_\alpha \in \tau \ \forall \alpha \in I$, alors [a] $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$;

iii) si $U_i \in \tau \ \forall i \in I$ avec I fini, alors $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau$,

alors il s'agit d'une *topologie* sur $\mathcal{X}$ et le doublet $(\mathcal{X}, \tau)$ est appelé un *espace topologique*. Un élément de la topologie $U \in \mathcal{X}$ est appelé un *ouvert* et $\forall x \in U$, on dit que U est un *voisinage* du point x. ⌟

a. Ici, I est un ensemble quelconque d'indices, possiblement indénombrable.

Bien que l'espace topologique soit une structure mathématique assez sobre, il est à la base de nombreuses branches des mathématiques. L'idée est de généraliser la notion d'intervalle ouvert sur la ligne afin que des notions essentielles, comme la continuité des fonctions et la convergence des suites, soient étendues à des espaces plus généraux. Par exemple, en topologie générale, la continuité est définie comme suit.

Définition 1.1.7 (Continuité) Soient $(\mathcal{X}, \tau_x)$ et $(\mathcal{Y}, \tau_y)$ deux espaces topologiques. La fonction $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est *continue* si pour tout ouvert $V \in \tau_y$, la préimage $f^{-1}(V) = \{x \in \mathcal{X} \,;\, f(x) \in V\}$ est un ouvert dans $\mathcal{X}$. ⌟

Dans $\mathbb{R}^1$, cette définition [2] revient à la définition plus familière en termes des limites pour une topologie particulièrement intéressante, la *topologie métrique*. Il s'agit de l'une des topologies les plus intuitives, elle est naturellement induite par la distance dans les espaces métriques.

Définition 1.1.8 (Topologie métrique) Soit un espace métrique $(\mathcal{X}, d)$. La topologie métrique sur cet espace est

$$\mathcal{T} = \bigcap \{\tau ;\, \tau \text{ est une topologie} \,;\, \forall x \in \mathcal{X},\, \forall r > 0,\, \mathcal{B}(x, r) \in \tau.\} \tag{1.10}$$

Il s'agit donc de la plus petite topologie qui contient toutes les boules ouvertes de $\mathcal{X}$. ⌟

La topologie métrique exemplifie en quoi étudier un espace du point de vue de sa topologie revient à s'attarder aux voisinages des points. Ceci permet notamment d'étudier localement des équivalences entre certains espaces topologiques. Notamment, un résultat standard dicte que la topologie métrique définie à l'aide de boules ouvertes sur $\mathbb{R}^D$ est équivalente à une topologie définie en termes de rectangles ouverts de la forme $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_D, b_D)$, où chaque (a_i, b_i) est un ouvert de $\mathbb{R}$.

En plus d'être des espaces métriques familiers, les espaces euclidiens sont aussi les exemples les plus simples de variétés. Les variétés sont la généralisation des courbes et des surfaces

2. Ailleurs dans ce travail, la notation f^{-1} servira aussi pour l'inverse de f, il faudra donc porter attention au contexte.

en dimension arbitraire. Intuitivement, une variété est un espace topologique qui ressemble localement à un espace euclidien, c'est-à-dire que pour chaque point il existe un voisinage qui peut être envoyé à un voisinage de $\mathbb{R}^D$ par une bijection continue. Si en plus ces bijections sont différentiables, la variété est dite *différentielle* [6, Chapitre 5].

Définition 1.1.9 (Variété différentielle) Soit $(\mathbb{R}^D, \mathcal{T})$ l'espace euclidien de dimension D muni de la topologie métrique. Soit un espace topologique (M, τ) et un ensemble de paires $\{(U_i, f_i)\}_i$ telles que $U_i \in \tau$ et $f_i : U_i \to U_i' \in \mathcal{T}\ \forall i$. Si les conditions suivantes sont respectées,

i) $\{U_i\}_i$ est une famille d'ouverts qui *recouvrent* M, c'est-à-dire que $\bigcup_i U_i = M$;

ii) chaque f_i est un *homéomorphisme* entre U_i et un ouvert $U_i' \subset \mathbb{R}^D$, c'est-à-dire qu'à la fois f_i et la bijection inverse $f_i^{-1} : U_i' \to U_i$ sont continues ;

iii) pour tous $U_i, U_j \in \tau$ tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la composition

$$f_i \circ f_j^{-1} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$$

est infiniment différentiable,

alors M est une *variété différentielle* de dimension D, ou une D-variété. Chaque doublet est appelé une *carte locale* et la famille de cartes $\{(U_i, f_i)\}_i$, un *atlas.*

La bijection inverse f_i^{-1} est parfois appelée la *paramétrisation* de la variété, puisqu'elle envoie des points de $\mathbb{R}^D$ à M, au même titre que, par exemple, une courbe paramétrée γ envoie les valeurs d'un paramètre $t \in [0, 1]$ à $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^2$. Un exemple de prédilection de variété est certainement le cercle.

Exemple 1.1.2 (Cercle et projection stéréographique). Soit le cercle unitaire

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}. \tag{1.11}$$

On montre qu'il s'agit d'une 1-variété en construisant l'atlas suivant :

$$\begin{aligned} U_1 &= S^1 \backslash \{(0,1)\} \qquad & U_2 &= S^1 \backslash \{(0,-1)\} \\ f_1(x) &= \frac{x_1}{1 - x_2}, & f_2(x) &= \frac{x_1}{1 + x_2}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Les deux cartes locales envoient un ouvert de S^1 à $\mathbb{R}^1$, et $U_1 \cup U_2 = S^1$. Les bijections inverses sont déterminées aisément avec $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Soit $u \in \mathbb{R}$ t.q. $u \neq 0$. Alors,

$$f_1^{-1}(u) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right), \qquad f_2^{-1}(u) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{1-u^2}{u^2+1}\right). \tag{1.13}$$

d'où il suit que les compositions $f_1 \circ f_2^{-1}$ et $f_2 \circ f_1^{-1}$ sur $U_1 \cap U_2 = S^1 \backslash \{(0,1), (0,-1)\}$ sont égales à $1/u$, donc infiniment différentiables partout sauf à $u = 0$.

En plus d'illustrer une variété différentielle toute simple, cet exemple introduit la projection

stéréographique, une notion importante pour un modèle d'espace hyperbolique présenté à la section 1.4. Bien que le cercle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et que les variétés différentielles tirent leur origine de surfaces lisses dans $\mathbb{R}^3$, en soi une variété n'a pas nécessairement à être globalement plongée dans un espace euclidien de dimension supérieure. Dans le cas général, les distances sont calculées à l'aide des cartes locales en fonction de la longueur de vecteurs d'espaces vectoriels définis en chaque point d'une variété, *les espaces tangents*.

Définition 1.1.10 (Espace tangent) Soit une D-variété différentielle M. Soit un point $p \in M$ et une carte locale (U, x) telle que $p \in U$ et $x(p) = (x_1, \ldots, x_D)$ sont les coordonnées locales de p dans $\mathbb{R}^D$. Alors, les vecteurs

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_D}\right|_p \tag{1.14}$$

forment une base de l'espace tangent T_pM, un espace vectoriel tangent à M au point p. Puisqu'une carte locale est associée à chaque point $p \in M$, un tel espace tangent existe en chaque point de la variété. ⌟

Plus rigoureusement, les vecteurs tangents sont définis afin de respecter une généralisation de la règle de dérivation en chaîne. Cela permet de démontrer que les dérivées partielles forment une base de l'espace tangent, au lieu de le poser comme une définition. L'important ici est surtout d'introduire l'existence des espaces tangents et leur interprétation intuitive afin d'en arriver aux variétés riemanniennes.

Définition 1.1.11 (Variété rimannienne) Soit une D-variété différentielle M. Si en chaque point $p \in M$, l'espace tangent T_pM est muni d'un produit scalaire [a] défini positif

$$g_p \ : \ T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \tag{1.15}$$

de sorte que $p \mapsto g_p(v_p, u_p)$ soit différentiable, alors M est une *variété riemannienne*. La famille [b] de produit scalaire $g = \{g_p, \ ; p \in M\}$ est appelée *métrique riemannienne*. Si (U, x) avec $x = (x_1, \ldots, x_D)$ est une carte locale de M, on peut poser

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad (p \in U) \tag{1.16}$$

de sorte que g soit telle une fonction de U ayant comme valeur une matrice symétrique définie positive de dimension $D \times D$. Dans ce cadre, la *norme* d'un vecteur tangent $v_p \in T_pM$ est définie par

$$|v_p| = \sqrt{g_p(v_p, v_p)}. \tag{1.17}$$

⌟

a. En géométrie différentielle, un tel « produit scalaire » est défini plus spécifiquement comme une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de l'espace tangent, aussi nommée tenseur métrique.

b. Il s'agit donc en fait d'un champ de tenseurs sur la variété M.

Il s'agit donc de munir la variété différentielle d'une famille de produits scalaires qui varient d'une manière suffisamment lisse. Grâce à la norme induite par la métrique riemannienne, il est possible de définir les isométries entre variétés riemanniennes. Qui plus est, la notion de *longueur* prend un sens précis.

Définition 1.1.12 (Élément de longueur sur une variété riemannienne) Soit une D-variété riemannienne M de métrique g. Soit un point $p \in M$ et une carte locale (U, x) telle que $p \in U$. Alors, l'*élément de longueur infinitésimal* sur M est donné par

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{D} g_{ij}\, dx_i\, dx_j, \tag{1.18}$$

ce qui définit entièrement la métrique de Riemann sur M.

L'élément de longueur ds est une manière classique de définir la métrique riemannienne, qui permet aussi de calculer la longueur des courbes et ainsi de définir les *géodésiques*, soient les chemins les plus courts entre deux points de la variété. Par exemple, les espaces euclidiens sont des variétés riemanniennes.

Exemple 1.1.3. Soit $\mathbb{R}^D$ en tant que variété. Les coordonnées standards $x = (x_1, \ldots, x_D)$ telles que $x = x_1 e_1 + \ldots + x_D e_D$ constituent avec $\mathbb{R}^D$ une carte locale qui recouvre trivialement tout l'espace. Alors,

$$ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_D^2 \tag{1.19}$$

est une métrique riemannienne qui peut aussi être notée sous forme matricielle par la matrice identité. La métrique est telle que

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_D} = e_1, \ldots, e_D \tag{1.20}$$

forme une base orthogonale en tout point $p \in \mathbb{R}^D$.

L'une des motivations à l'introduction des variétés est de généraliser certains concepts comme la longueur, la surface et le volume en dimension arbitraire. En théorie, intégrer sur des variétés nécessite l'introduction de quelques autres concepts comme les formes différentielles. Ce n'est cependant pas nécessaire à ce qui nous intéresse, parce qu'aucune telle intégrale n'est vraiment exécutée. Il s'agit simplement de définir adéquatement le volume de boules ouvertes en géométries sphériques et hyperboliques. Ceci sera fait spécifiquement pour ces exemples importants en fonction de leur paramétrisation dans les sections à venir.

Un résultat bien connu en théorie de la mesure et d'intégration, généralement demandé en exercice (par exemple dans [9, Chapitre 9, exercice 9.V]), dicte qu'une fonction réelle intégrable au sens de Riemann est toujours intégrable au sens de Lebesgue et que la valeur des intégrales est la même. Par conséquent, on ne distingue pas vraiment entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue lors de calculs de volume, puisqu'en pratique c'est tout bonnement le théorème

fondamental du calcul qui est appliqué.

Une dernière définition préalable qui occupe une place importante à l'arrière-plan de ce travail est celle de *courbure*. Au sens le plus large, la courbure quantifie à quel point un espace n'est pas plat, c'est-à-dire à quel point une courbe n'est pas une droite, une surface n'est pas un plan et ainsi de suite. Il existe de nombreuses définitions pour de tout aussi nombreux types d'espaces. Voici une liste peu exhaustive des différentes notions de courbure.

— *Cercle osculateur.* La première notion de courbure a été définie sur les courbes de dimension 1, en termes de cercle osculateur. La courbure en un point est alors égale à la courbure d'un cercle qui se confond à la courbe aux alentours de ce point. Pratiquement, cela revient à calculer à quel point la direction d'une courbe paramétrée change relativement à sa vitesse [10, Chapitre 1]. Il s'agit d'une notion *extrinsèque* de courbure.

— *Courbure de Gauss.* À un point d'une surface de dimension 2, la courbure peut changer selon la direction dans laquelle elle est mesurée. Les valeurs maximales et minimales des courbures selon toutes les directions possibles sont les *courbures principales* de la surface, reliées aux valeurs propres d'un opérateur en ce point. Le produit des deux courbures principales définit la courbure de Gauss, qui peut être positive, négative ou nulle. L'intégrale de surface de la courbure de Gauss est appelée la *courbure totale* d'une surface ou d'une portion de surface. Gauss a démontré dans son *Theorema egregium* en 1827 que la courbure de Gauss est une propriété intrinsèque à une surface, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de l'espace sous-jacent à la surface [10, Chapitre 5].

— *Tenseur de courbure de Riemann.* Avec l'avènement de la géométrie riemannienne, la courbure ne réfère plus simplement à un nombre réel. En relativité générale, la courbure scalaire est calculée en contractant les indices du tenseur de Ricci, lui-même la contraction du tenseur de courbure de Riemann. Le tenseur de courbure est entièrement déterminé par la *courbure sectionnelle*, qui quantifie localement à quel point la direction de vecteurs tangents change lorsqu'ils sont déplacés, ou autrement dit à quel point deux géodésiques ont tendance à se rapprocher ou s'éloigner [6, §7.3].

— *Courbure non positive générale au sens d'Alexandrov et Gromov.* Un espace métrique où entre chaque paire de points existe une géodésique peut être qualifié de *δ-hyperbolique*, ou de courbure non positive, si une inégalité sur les triangles est respectée [11]. La δ-hyperbolicité décrit la propriété des triangles à être « amincis » comme celui de la figure 1.2, une propriété qui est vérifiée sur le plan hyperbolique standard. En revanche, cette définition alternative de l'hyperbolicité est applicable à des espaces plus généraux.

— *Courbure d'Ollivier-Ricci des espaces métriques.* Sur des espaces métriques généraux, à la fois continus ou discrets, le mathématicien Yann Ollivier a défini en 2009 une courbure qui dépend d'une distance probabiliste entre les voisinages de points. Son mémoire d'habilitation [12] présente ces résultats, en plus d'introduire savamment l'intuition derrière diverses notions de courbure.

— De nombreuses autres définitions de courbures plus spécifiques à certains espaces ou moins répandues existent, notamment la courbure de Forman des complexes, graphes et hypergraphes [13].

Lorsque les espaces hyperboliques sont évoqués en tant qu'espaces de courbure négative constante, il s'agit spécifiquement de la courbure sectionnelle, définie sur les variétés riemanniennes. Un résultat bien connu en géométrie différentielle dicte que pour tout entier positif D et $K \in \mathbb{R}$, il existe une unique variété complète et simplement connexe de courbure constante K et de dimension D [14]. Selon que K soit positive, nulle ou négative, l'espace est sphérique, euclidien ou hyperbolique, voir [4, §8.6] pour plus de détails et une dérivation complète. Ceci ajoute encore à la dualité entre les espaces sphériques et hyperboliques.

D'un bout à l'autre de ce travail, les espaces métriques et variétés existent afin de pouvoir y déposer des points et les connecter aléatoirement, ce qui prendra un sens plus précis grâce à la section suivante.

1.2 Mesure et probabilités

Pour un.e physicien.ne moyen.ne, il y a peu de théories mathématiques en apparence si obscure que la mesure, pourtant couramment utilisée puisqu'elle est à la base de toute la théorie des probabilités. Au sens large, « mesurer » revient à évaluer la quantité de quelque chose, et c'est exactement ce qu'une mesure fait, mais rigoureusement, sur des ensembles. La section suivante introduit les bases de la théorie de la mesure en s'inspirant de l'ouvrage classique de Bartle [9], ainsi que quelques notions de probabilité en suivant [15].

Pour intégrer et définir des lois de probabilités sur des espaces moindrement exotiques, il est avant tout nécessaire de définir une manière de quantifier ces espaces, et en particulier, quels types de sous-ensembles de l'espace *peuvent* être mesurés.

Définition 1.2.1 (Tribu) Soit un ensemble $\mathcal{X}$ non vide. Une *tribu* ou *σ-algèbre* est une collection $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ telle que

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ A^C \in \mathcal{A} \quad (A^C := \mathcal{X} \backslash A)$;

iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A},\ \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des *ensembles mesurables* et le couple $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable*. ⌟

Un exemple de tribu est l'ensemble puissance, qui contient tous les sous-ensembles d'un ensemble, ce qui satisfait trivialement les conditions de la définition 1.2.1.

Exemple 1.2.1 (Tribu discrète). Soit un ensemble $\mathcal{X}$. L'ensemble puissance de $\mathcal{X}$,

$$\mathscr{P}(\mathcal{X}) = \{A\,;\, A \subseteq \mathcal{X}\} \tag{1.21}$$

est la plus grande tribu sur $\mathcal{X}$. ⌟

D'un coup d'oeil rapide on pourrait confondre la tribu avec la topologie définie à la sous-section précédente, mais il s'agit bel et bien de structures mathématiques fort différentes. En effet, le complément d'un ouvert ne fait pas nécessairement partie de la topologie, contrairement à ce qui est dicté par la condition ii) dans la définition 1.2.1. Néanmoins la topologie métrique est fort utile pour définir une tribu essentielle à la mesure d'espaces métriques.

Définition 1.2.2 (Tribu de Borel) Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace métrique et τ sa topologie métrique. La *tribu de Borel* ou *tribu borélienne* sur $\mathcal{X}$ est

$$\sigma(\tau) = \bigcap\{\mathcal{A}\,;\, \mathcal{A} \text{ est une tribu, } \tau \subseteq \mathcal{A}\}, \tag{1.22}$$

soit la plus petite tribu qui contient les ouverts de l'espace. On dit aussi que cette tribu est engendrée par les ouverts. Un élément de la tribu de Borel est appelé un *ensemble de Borel* ou un *sous-ensemble de Borel.* ⌟

La tribu de Borel est donc la plus petite collection de sous-ensembles de $\mathcal{X}$ qui est une tribu et qui contient toutes ses boules ouvertes. Une *mesure* est une fonction qui envoie des ensembles mesurables de la tribu à un nombre réel non négatif.

Définition 1.2.3 (Mesure) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est une fonction $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ telle que

i) $m(\emptyset) = 0$

ii) Si $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont deux à deux disjoints, alors

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n), \tag{1.23}$$

et on dit que m respecte la condition d'*additivité dénombrable.*

Le triplet $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$ s'appelle un *espace mesuré.* ⌟

De cette définition suit fort naturellement celle d'une mesure de probabilité.

Définition 1.2.4 (Mesure de probabilité) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré. Alors, m est une *mesure de probabilité* si

$$m(\mathcal{X}) = 1 \tag{1.24}$$

Dans ce cas, $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$ est appelé un *espace probabilisé* et m est une *loi de probabilité.* Il s'ensuit que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des évènements possibles avec $m(A)$ la probabilité que l'évènement $A \in \mathcal{A}$ se réalise. ⌟

Sur les variétés différentielles, il est naturel de définir une mesure en termes du volume de l'espace. C'est notamment l'approche adoptée par [16], quoiqu'implicitement puisque le terme « mesure » n'est pas mentionné.

Si le volume d'une variété M est fini[3], une mesure de probabilité sur un sous-ensemble mesurable $X \in M$ naturellement de $\mathrm{Vol}(X)/\mathrm{Vol}(M)$. L'exemple le plus simple d'une telle mesure est certainement la mesure de Lebesgue d'un intervalle réel.

Exemple 1.2.2 (Mesure de Lebesgue d'un intervalle). Soit l'intervalle $[0,1]$. Soit $a, b \in [0,1]$, $a < b$. La mesure de Lebesgue m est telle que $m([a,b]) = b - a$. Alors,

$$\mathrm{Vol}([0,1]) = m([0,1]) = 1, \tag{1.25}$$

et m constitue une mesure de probabilité uniforme sur l'intervalle. ⌟

Ainsi, ce sont uniquement les espaces métriques de volume fini qui peuvent être munis d'une mesure de probabilité. C'est notamment le cas pour les sphères qui seront abordées dans la prochaine section. Qui plus est, lorsqu'un espace métrique $\mathcal{X}$ n'est pas de volume fini, il est toujours possible de définir l'espace de probabilité comme un sous-ensemble de $\mathcal{X}$. Cette astuce sera notamment utilisée pour définir la mesure de probabilité des espaces hyperboliques à la section 1.4.

Cette section, en plus de faire le pont entre les probabilités sur les variétés et leur volume, sert aussi à présenter un résultat sur les *mesures uniformément distribuées*.

Définition 1.2.5 (Mesure uniformément distribuée) Soit $(\mathcal{X}, \sigma(\tau), m)$ un espace métrique mesuré muni de la tribu de Borel $\sigma(\tau)$ et d'une mesure m régulière[a]. Alors, m est *uniformément distribuée* si

$$0 < m(\mathcal{B}(x,r)) = m(\mathcal{B}(y,r)) < \infty \tag{1.26}$$

pour tous points $x, y \in \mathcal{X}$ et $0 < r < \infty$, c'est-à-dire que la mesure d'une boule dépend seulement de son rayon. ⌟

a. La régularité est une propriété qui assure la cohérence entre la mesure des éléments de la tribu à celle des ouverts [17, Chapitre 2].

Il s'avère que dans la plupart des espaces métriques communs, toutes les mesures uniformément distribuées sont proportionnelles [18], c'est-à-dire que $m(A) = cm'(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, avec m et m' deux mesures. Par conséquent, ce résultat garantit aussi qu'il existe une unique mesure de probabilité uniforme sur un espace métrique, puisque la mesure de probabilité d'un espace est normalisée à 1.

Un dernier concept fondamental en probabilités qui assied l'intuition derrière les expériences aléatoires est celui de *variable aléatoire*.

3. Voir [16, Chapitre 5, §22] pour une définition systématique du volume d'une variété.

Définition 1.2.6 (Variable aléatoire) Soit un espace probabilisé $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$ et un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Alors, une *variable aléatoire* est une *fonction mesurable* $X : \mathcal{X} \to E$, c'est-à-dire une fonction X dont la préimage d'un ensemble mesurable $U \in \mathcal{E}$ est mesurable, $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est induite par la mesure de probabilité de l'image de X. Par exemple, à partir de la définition ci-haut, la loi de probabilité de X est $m \circ X^{-1}$, soit l'image par X de m. Si une variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Borel, et que sa loi de probabilité est absolument continue[4] par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on peut définir sa *densité de probabilité* par la fonction intégrable f_X telle que pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}$,

$$\text{Prob}[x \in A] = \int_A f_X(x)\, dx. \tag{1.27}$$

Il s'agit seulement des grandes lignes de l'intuition derrière la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue, soit une fonction qui intègre à 1, mais qui assigne une probabilité de 0 aux points individuels. En fait f_X réfère à la dérivée de Radon-Nikodým de la mesure image de X et est liée au théorème de Radon-Nikodým-Lebesgue [15].

Au total, la probabilité d'un évènement réfère à la mesure de probabilité de celui-ci, une fonction positive définie sur la tribu d'un espace probabilisé. La loi de probabilité d'une variable aléatoire est sa mesure image, et si celle-ci est continue, dans certains cas on peut aussi la décrire en termes de sa densité de probabilité. Pour concrétiser tout cela, voici une variable aléatoire qui décrit la position d'un point sur l'intervalle de l'exemple 1.2.2.

Exemple 1.2.3 (Position aléatoire d'un point dans un intervalle). Soit l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue pour être un espace probabilisé. Soit X, une variable aléatoire continue décrivant la probabilité de retrouver un point tiré de manière uniformément aléatoire dans un intervalle $(a, b) \subset [0, 1]$. Alors,

$$\text{Prob}[x \in (a, b)] = \frac{m((a, b))}{m([0, 1])} = b - a \tag{1.28}$$

et la densité de probabilité de la variable aléatoire X est tout bonnement donnée par

$$f_X(x) = 1. \tag{1.29}$$

S'il n'y a pas de confusion possible sur la variable aléatoire dont il est question, la notation peut être allégée en notant simplement la densité $f(x)$.

C'est à l'instar de cet exemple qu'échantillonner des points dans un espace selon une densité de probabilité prend son sens. En particulier, ce sont les positions des noeuds de réseaux aléatoires qui seront déterminés dans des espaces sphériques et hyperboliques au prochain chapitre.

4. C'est-à-dire que la mesure image de tout ensemble de mesure nulle est aussi nulle.

1.3 Géométrie sphérique

Au sens le plus large, la sphère est une variété de courbure constante positive. En fait, il s'agit de plusieurs variétés selon la valeur de R et la dimension des sphères. Non seulement il s'agit du modèle le plus simple d'espace courbé, ce qui prépare le terrain pour les espaces hyperboliques, mais la géométrie sphérique occupe aussi une place de choix pour le modèle de réseaux hyperboliques utilisé au Chapitre 3.

1.3.1 Définitions

Tout juste après l'espace euclidien, la variété la plus simple en dimension arbitraire est certainement la sphère D-dimensionnelle, qui est d'abord définie en tant qu'espace métrique comme suit.

Définition 1.3.1 (Espace sphérique) Soit $R > 0$. La D-sphère $S^D(R)$ de rayon R est l'ensemble de points

$$S^D(R) := \{x \in \mathbb{R}^{D+1} \,;\, |x| = R\}. \tag{1.30}$$

Lorsque $S^D(R)$ est munie de la fonction de distance

$$d_s(x, y) = R\theta(x, y), \tag{1.31}$$

où θ est la séparation angulaire de la définition 1.1.3, elle forme un espace métrique, appelé *D-espace sphérique*. Lorsque le rayon R ne porte pas à confusion, on note simplement S^D pour alléger la notation. ⌟

Pour $D = 1$, il s'agit d'un cercle de rayon R et en $D = 2$, de la sphère standard[5]. Par extension, en plus de dimensions, il s'agit toujours de l'ensemble de points à la même distance R de l'origine, bien que ce soit alors plus ardu de l'illustrer. La démonstration que d_s est une métrique sur S^D est assez simple et donnée dans [4, Théorème 2.1.2]. Remarquons aussi que $0 \leq d_s(x, y) \leq R\pi$, avec une distance en radians pour le cas standard $R = 1$. Les géodésiques de S^D sont les grands arcs de cercle, c'est-à-dire que pour $x, y \in S^D$, $D > 1$, le chemin le plus court entre x et y se trouve sur l'intersection de S^D et d'un plan euclidien 2-dimensionnel qui passe ces deux points et par l'origine de $\mathbb{R}^{D+1}$.

Dans la définition 1.3.1, l'ensemble de points $S^D(R) \subset \mathbb{R}^{D+1}$ est défini de manière extrinsèque en termes des coordonnées euclidiennes. Or, puisqu'il s'agit d'une D-variété, S^D peut être paramétrisée par D coordonnées angulaires analogues aux coordonnées sphériques usuelles pour $D = 2$.

5. La notation S^D est la convention qui prévaut en topologie, où D est la dimension de la variété qu'est la D-sphère. Il est bon de le mentionner, car en géométrie, le D dénote plutôt la dimension de l'espace euclidien dans lequel S^D est incluse.

Définition 1.3.2 (Coordonnées sphériques) Soit $x \in \mathbb{R}^D$, $D > 1$. Les *coordonnées sphériques* de x sont la coordonnée radiale $\rho = |x|$, ainsi que $D-1$ coordonnées azimutales $\varphi_i \in [0, \pi]$ pour $i = 1, \ldots, D-1$ et une coordonnée polaire $\varphi_D \in [0, 2\pi)$ qui satisfont le système d'équation

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi_1 \\ x_2 &= \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ &\vdots \\ x_D &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{D-1} \cos \varphi_D \\ x_{D+1} &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{D-1} \sin \varphi_D. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Il s'agit d'une généralisation des coordonnées sphériques usuelles à une dimension D arbitrairement grande. ⌟

Définition 1.3.3 (Paramétrisation de S^D par coordonnées sphériques) Soit la fonction $s : [0, \pi]^{D-1} \times [0, 2\pi] \to S^D$ définie par

$$s(\varphi_1, \ldots, \varphi_D) = (x_1, \ldots, x_{D+1}), \tag{1.33}$$

où les coordonnées x_i satisfont le système d'équations (1.32) avec $\rho = R$. Alors, s est la *paramétrisation par coordonnées sphériques* de S^D, une surjection sur tout son domaine et une injection sur $(0, \pi)^{D-1} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^D$. ⌟

Remarquons que sur l'ouvert $(0, \pi)^{D-1} \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^D$, s est une carte locale de la variété. La fonction s n'est pas une bijection sur tout l'espace puisque les points aux pôles devraient être traités dans d'autres cartes. En revanche, puisque ces points sont de mesure nulle, pour les calculs de volume qui nous intéressent, la paramétrisation donnée par la définition 1.3.3 est suffisante.

Les éléments de ligne et de volume sur les D-sphères sont donnés par

$$d_{S^D} s^2 = R^2 \left[d\varphi_1^2 + \sin^2 \varphi_1 d\varphi_2^2 + \ldots \sin^2 \varphi_1 \ldots \sin^2 \varphi_{D-1} d\varphi_D^2 \right] \tag{1.34}$$

et

$$d_{S^D} V = R^{D-1} \prod_{i=1}^{D} \sin^{D-i} \varphi_i \, d\varphi_i. \tag{1.35}$$

Ici, le « volume » réfère toujours au D-volume de la variété, par exemple à la surface pour la 2-sphère, par opposition au volume de l'intérieur de celle-ci dans l'espace euclidien sous-jacent.

1.3.2 Mesure sphérique

Un sous-ensemble $X \subset S^D$ est mesurable dans S^D si et seulement si $s^{-1}(X)$ est mesurable dans $\mathbb{R}^D$. En particulier, tous les sous-ensembles de Borel de S^D sont mesurables dans S^D [4,

§2.4]. Si X est mesurable dans S^D, alors le volume de X est défini par

$$\mathrm{Vol}(X) = \int_{s^{-1}(X)} d_{S^D} V \tag{1.36}$$

Par linéarité de l'intégrale, le volume sphérique de l'équation (1.36) respecte la condition d'additivité dénombrable de la définition 1.2.3 d'une mesure. La mesure de probabilité sur la sphère est définie en termes du volume.

Définition 1.3.4 (Mesure sphérique) Soit la D-sphère $S^D(R)$ munie de la tribu de Borel. La mesure sphérique m_s d'un ensemble mesurable $X \subset S^D(R)$ est donnée par

$$m_s(X) = \frac{\mathrm{Vol}(X)}{\mathrm{Vol}(S^D(R))}, \tag{1.37}$$

soit le volume de X normalisé.

Il existe plusieurs autres manières de définir une mesure de probabilité uniformément distribuée sur la D-sphère, par exemple à l'aide de la mesure de Lebesgue ou de Hausdorff. Or, le résultat de Christensen [18] mentionné à la fin de la section précédente montre que deux telles mesures sont nécessairement proportionnelles, donc équivalentes lorsque normalisées pour obtenir une mesure de probabilité. Soit une variable aléatoire Φ à valeur dans $S^D(1)$ qui décrit la position angulaire d'un point tiré uniformément au hasard selon la mesure de l'équation (1.37). En coordonnées sphériques, sa densité de probabilité est donnée par [19]

$$\begin{aligned} f_\Phi(\varphi_i) &= \frac{\sin^{D-i}\varphi_i}{I_{D,i}}, \\ I_{D,i} &= \int_0^\pi \sin^{D-i}\varphi \, d\varphi_i = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{D-i+1}{2})}{\Gamma(1+\frac{D-i}{2})}, \quad i < D, \\ I_{D,D} &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

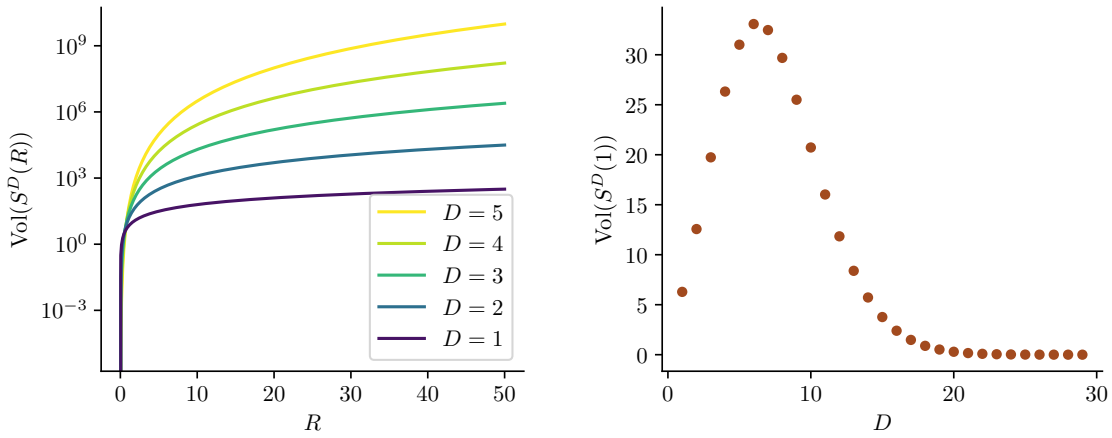
Or, on peut aussi définir d'autres densités sur les D-sphères à l'aide des cartes locales, notamment l'équivalent de distributions normales projetées sur $S^D(R)$.

En dépit de leur simplicité, la géométrie des sphères de plus grande dimension conserve une aura de mystère auprès de la communauté mathématique. En guise d'exemple, la mathématicienne Maryna Viazovska a reçu tout récemment la médaille Fields 2022 pour ses travaux sur l'arrangement de sphères qui occupe le moins d'espace dans $\mathbb{R}^8$ et $\mathbb{R}^{24}$ [20]. Pour se donner une meilleure intuition sur les sphères en dimension arbitraire, il est aussi possible d'étudier certaines de leurs propriétés.

1.3.3 Propriétés

Le volume D-dimensionnel de $S^D(R)$ peut être calculé en intégrant l'équation (1.36), et est [8]

$$\mathrm{Vol}(S^D(R)) = \frac{2\pi^{D+1/2}}{\Gamma(D+1/2)} R^D. \tag{1.39}$$



(a) (b)

FIGURE 1.3 – Volume des sphères selon la dimension et le rayon. (a) D-volume d'une D-sphère en fonction du rayon, pour $D \in 1, 2, 3, 4, 5$ et (b) D-volume de $S^D(1)$ en fonction de la dimension D.

Ceci donne bien sûr $\mathrm{Vol}(S^1(R)) = 2\pi R$ pour la circonférence du cercle et $\mathrm{Vol}(S^2(R)) = 4\pi R^2$ pour l'aire de la sphère. À rayon R égal, le volume des D-sphères augmente donc exponentiellement avec la dimension, tel qu'illustré à la figure 1.3a. Cependant, en très grandes dimensions cet effet est équilibré par le dénominateur de l'équation (1.39) qui se comporte en $D!$. Ce phénomène est mis en évidence lorsqu'on fixe un rayon constant, par exemple $R = 1$, afin de se donner une idée de comment le volume varie selon la dimension, ce qui est présenté à la figure 1.3b.

On s'intéresse aussi à l'aire de calottes de S^D, c'est-à-dire au D-volume d'une boule ouverte $\mathcal{B}(x, r)$ de rayon $r = R\phi$ à la surface de la D-sphère,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(x, R\phi)) = \int_0^\phi \mathrm{Vol}(S_{D-1}(R\sin\theta))R\,d\theta = \frac{2\pi^{D/2}R^D}{\Gamma(D/2)}\int_0^\phi \sin^{D-1}\,d\theta. \tag{1.40}$$

On intègre donc l'aire d'une $(D-1)$-sphère de rayon $R\sin\theta$ le long du grand arc de longueur $R\phi$. En $D = 1$, il s'agit trivialement de la longueur d'arc $2R\phi$. En $D = 2$, on a plutôt

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(x, R\phi)) = 2\pi R^2\int_0^\phi \sin\theta\,d\theta = 2\pi R^2(1 - \cos\phi). \tag{1.41}$$

L'équation ci-haut exprime une propriété des espaces sphériques : l'aire des disques y est plus petite que dans l'espace euclidien, en particulier elle est réduite d'un facteur $(1 - \cos\phi)$.

Une autre curiosité des D-sphères de très grande dimension est liée à la distance entre des points $x, y \in S^D$ tirés aléatoirement. Soit X, la variable aléatoire décrivant la séparation angulaire θ entre deux points tirés aléatoirement sur S^D selon la distribution uniforme de l'équation (1.38). Alors, la loi de probabilité de X est donnée par

$$f_X(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(d/2)}{\Gamma(d+1/2)} \sin^{D-1}\theta, \tag{1.42}$$

Il s'agit d'un résultat bien connu, le calcul explicite est notamment donné dans [21]. L'équation (1.42) est illustrée à la figure 3.2. Dans la limite où $D \gg 1$, le mode de la distribution est de plus en plus centré autour de $\pi/2$, c'est-à-dire que deux points choisis uniformément au hasard seront presque toujours à une séparation angulaire de $\pi/2$. Cette propriété des D-sphères est l'un des premiers et principaux exemples du phénomène de concentration de la mesure. Une autre manière d'obtenir et interpréter ce résultat est d'étudier le volume de boules ouvertes de rayon r non infinitésimaux lorsque la dimension devient très grande, l'approche présentée par Ledoux dans [22, Section 1.1]. Il s'agit en fait d'une application particulière d'un théorème de Gromov et Milman [23] qui s'applique à toute variété riemannienne compacte.

À la lumière de ce qui a été présenté sur les espaces sphériques, voyons de quoi il en retourne pour leurs analogues à courbure négative.

1.4 Géométrie hyperbolique

Bien que la géométrie hyperbolique soit souvent présentée sur un pied d'égalité avec ses consœurs euclidienne et sphérique, son développement a été passablement plus tumultueux. Afin de rendre justice à ce contexte et se donner un aperçu des nombreux modèles de géométrie hyperbolique, cette section commence avec quelques remarques historiques.

1.4.1 Remarques historiques

Ces quelques paragraphes ne rendent certainement pas honneur à l'ampleur des travaux des scientifiques impliqués. Un récit plus complet est donné par Milnor [24]. Les ouvrages de Bonola [25] et Stillwell [26] ont aussi été consultés, respectivement pour la première et la seconde phase de cette saga houleuse.

Pendant des siècles, de nombreux mathématiciens [6] ont tenté de démontrer l'axiome des parallèles d'Euclide (voir les premiers paragraphes de ce chapitre) à partir des postulats précédents. Pour paraphraser Bonola [25], cette hypothèse a mené à vingt siècles d'efforts en vain. Or, en supposant cet axiome faux ou en définissant une géométrie indépendante de celui-ci, (au moins) trois mathématiciens ont ouvert la porte d'une toute nouvelle géométrie, alors dite *non euclidienne*.

Les premières traces écrites d'un succès en ce sens se trouvent dans les manuscrits non publiés de Carl Friedrich Gauss (1777-1855). D'aucuns pourraient croire qu'il serait sûrement parvenu

6. Si nombreux qu'on ne pourrait tous les nommer ici, notamment des géomètres grecs et arabes au début de notre ère, en plus de maints mathématiciens européens à partir de la Renaissance.

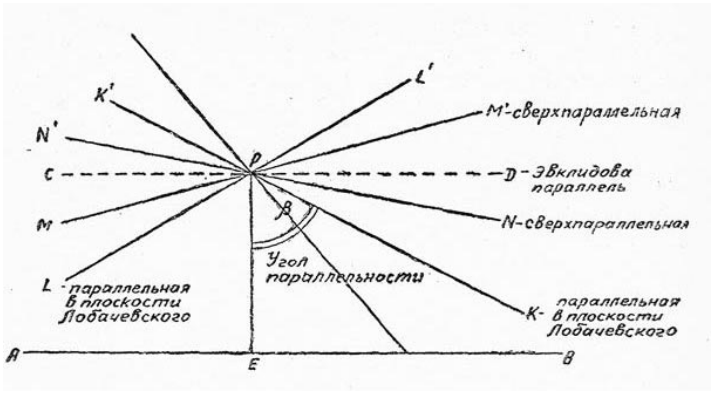


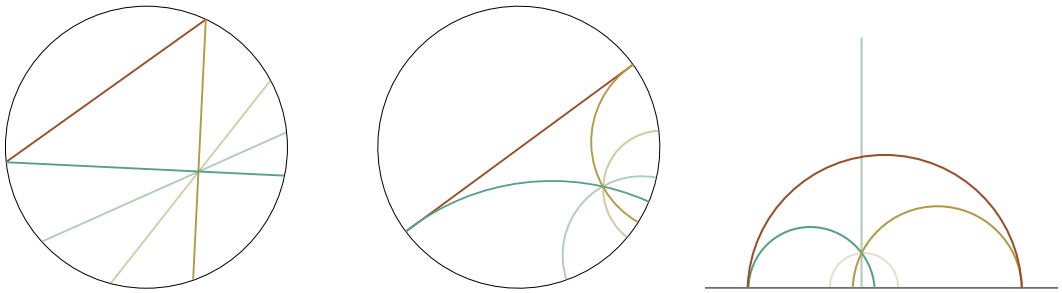
FIGURE 1.4 – Illustration de la négation de l'axiome des parallèles par Lobachevsky dans [27]. Les lignes ne sont pas courbées dans cette représentation, car l'interprétation d'une surface de courbure négative est apparue quelques décennies plus tard grâce à Beltrami.

à donner son nom à cette géométrie, si son travail n'avait pas été interrompu par la réception d'une copie des travaux du jeune mathématicien hongrois János [7] Bolyai (1802-1860), publiés en 1832 et fortement inspirés des travaux de son père Farkas [8] (1775-1856), ami et collaborateur de Gauss. Or, à leur insu les premiers éléments de géométrie hyperbolique avaient déjà été publiés en 1829-1830 par le mathématicien russe Nikolai Lobachevsky (1792-1856) dans un journal russe assez méconnu [25].

Dans son mémoire publié en russe, Lobachevsky construit une géométrie basée sur la négation de l'axiome des parallèles. Il suppose que plusieurs lignes parallèles à une ligne donnée peuvent être issues d'un même point. Il s'agit en quelque sorte d'une redéfinition du parallélisme puisqu'alors la distance entre les lignes n'est pas constante, tel qu'illustré par Lobachevsky lui-même dans [27], mais elles ne se croisent jamais. Plusieurs propriétés découlent de cette construction d'espace, dont la somme des angles intérieurs d'un triangle plus petite que π, propriété maintenant bien connue des espaces hyperboliques. Bolyai a pour sa part abordé le problème d'un autre angle, sans supposer la véracité ou la fausseté de l'axiome des parallèles. Ce faisant, il construit une géométrie dite *absolue*, qui englobe à la fois la géométrie sphérique, équivalente à la géométrie euclidienne pour un rayon infini, ainsi que la géométrie non euclidienne de Lobachevsky. Étrangement, l'aboutissement de siècles de recherches sur l'axiome des parallèles n'a pas reçu un accueil à la hauteur de cette découverte, probablement en raison de la barrière de la langue et du style apparemment douteux de Lobachevsky, ainsi que de la modeste renommée de Bolyai et Lobachevsky.

Le vent a tourné en 1868, lorsque Eugenio Beltrami a concrétisé cette nouvelle géométrie en l'interprétant comme une surface de courbure négative constante. Ceci a associé la géométrie hyperbolique à la géométrie différentielle classique, soit l'étude des courbes, surfaces et volumes, à la place d'être une construction axiomatique abstraite. En particulier, Beltrami a

7. Aussi connu sous le prénom Johann.
8. Aussi connu sous le prénom Wolfgang.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.5 – Représentations des trois modèles projectifs principaux du plan hyperbolique H^2. En (a), le disque projectif de Beltrami-Klein, en (b) le disque conforme de Beltrami-Poincaré et en (c) le modèle du demi-plan supérieur de Poincaré. Dans tous les cas, les lignes représentent des géodésiques parallèles.

proposé de comprendre les lignes droites de l'espace non euclidien de Bolyai et Lobachevsky illustrées à la figure 1.4 en tant que géodésiques d'une surface courbe. Dans son premier essai, Beltrami introduit un modèle où les géodésiques sont représentées par des segments de droites dans le disque unitaire du plan euclidien (voir figure 1.5a). Ce modèle est connu sous le nom de disque de Klein, en référence au mathématicien Felix Klein dont la publication a popularisé ce modèle. Klein a aussi utilisé pour la première fois l'adjectif « hyperbolique » pour caractériser la surface en question et en a donné une interprétation en termes de géométrie projective. Le grand succès du premier papier de Beltrami aura été de reconnaître qu'il s'agit en fait d'un modèle de la géométrie de Bolyai et Lobachevsky, ainsi que d'observer pour la première fois que les isométries de ce « plan » sont les transformations projectives du plan euclidien qui envoient le disque unitaire à lui-même. Dans son deuxième essai, lui aussi publié en 1868, Beltrami généralise ses observations à des variétés de dimension arbitraire. La contribution majeure de Beltrami est alors d'unifier de manière élégante trois modèles de géométrie hyperbolique préalablement présentés par Riemann, Liouville et Cayley [26], à l'aide de simples transformations de coordonnées entre ceux-ci. Les grandes lignes de ces modèles sont présentées au paragraphe suivant. Plus de détails et des traductions des papiers originaux se trouvent dans [24] et [26].

Trois modèles du plan hyperbolique sont définis dans $\mathbb{R}^2$, le modèle du disque projectif (ou disque de Klein, ou disque de Beltrami-Klein), le modèle du disque conforme (ou disque de Poincaré, ou disque de Beltrami-Poincaré) et le modèle du demi-plan supérieur, tous trois représentés à la figure 1.5. Dans les deux disques, les points du cercle à la frontière représentent les points à l'infini du plan hyperbolique. Dans le disque projectif, les géodésiques sont représentées par des cordes, les lignes droites dans le cercle. L'axiome des parallèles est illustré dans la figure 1.5a, où toutes les lignes qui se croisent sont parallèles à la ligne brune. Ce modèle n'est pas *conforme*, c'est-à-dire que les angles dans le disque euclidien ne sont pas égaux aux angles dans le plan hyperbolique. En revanche, comme son nom l'indique, le disque conforme

illustré dans la figure 1.5b respecte cette propriété. Dans ce modèle sur lequel nous reviendrons brièvement à la section 1.4.4, les géodésiques sont des arcs de cercle ou des diamètres. Enfin, si on déroule en quelque sorte le disque conforme en projetant sa circonférence sur l'axe réel, on obtient le modèle du demi-espace supérieur. Alors, les géodésiques sont aussi des arcs de cercle, mais qui coupent cette fois l'axe des abscisses tel qu'illustré à la figure 1.5c. Alors, la coordonnée en y est l'équivalent de la coordonnée radiale dans le modèle du disque conforme, elle-même étroitement reliée à la coordonnée radiale dans le modèle de l'hyperboloïde. Ce dernier modèle est le plus communément utilisé comme modèle de base de géométrie hyperbolique en sciences des réseaux puisqu'il exhibe naturellement la dualité avec la géométrie sphérique.

1.4.2 Définitions

Le fameux mathématicien David Hilbert a démontré en 1901 [4, 28] qu'il n'y a pas de surface lisse et complète ayant une courbure de Gauss négative et constante dans $\mathbb{R}^3$. C'est une des raisons pour lesquelles il existe autant de modèles du plan hyperbolique : contrairement à la sphère S^2, il ne peut pas être simplement défini comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$. Néanmoins, une telle définition de surface hyperbolique est possible dans un autre espace 3-dimensionnel, l'espace de Lorentz.

Définition 1.4.1 (Espace de Lorentz) Soit $D > 1$ et $x, y \in \mathbb{R}^D$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^D$ en tant qu'espace vectoriel muni du *produit scalaire de Lorentz*

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_D y_D. \tag{1.43}$$

forme un nouvel espace vectoriel appelé D-espace de Lorentz et dénoté $\mathbb{R}^{1,D-1}$ pour le distinguer de l'espace euclidien $\mathbb{R}^D$. La *norme de Lorentz* associée à ce nouveau produit scalaire est notée par

$$||x|| = \sqrt{x \circ x}, \tag{1.44}$$

et a la particularité d'être soit positive, nulle ou positive imaginaire. Le module de x est pour sa part noté $|||x|||$.

Un espace de Lorentz est loin d'être saugrenu, puisqu'il s'agit de la structure de notre espace-temps selon la théorie de la relativité restreinte. Dans cette théorie maintes fois validée expérimentalement [29], la première coordonnée de $\mathbb{R}^{1,3}$ est le temps et les trois autres sont les coordonnées spatiales, et ce cas particulier à quatre dimensions est appelé l'espace de Minkowski. Puisque dans $\mathbb{R}^{1,D}$ les longueurs imaginaires sont possibles, il est possible d'y définir l'espace hyperbolique H^D comme une sphère de rayon imaginaire, au même titre que S^D est une sphère de rayon réel. L'*hyperboloïde* ainsi défini, soit une surface à courbure négative constante, a en fait deux nappes déconnectées. C'est l'une d'entre-elles qui compose le modèle de l'hyperboloïde.

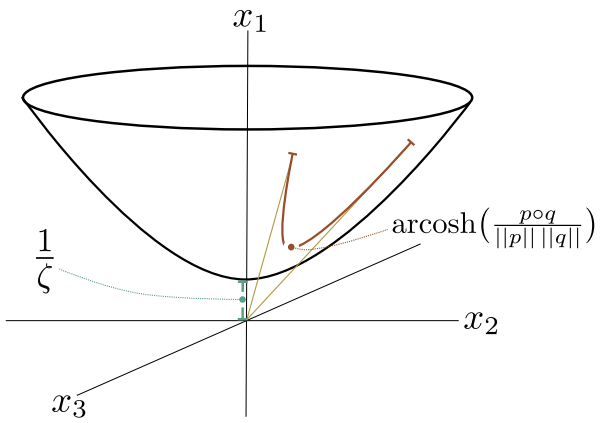


FIGURE 1.6 – Représentation de l'espace hyperbolique H^2 dans $\mathbb{R}^{1,2}$.

Définition 1.4.2 (Espace hyperbolique) Soit $D > 1$. Le *modèle de l'hyperboloïde de D-espace hyperbolique* est l'ensemble de points

$$H^D(\zeta) = \{x \in \mathbb{R}^{1,D} \ ; \ x_1 > 0, \ ||x||^2 = -1/\zeta^2\} \tag{1.45}$$

muni de la distance hyperbolique

$$d_h(x, y) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x \circ y}{||x||\,||y||}\right) \tag{1.46}$$

entre chaque paire de points $x, y \in H^D(\zeta)$. Lorsque le paramètre ζ ne porte pas à confusion, on le note simplement H^D. ⌟

L'équation (1.46) met en lumière que la distance d_h est analogue à l'angle entre les vecteurs de S^D, mais entre des points de l'hyperboloïde dans l'espace de Lorentz. On peut comprendre intuitivement cet état des choses à l'aide de la figure 1.6. Deux points de l'hyperboloïde (ici $D = 2$ à des fins d'imagerie) sont distincts si et seulement s'il y a un angle entre les vecteurs correspondants dans $\mathbb{R}^{1,2}$, c'est-à-dire qu'ils sont linéairement indépendants. La démonstration qu'il existe un unique nombre réel non négatif $d_h(x, y)$ $\forall x, y \in H^D$ découle justement de l'indépendance linéaire entre les vecteurs et se trouve dans [4, Théorème 3.1.7]. La démonstration qu'il s'agit d'une métrique sur H^D constitue quant à elle le Théorème 3.2.2 du même ouvrage, et suit de propriétés du produit vectoriel dans l'espace de Lorentz.

Le système équivalent aux coordonnées sphériques pour l'espace de Lorentz est défini comme suit.

Définition 1.4.3 (Coordonnées hyperboliques) Soit $x \in \mathbb{R}^{1,D}$, avec $D > 1$. Les *coordonnées hyperboliques* de x sont $\rho = |||x|||$, ainsi que $r \in [0, \infty)$, $D - 2$ coordonnées azimutales $\varphi_i \in [0, \pi]$ pour $i = 1, \ldots, D - 2$ et une coordonnée polaire $\varphi_{D-1} \in [0, 2\pi)$ qui satisfont le

système d'équation

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cosh r \\ x_2 &= \rho \sinh r \cos \varphi_1 \\ &\vdots \\ x_D &= \rho \sinh r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{D-2} \cos \varphi_{D-1} \\ x_{D+1} &= \rho \sinh r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{D-1}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Les coordonnées angulaires φ_i de ce système correspondent aux $D-1$ coordonnées sphériques angulaires de la $(D-1)$-sphère unitaire $S^{D-1}(1)$.

Au même titre que les coordonnées sphériques de la définition 1.3.3 qualifient S^D de manière plus intrinsèque que les coordonnées euclidiennes, les coordonnées hyperboliques permettent de naviguer sur l'hyperboloïde sans dépendre de la structure sous-jacente d'espace de Lorentz. Contrairement à [4, §3.4], on distingue r des coordonnées angulaires φ_i puisque r est reliée à la première coordonnée x_1 qui occupe une place distincte pour la paramétrisation de l'hyperboloïde [9].

Définition 1.4.4 (Paramétrisation par coordonnées hyperboliques) Soit $\zeta > 0$. La paramétrisation par coordonnées hyperboliques de $H^D(\zeta)$ est la fonction

$$\begin{aligned} h : [0,\infty) \times [0,\pi]^{D-2} \times [0,2\pi] &\to H^D \\ h(\zeta r, \varphi_1, \dots, \varphi_{D-1}) &= (x_1, \dots, x_{D+1}), \end{aligned} \tag{1.48}$$

où x_i est exprimé en termes des coordonnées hyperboliques à l'aide du système d'équations (1.47) avec $\rho = 1/\zeta$. Par continuité des fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques, h est continue et d'inverse continue.

Cette paramétrisation en termes de ζr met en lumière que la coordonnée r est en fait précisément la distance hyperbolique entre un point $X \in H^D(\zeta)$ et le « creux de l'hyperboloïde » [10], tel qu'illustré à la figure 1.6. Il est aussi possible d'interpréter ce choix afin que l'argument des fonctions trigonométriques hyperboliques des équations (1.48) soit sans dimension, en considérant que r aurait une dimension de distance et ζ de distance inverse. Cette paramétrisation est essentielle puisqu'elle est à la base des modèles de réseaux hyperboliques [19, 30].

La distance (1.46) entre deux points $x, x' \in H^D$ exprimées en termes des coordonnées hyperboliques est [4, Théorème 3.5.3]

$$d_h(x,x') = \frac{1}{\zeta} \operatorname{arcosh}\big[\cosh(\zeta r)\cosh\big(\zeta r'\big) - \sinh(\zeta r)\sinh\big(\zeta r'\big)\cos\theta\big], \tag{1.49}$$

où $\theta = \theta(x,x')$ est la séparation angulaire de la définition 1.1.3. Cette expression est obtenue à

9. En soi, r s'apparente à une première coordonnée azimutale hyperbolique, l'approche adoptée par Ratcliffe, qui allège la notation, mais s'écarte de la littérature des réseaux.

10. En réalité, il n'y a pas de point spécial à cet endroit, l'espace est homogène et isotrope, il s'agit simplement d'un artefact de la paramétrisation par coordonnées hyperboliques.

l'aide d'un peu de trigonométrie sur l'hyperboloïde. Elle découle de l'analogue hyperbolique à la loi des cosinus, qui met en relation la longueur des côtés des triangles et les angles intérieurs. La loi des cosinus hyperboliques se démontre à l'aide de propriétés des produits scalaires et vectoriels dans l'espace de Lorentz [4, Théorème 3.5.3].

Enfin, les éléments de ligne et de volume en coordonnées hyperboliques sont donnés par

$$d_{H^D}s^2 = dr^2 + \frac{1}{\zeta^2}\sinh^2(\zeta r)\big[d\varphi_1^2 + \sin^2\varphi_1 d\varphi_2^2 + \ldots + \sin^2\varphi_1 \ldots \sin^2\varphi_{D-2} d\varphi_{D-1}^2\big], \quad (1.50)$$

et

$$d_{H^D}V = \left(\frac{1}{\zeta}\sinh(\zeta r)\right)^{D-1} dr \prod_{i=1}^{D-1} \sin^{D-i}\varphi_i \, d\varphi_i. \quad (1.51)$$

1.4.3 Mesure hyperbolique

Suivant [4, §3.4], les ensembles mesurables de H^D sont définis en termes de la paramétrisation de la définition 1.4.4. En effet, un sous-ensemble X de H^D est dit *mesurable dans* H^D si $h^{-1}(X)$ est mesurable dans $\mathbb{R}^D$. En particulier, par continuité de h, tous les sous-ensembles de Borel de H^D sont mesurables. Par conséquent, les volumes D dimensionnels d'ensembles mesurables de H^D sont définis en termes d'intégrales sur des coordonnées angulaires à l'aide de la paramétrisation.

Définition 1.4.5 (Volume hyperbolique) Soit $X \subset H^D$, un ensemble mesurable. Le *volume hyperbolique* de X est donné par

$$\mathrm{Vol}(X) = \int_{h^{-1}(X)} d_{H^D}V. \quad (1.52)$$

Par exemple, une boule ouverte hyperbolique $\mathcal{B}(x,R) \subset H^D(\zeta)$ centrée au point x et de rayon R a comme préimage de la paramétrisation $[0,R) \times [0,\pi]^{D-2} \times [0,2\pi) \subset \mathbb{R}^D$. Son D-volume est donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(x,R)) &= \underbrace{\int_0^\pi \ldots \int_0^\pi}_{D-2} \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^{D-1} \sin^{D-i}\varphi_i d\varphi_i \int_0^R \left(\frac{1}{\zeta}\sinh(\zeta r)\right)^{D-1} dr \\ &= \mathrm{Vol}(S^{D-1}(1)) \int_0^R \left(\frac{1}{\zeta}\sinh(\zeta r)\right)^{D-1} dr\end{aligned} \quad (1.53)$$

En particulier pour $D = 2$, le volume est tout bonnement

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(x,R)) = 2\pi \int_0^R \frac{1}{\zeta}\sinh(\zeta r)\, dr = \frac{2\pi}{\zeta^2}(\cosh\zeta R - 1). \quad (1.54)$$

Cette expression est fort semblable à l'équation (1.41), avec un cosinus hyperbolique à la place du cosinus et $1/\zeta^2$ qui redimensionne l'aire de la boule selon la courbure. Puisque le

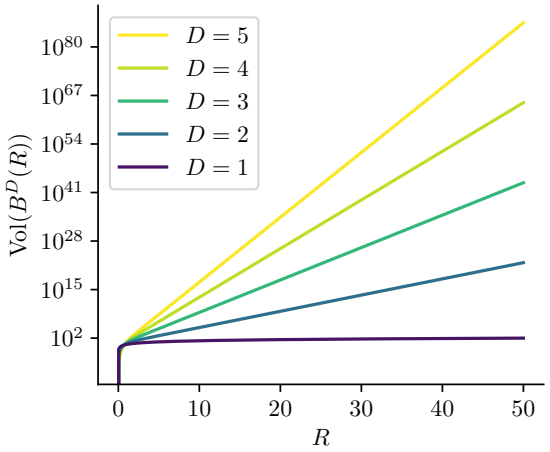


FIGURE 1.7 – Volume D-dimensionnel d'une boule hyperbolique selon la dimension et le rayon R, sur $H^D(1)$ où la courbure est -1.

cosinus hyperbolique varie en $e^{\zeta R}$, le volume des boules ouvertes sur l'hyperboloïde augmente exponentiellement avec la distance hyperbolique à x. La valeur de l'équation (1.53) est illustrée à la figure 1.7 selon R pour différentes valeurs de la dimension D.

Puisque les espaces hyperboliques ne sont pas de mesure finie, il faut considérer un sous-ensemble de l'espace afin de définir une mesure de probabilité sur celui-ci.

Soit la boule hyperbolique $B^D(\zeta, R)$ définie selon la paramétrisation par

$$B^D(\zeta, R) = \left\{x = h(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{D-1}) \in H^D(\zeta)\,;\, r \in [0, R)\right\}. \tag{1.55}$$

Alors, la mesure hyperbolique est définie comme suit.

Définition 1.4.6 (Mesure hyperbolique) Soit $\zeta > 0$, $R > 0$ ainsi que la boule hyperbolique $B^D(\zeta, R)$ correspondante munie de la tribu de Borel. La mesure hyperbolique d'un ensemble mesurable $X \subset B^D(\zeta, R)$ est donnée par

$$m_h(X) = \frac{\mathrm{Vol}(X)}{\mathrm{Vol}(B^D(\zeta, R))}, \tag{1.56}$$

soit le volume de X normalisé.

Plus spécifiquement, un point tiré uniformément au hasard sur $B^D(\zeta, R)$ a une densité de probabilité de coordonnée radiale donnée par [19]

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{u}}(r) &= \frac{\sinh^{D-1}(\zeta r)}{C_{D-1}(\zeta, R)} \\ C_{D-1}(\zeta, R) &= \int_0^R \sinh^{D-1}(\zeta r)\, dr, \end{aligned} \tag{1.57}$$

et les densités des coordonnées angulaires correspondent à la distribution uniforme sur la sphère S^{D-1} des équations (1.38). Cela justifie la mise en place exhaustive de la géométrie sphérique à la section précédente, en ce que l'échantillonnage sur une boule hyperbolique intègre de nombreuses notions en lien avec les D-sphères, puisque les D dimensions angulaires envoient à la D-sphère. L'équation 1.57 peut être remplacée par une loi non uniforme selon m_h pour varier la densité de points selon le rayon, notamment

$$f^{\mathrm{qu}}(r) = \frac{\sinh^{D-1}(\alpha r)}{C_{D-1}(\alpha, R)}. \tag{1.58}$$

Même en choisissant la plus petite dimension $D = 2$, il n'est pas simple d'illustrer les notions ci-haut sur l'hyperboloïde. Heureusement, H^D est intimement relié au modèle de la boule conforme.

1.4.4 Modèle de la boule conforme

À la manière de la projection conforme sur le disque de Beltrami-Poincaré illustrée à la figure 1.5b, H^D peut être projeté à l'intérieur d'une D-sphère, ce qui définit le modèle de la boule conforme [4, §4.5].

Définition 1.4.7 (Modèle de la boule conforme) Soit $\mathbb{B}^D \subset \mathbb{R}^D$, la boule unitaire D-dimensionnelle euclidienne suivante

$$\mathbb{B}^D = \{x \in \mathbb{R}^D \,;\, |x| \leq 1\}. \tag{1.59}$$

La *projection stéréographique* $\xi : \mathbb{B}^D \to H^D$ de la boule ouverte unitaire $\mathbb{B}^D$ à l'espace hyperbolique $H^D(1)$ est définie en projetant chaque point $x \in \mathbb{B}^D$ vers H^D par une ligne droite passant par le point $(-1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{1,D}$ selon

$$\xi(x) = \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x^2|}, \frac{2x_1}{1 - |x^2|}, \ldots, \frac{2x_D}{1 - |x^2|}\right). \tag{1.60}$$

La projection est bijective, et sa bijection inverse est

$$\xi^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{1 + y_1}, \ldots, \frac{y_{D+1}}{1 + y_1}\right), \tag{1.61}$$

pour tout $y \in H^D(1)$. Dans la boule, la distance est définie par

$$d_b(x, y) = d_h(\xi(x), \xi(y)), \tag{1.62}$$

c'est-à-dire qu'il s'agit simplement de la projection composée avec la distance hyperbolique sur l'hyperboloïde de courbure -1. ⌟

Ce modèle est particulièrement utile afin de représenter H^2 d'une manière qui donne un aperçu de comment les distances se comportent en géométrie hyperbolique. En particulier, les géodé-

siques correspondent aux arcs de cercle et aux diamètres qui forment des angles droits avec le cercle à la frontière du disque, ce qui se généralise aussi en plus grande dimension. Un avantage du modèle de la boule conforme est qu'il est potentiellement plus naturel d'imaginer l'intérieur de $S^{D-1} \subset \mathbb{R}^D$ muni d'une fonction de distance un peu particulière, qu'un hyperboloïde D-dimensionnel dans un espace de Lorentz.

Les réseaux hyperboliques sont généralement représentés sur un disque, à l'aide d'une coordonnée radiale et une coordonnée angulaire. La notation H^{D+1} est alors utilisée pour mettre en évidence la différence entre ces deux types de coordonnées. À partir du prochain chapitre, D représentera donc le nombre de coordonnées angulaires et non plus la dimension de la variété, avec par exemple $D = 1$ pour le disque. En plus grandes dimensions, il y a toujours une unique coordonnée radiale, mais alors D coordonnées angulaires.

1.4.5 Propriétés

Lorsque deux points sont placés sur H^D de sorte que leur coordonnée radiale soit loin de 0 et à une petite séparation angulaire, la distance hyperbolique d_h donnée par l'Éq. (1.46) peut être approximée par une expression plus simple (et fort importante en géométrie des réseaux). Le résultat est présenté ici dans ses grandes lignes uniquement, en omettant certaines hypothèses et la démonstration de cette approximation, qui est publiée dans [31, Lemme 2]. Une démonstration moins rigoureuse est proposée par [32].

Lemme 1. *Soient deux points $x, x' \in H^2$ de coordonnées hyperboliques respectives (r, φ) et (r', φ'). Soit aussi θ, la séparation angulaire entre eux. Alors, la distance hyperbolique entre x et x' est approximativement donnée par*

$$d_h(x, x') \approx r + r' + \frac{2}{\zeta} \log\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\zeta r} + e^{-\zeta r'}}{\theta^2}\right), \tag{1.63}$$

où la notation $\mathcal{O}$ indique l'ordre de grandeur du terme d'erreur[a]*.*

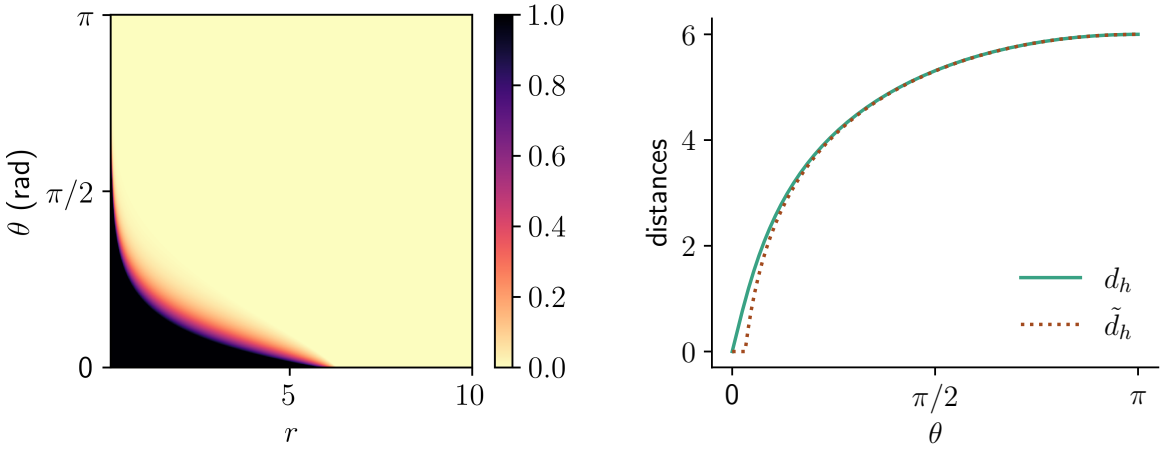
a. Cette notation prend un sens plus précis dans [31] en lien avec les hypothèses sur le lemme qui sont omises ici. Pour plus de détails sur la notation $\mathcal{O}$, voir [33].

La fonction de l'équation (1.63) n'est pas une métrique sur H^D, puisqu'elle est négative si $(2/\zeta) \log \sin \theta/2 < r + r'$. Or, il s'agit d'une pseudo-métrique si elle est définie par parties telle qu'égale à 0 au lieu d'être négative, soit

$$\tilde{d}_h(x, x') = \begin{cases} r + r' + \frac{2}{\zeta} \log\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) & \text{si } \left|(2/\zeta) \log \sin \theta/2\right| > r + r' \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{1.64}$$

L'argument du terme d'erreur de l'équation (1.63) est présenté à la figure 1.8a en fonction de θ et r (avec r' fixé à la même valeur que r à des fins de représentation graphique). On y observe que l'erreur explose dans un régime où $\theta^2 \ll e^{-\zeta r} + e^{-\zeta r'}$. Au sens strict, c'est donc une approximation douteuse, puisqu'elle suppose une petite distance angulaire tout en tombant

lorsque $\theta \to 0$. En revanche, tel qu'illustré à la figure 1.8b, dans certains régimes elle se tient. Nous verrons au prochain chapitre que dans le contexte de réseaux géométriques aléatoires, la magnitude de l'erreur est compensée lors de la composition avec une fonction de probabilité de connexion adéquate.



(a) (b)

FIGURE 1.8 – Différence entre la distance hyperbolique d_h et son approximation $\tilde{d}_h$. En (a), l'erreur relative $^{d_h - \tilde{d}_h}/_{d_h}$ est représentée et (b) illustre un exemple de la distance selon la séparation angulaire θ avec $r = r' = 3$.

Chapitre 2

Réseaux hyperboliques

Bien que la science des réseaux moderne soit environ cent fois plus jeune que la géométrie, son histoire mérite quand même quelques mots. À l'image d'un noeud possédant plusieurs connexions, ce récit (comme de nombreux autres récits, avouons-le) commence à plus d'un endroit à la fois. L'un d'eux est la théorie des graphes, dont l'étude a été propulsée par Leonhard Euler avec son travail sur le problème des ponts de Königsberg en 1736 [34]. Dans cette ville divisée en quatre régions reliées par sept ponts, il a démontré qu'il était impossible de suivre un chemin qui prenait chaque pont une et une seule fois en utilisant les outils mathématiques maintenant associés aux premiers balbutiements de la théorie des graphes. Le domaine a progressivement pris de l'ampleur au fur et à mesure que la communauté scientifique a découvert son utilité par-delà la résolution de tels casse-têtes et de jeux de pensée [35]. Pendant que les mathématicien.ne.s s'intéressaient à la géographie, certain.e.s sociologues en quête de modélisation quantitative ont commencé à comprendre les interactions sociales en termes de *sociogrammes*. Dans ceux-ci, dont le premier remonte aussi loin que 1930, les noeuds sont des êtres humains et les liens représentent des attachements sociaux, précisément ce qui est aujourd'hui appelé les réseaux sociaux [36, Chapitre 3].

En marge de la théorie des graphes et de l'analyse sociologique, une troisième branche de ce récit a pris place au milieu du XXe siècle avec l'avènement de la science de la complexité. Au sens large, un système complexe en est un qui est plus que la somme de ses parties, d'une manière bien pragmatique où les propriétés du tout ne peuvent pas être simplement déduites de celles des parties et de leurs interactions [37]. Qui plus est, dans de nombreux cas de tels systèmes présentent une structure hiérarchique, c'est-à-dire qu'ils sont composés d'une succession de sous-systèmes emboîtés tels qu'à chaque niveau de complexité, de nouvelles propriétés peuvent émerger [38]. Notamment, pour reprendre l'exemple sociologique, on peut penser à la manière dont les êtres humains forment des liens sociaux avec des sous-groupes successifs comme la famille, les amis, les organisations professionnelles, les communautés et ainsi de suite. Les systèmes complexes abondent dans des domaines aussi variés que la physique statistique, les neurosciences, l'informatique, l'économie, l'épidémiologie, pour ne nommer que

ceux-là. D'autres propriétés observées des systèmes complexes dynamiques incluent aussi la non-linéarité, l'adaptation et les boucles de rétroaction. Dans la seconde moitié du XXe siècle, des gens en physique, notamment en matière condensée et en physique statistique, tentaient de découvrir une manière d'approcher ces problèmes de complexité, à la fois diversifiés mais partageant certains principes communs.

L'avènement de la science des réseaux au tournant des années 2000 a donné une nouvelle tournure à cette quête, en propulsant la découverte de nouveaux outils analytiques (inspirés de la théorie des graphes) et numériques pour interpréter des données, qui ont d'ailleurs commencé à être collectées massivement. En particulier, à cette époque sont apparus les premiers modèles de réseaux plus structurés qui saisissent mieux les propriétés de réseaux complexes réels [1], contrairement aux réseaux générés aléatoirement de manière uniforme [39]. Parallèlement à l'introduction de ces modèles, des applications ont été découvertes dans une panoplie de domaines dont ceux mentionnés précédemment. Alors, les éléments des systèmes complexes sont représentés par des noeuds, et les interactions entre eux par des liens. Ce dénominateur commun a aussi rassemblé sous un même chapeau, et rassemble toujours d'ailleurs, des scientifiques de domaines des plus diversifiés, en promouvant le dialogue entre différents champs d'expertise. À l'image de travaux fascinants sur les liens entre les réseaux de neurones biologiques et les réseaux sociaux reliant ces cerveaux [40], la science des réseaux permet d'unifier, sans réduire, d'innombrables domaines associés à la structure et la fonction des systèmes complexes, ainsi qu'à l'expérience humaine.

Le cadre général des réseaux hyperboliques répond élégamment à ce récit de la genèse de la science des réseaux. Dans un réseau, la notion de hiérarchie réfère généralement à une organisation auto-similaire, c'est-à-dire quand des sous-groupes de noeuds sont plus connectés entre eux, d'une manière emboîtée [41]. C'est l'observation d'une telle structure hiérarchique dans certains réseaux réels, ainsi que la présence de *clustering*, soit la propriété qu'ont de nombreux réseaux à ce que deux noeuds connectés à un même voisin ait plus de chances d'être connectés, qui a inspiré les premiers articles supposant un espace sous-jacent hyperbolique expliquant les connexions [30, 42, 43]. D'une part, il est élégant d'expliquer les connexions et les propriétés locales et globales de nombreux réseaux à l'aide de la *proximité*. L'inégalité du triangle des espaces métriques offre alors naturellement une explication pour la fermeture des triangles [2]. D'autre part, lorsque les espaces hyperboliques sont pris dans leur sens le plus général (pas nécessairement lisse à courbure négative mais en termes des symétries qui s'appliquent à des espaces plus généraux), les réseaux en arbre qui seront présentés à l'exemple 2.1.1 sont l'exemple le plus simple d'espace hyperbolique discret. Or, les réseaux en arbre sont aussi un

1. L'oxymore mathématique « réseau complexe réel » a de quoi faire grincer des dents au moins une ou deux personnes. En contexte, le mot « complexe » n'a rien à voir avec $\sqrt{-1}$ et réfère plutôt à la complexité. Qui plus est, « réel » est à prendre au sens de « empirique » et réfère en général à ce qui provient d'un ou plusieurs jeux de données.

2. Il est ici question des triplets de noeuds qui sont tous connectés les uns aux autres, ce qui s'explique par leur proximité supposée dans un espace métrique sous-jacent.

exemple de prédilection de structure hiérarchique. Une fois les premiers modèles de réseaux hyperboliques introduits, leurs succès à expliquer les propriétés généralement observées dans les réseaux réels n'ont cessé de se manifester (voir l'introduction globale de ce travail pour plus de détails). L'intuition ayant mené à l'introduction de réseaux aléatoires géométriques sur H^{D+1} est exposée en plus de détails dans [30, Sec. III].

Ce chapitre est divisé comme suit. Les bases de la théorie des réseaux sont d'abord établies, avant de présenter plus précisément ce qu'est un réseau aléatoire et un réseau aléatoire dans un espace métrique. En particulier, la section 2.2 présente les réseaux hyperboliques et leurs liens avec la physique statistique. Ensuite, une autre représentation des réseaux hyperboliques sous la forme du *modèle* $\mathbb{S}^D$ est introduite, ainsi que l'équivalence effective entre ces deux modèles.

2.1 Notions de réseaux

2.1.1 Réseaux et structure communautaire

Une brève introduction aux réseaux est un passage inévitable sur les chemins qui mènent aux réseaux hyperboliques. Les mots « réseau » et « graphe » seront ici utilisés sans distinction, bien que dans certains ouvrages, « réseau » tend à être plutôt utilisé pour décrire des systèmes complexes réels (par exemple le cerveau, l'internet ou les collaborations scientifiques) et « graphe » porte une connotation plus mathématique en lien avec la théorie des graphes. Les définitions de cette section proviennent du livre classique de Newman [36].

Définition 2.1.1 (Réseau) Soit un ensemble fini $V = \{1, \dots, N\}$ de taille $|V| = N$, dont les éléments sont appelés les *noeuds*. Soit aussi un ensemble $E \subseteq V \times V$ de couples de noeuds, les *liens*. Alors, le réseau est $g = (V, E)$, un couple qui décrit l'ensemble des liens entre les noeuds. Pour toute paire de noeuds $i, j \in V$, l'élément de matrice

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E, \\ 0 & \text{autrement}, \end{cases} \tag{2.1}$$

encode la présence ou l'absence de lien entre les noeuds. S'il existe un lien entre deux noeuds, on dit qu'ils sont *connectés* ou *reliés*. Le *degré d'un noeud* i est le nombre d'autres noeuds auquel il est connecté, soit

$$k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}. \tag{2.2}$$

La séquence de tous les degrés des noeuds d'un réseau est appelée la *séquence des degrés*. ⌟

Si la matrice $a = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}$ est symétrique, alors le réseau est *non orienté* tandis qu'autrement les liens et le réseau est *orienté*. Si la diagonale de a est nulle, le réseau est sans boucle, c'est-à-dire qu'aucun lien n'existe d'un noeud à lui-même, et si en plus a est symétrique, alors le réseau est *simple*. Dans ce travail, tous les réseaux sont simples. Qui plus est, on identifie les noeuds

à des nombres naturels[3] par simplicité, bien qu'en soit l'ensemble V n'ait pas nécessairement à être un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Certains réseaux peuvent être munis d'une distance afin d'être équipés d'une structure et d'une topologie métriques.

Définition 2.1.2 (Chemin) Soit un réseau $g = (V, E)$. Un *chemin* d'un noeud i à un autre noeud j est une séquence de liens $((i, k), ..., (\ell, j))$ de E qui commence à i et se termine à j. La *longueur* de ce chemin est le nombre de liens dans la séquence. Il peut exister plus d'un chemin entre une paire de noeuds. ⌟

Définition 2.1.3 (Connexité d'un réseau) Soit un réseau $g = (V, E)$. S'il existe un chemin entre les noeuds i et j, ils sont *connexes*. S'il existe un chemin entre chaque paire de noeuds, alors g est *connexe*. S'il n'existe pas de chemin entre une ou plusieurs paires de noeuds, g est *non connexe* ou *déconnecté*. ⌟

Définition 2.1.4 (Distance par bonds) Soit un réseau $g = (V, E)$ et $i, j \in V$. La *distance par bonds* est la longueur du chemin le plus court entre i et j, si celui-ci existe. Si i et j ne sont pas connexes, alors typiquement la distance est considérée infinie. ⌟

L'ensemble des noeuds d'un réseau simple, non orienté et connexe muni de la distance par bonds forme un espace métrique. Les conditions de positivité, de symétrie et l'inégalité du triangle suivent naturellement de la définition de la distance par bonds sur un graphe simple en termes de chemin le plus court. Qui plus est, la topologie métrique sur les noeuds découle naturellement de cette distance. Une boule ouverte de rayon r centrée au noeud i est un ensemble de noeuds se situant à moins de r bonds, ou r liens, de i. En sciences des réseaux, le mot *topologie* est utilisé à bien des sauces pour parler généralement de la manière dont les noeuds sont reliés entre eux. Cette utilisation du terme « topologie » pour décrire les patrons de connexions entre les noeuds peut être interprétée à la lumière de ce qui précède. En effet, la topologie métrique sur un réseau décrit bel et bien l'ensemble des voisinages de chaque noeud, de tous les rayons possibles, et par conséquent la structure locale et globale de l'ensemble de ses liens. Néanmoins, cette structure métrique est à distinguer de la géométrie sous-jacente des réseaux qui sera le sujet des prochaines sections.

Un exemple de réseau parfois mentionné dans ce travail est l'*arbre*, dont un exemple est illustré à la figure 2.1.

Exemple 2.1.1 (Réseau en arbre). Soit un réseau simple et non orienté $g = (V, E)$. Si g est connexe et ne contient aucun *cycle*, soit un chemin d'un noeud à lui-même, il s'agit d'un *arbre*. ⌟

Les arbres possèdent la propriété qu'il existe un et un seul chemin le plus court entre chaque paire de noeuds. Un autre type de réseau qui apparaîtra dans ce travail est le *réseau pondéré*.

3. Il s'ensuit aussi que les noeuds sont discernables, contrairement aux réseaux non étiquetés où les identifications i associés aux noeuds sont interchangeables. Du point de vue mathématique, il s'agirait alors plutôt d'ensembles de réseaux définis à l'aide de classes d'équivalences.

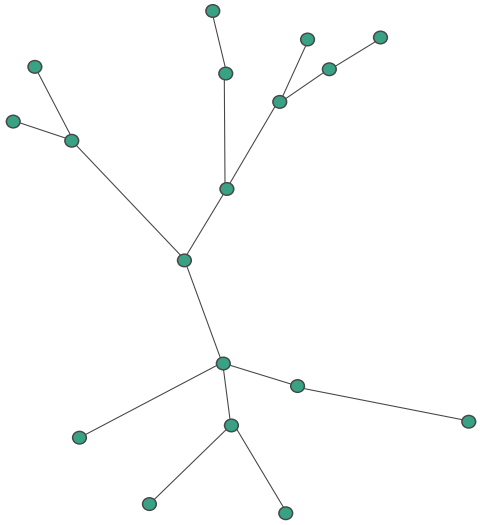


FIGURE 2.1 – Petit réseau en arbre.

Définition 2.1.5 (Réseau pondéré) Soit un réseau $g = (V, E)$. Si à chaque lien $(i, j) \in E$ est associée un nombre réel positif $w_{ij} \in (0, \infty)$, alors le réseau est *pondéré*. En définissant $w_{ij} = 0$ lorsque $(i, j) \notin E$, w forme une *matrice de poids* des liens et on dit que g est *pondéré par* w. ⌟

Enfin, il existe aussi un type de réseau défini à partir de points d'un espace métrique.

Définition 2.1.6 (Réseau géométrique) Soit un espace métrique $(\mathcal{X}, d)$, $V = \{1, \ldots, N\}$ et $t > 0$. Si à chaque noeud $i \in V$ est associé un point $x_i \in \mathcal{X}$, alors la condition

$$d(x_i, x_j) < t \implies (i, j) \in E \tag{2.3}$$

définit un *réseau géométrique* dans $\mathcal{X}$, où les noeuds i et j sont reliés par un lien si leur coordonnées sont à une distance inférieure à t, qui joue le rôle d'un seuil de distance. ⌟

À l'égard de la définition ci-haut, il serait plus précis de parler de réseau *métrique*, puisque ce ne sont pas tant les lignes et les angles qui importent mais plutôt la distance entre les noeuds, soit la structure métrique de l'espace. En neurosciences, le terme plus communément utilisé est d'ailleurs *graphe métrique*, mais la littérature de sciences des réseaux a adopté l'adjectif « géométrique » [41], ce avec quoi le présent travail s'accorde.

Il existe une multitude d'autres types de réseaux et de propriétés qui les caractérisent, ainsi que d'innombrables modèles pour générer des réseaux reflétant des structures observées dans les réseaux de données. Un.e lect.eur.rice avide peut se référer à [36, Parties II et IV] pour un survol complet. En ce qui a trait à ce travail, le dernier concept à introduire plus concrètement pour des réseaux simples est celui de *structure communautaire* ou *modulaire*, qui est une manière d'étudier la structure à plus grande échelle d'un réseau en termes de regroupements entre les noeuds. L'adjectif « communautaire » est inspiré des communautés en sciences sociales, tandis

que les modules caractérisent de tels regroupements dans d'autres disciplines, notamment en neurosciences [44].

Définition 2.1.7 (Communauté) Soit un graphe $g = (V, E)$ de taille N et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$. Une *partition* des noeuds est une collection $\{c^u\,;\, c^u \subset V,\ u = 1, \ldots, n\}$ de sous-ensembles de V telle que

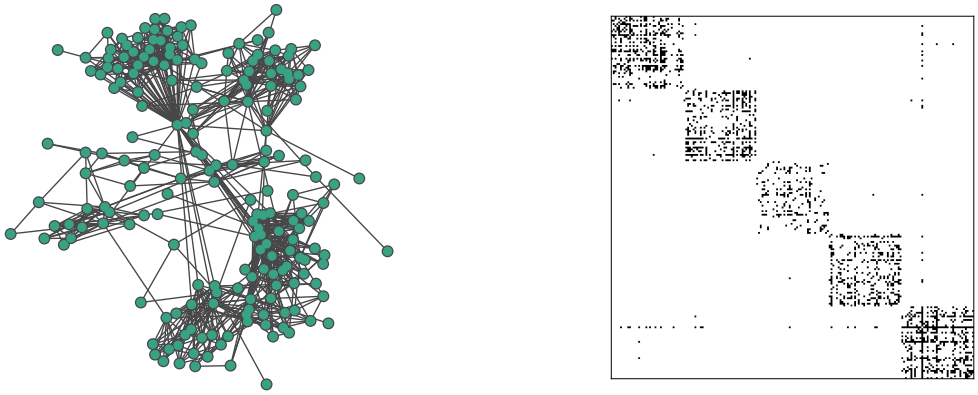
$$c^u \cap c^v = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{u=1}^{n} c^u = V \tag{2.4}$$

pour tout $u, v = 1, \ldots, n$. Chaque sous-ensemble de noeuds est appelé *communauté* ou *module*, et l'existence de ces regroupements caractérise la *structure communautaire* du graphe g. Si le noeud i appartient à la communauté c^u, on notera parfois par $c_i = u$ l'appartenance explicite de i à c^u.

De nombreux réseaux issus de données réelles présentent des sous-groupes qui sont plus connectés entre eux qu'avec le reste du réseau. On parle alors de structure communautaire *assortative*. Dans ce cas, si les rangées et les colonnes de la matrice du graphe g sont ordonnées en fonction des communautés, la structure communautaire est illustrée par des blocs plus ou moins denses dans la matrice comme à la figure 2.2. En pratique, la partition d'un réseau est souvent choisie de sorte que les communautés soient justement associées aux patrons de connexion.

L'identification des communautés peut être encodée lors de la construction du réseau, notamment si des étiquettes sont attribuées aux noeuds en tant que méta-données, à l'image des couleurs des aéroports de la figure 3.1, ou lors de la génération du graphe s'il est issu d'un modèle, comme on verra à la figure 3.6. Les communautés peuvent aussi être détectées à l'aide d'algorithmes qui identifient les sous-ensembles de noeuds distinguables par leurs patrons de connexion. Par exemple, plusieurs algorithmes standards servent à identifier la partition qui maximise la *modularité*, un scalaire qui compare la présence de liens au sein d'une même communauté, ou intra-communautaires, à celle prescrite uniquement par les degrés des noeuds [45, 46]. Un autre algorithme fort intéressant appelé *Infomap* utilise aussi l'optimisation, mais cette fois pour minimiser la quantité d'information nécessaire pour encoder toute l'information des liens du réseau, un peu comme si les communautés servaient alors d'adresses pour les noeuds [47]. Une autre catégorie d'algorithme est fondée sur l'inférence de modèle, c'est-à-dire identifier les paramètres d'un modèle aléatoire qui génère de la structure communautaire tel que la probabilité que le réseau soit issu de ce modèle soit la plus élevée possible [48, 49]. Dans tous ces cas, et pour les nombreuses autres méthodes de détection de communauté, l'idée est d'identifier les communautés qui sont le plus associées à la structure du réseau.

Pour finir cette introduction à la science des réseaux, voici en rafale quelques propriétés qui méritent d'être présentées au moins intuitivement puisqu'elles apparaissent par-ci par-là dans la littérature et dans ce travail. Certaines définitions proviennent de l'ouvrage de référence de



(a) (b)

FIGURE 2.2 – Réseau simple en (a) et sa matrice binaire représentant les liens (en noir) entre les noeuds avec une structure par blocs en (b).

Newman [36, Chapitre 7] lorsqu'une référence précise n'est pas citée.

— *Transitivité.* En mathématiques, la transitivité d'une relation . signifie que si $a.b$ et $b.c$, alors $a.c$. Dans un réseau, cette propriété réfère généralement au phénomène de fermeture des triangles, c'est-à-dire lorsque deux noeuds i, j connectés à un même autre noeud ℓ sont aussi connectés entre eux. Le mot « transitivité » prend un sens précis associé à la proportion de tels triangles fermés par rapport à tous les triangles possibles (paires de liens associés à un même noeud) dans un réseau. Une autre quantité, appelée par l'anglicisme « coefficient de clustering » ou parfois « coefficient de clustering local moyen » est la plus souvent utilisée. Il s'agit de la moyenne arithmétique sur tous les noeuds de la proportion de triangles fermés localement autour de chaque noeud, soit

$$c = \sum_{i=1}^{N} \frac{\text{Nombre de paires de voisins de } i \text{ qui sont connectés}}{k_i(k_i-1)/2} \tag{2.5}$$

Dans certains réseaux réels, notamment les réseaux sociaux, le coefficient de clustering est généralement plus élevé que ce à quoi on s'attendrait en supposant des réseaux construits aléatoirement selon différents modèles.

— *Densité.* La densité d'un réseau quantifie simplement la proportion de liens par rapport à tous les liens possibles. Par exemple, pour les graphes simples,

$$\text{densité} = \frac{\sum_{i<j} a_{ij}}{N(N-1)/2}. \tag{2.6}$$

Un réseau vide a une densité nulle, soit aucun lien, tandis qu'un réseau complet a une densité maximale puisque tous ses noeuds sont connectés entre eux. Il arrive souvent

que la densité soit décrite à l'inverse en qualifiant un réseau d'*épars* ou de *creux* si sa densité est faible. Lorsqu'une manière de rajouter des noeuds et des liens est bien définie au sein d'un modèle, un réseau est dit dense si la densité est non nulle lorsque le nombre de noeuds N tend vers l'infini, tandis qu'autrement le graphe est épars.

— *Effet petit monde.* Cette propriété est reliée au célèbre concept des « six degrés de séparations », selon lequel chaque personne sur Terre serait reliée à toute autre par moins de six connaissances directes. Cette idée a été présentée pour la première fois dans une nouvelle de l'auteur Frigyes Karinthy en 1929 [50], puis concrétisée et popularisée par l'expérience du psychologue Stanley Milgram en 1967 [51]. Un modèle fondateur de la science des réseaux qui met cela en pratique est celui de Watts et Strogatz [52]. Ce modèle génère aléatoirement des réseaux dont la distance par bonds entre chaque paire de noeuds est petite relativement à la taille du réseau, et ce en reconnectant des liens aléatoirement à partir d'un réseau régulier [4]. La propriété ou l'effet petit monde décrit de manière générique le fait que la distance maximale entre toute paire de noeuds du réseau (son *diamètre*) soit de l'ordre de $\log(N)$. En revanche, pour les réseaux réels, il est plus intéressant d'étudier la moyenne arithmétique de la distance par bonds entre chaque paire de noeuds pour quantifier l'effet petit monde [36, §10.2].

— *Modularité.* Une manière standard de quantifier la structure communautaire d'un réseau à l'aide d'un scalaire est la modularité,

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i<j} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j) \tag{2.7}$$

où m est le nombre total de liens du réseau et c_i, c_j sont les communautés associées respectivement aux noeuds i et j. Il s'agit de la somme normalisée des liens qui existent au sein d'une même communauté, par rapport à un modèle nul [5] basé sur le nombre de liens auquel on s'attendrait uniquement à partir des degrés des noeuds.

— *Hétérogénéité.* En général, la propriété d'hétérogénéité d'un réseau renvoie aux degrés des noeuds ayant une distribution en loi de puissance, par exemple suivant une loi de Pareto. Ceci quantifie le fait que la plupart des noeuds a un petit degré, tandis que certains noeuds ont de très nombreuses connexions. Dans la littérature, de tels réseaux sont souvent appelés *sans échelle* (de l'anglais *scale-free*) en référence au fait que les degrés ont typiquement des valeurs qui s'étendent sur plusieurs échelles de grandeur. De nombreux réseaux réels présentent une telle hétérogénéité des degrés [53], bien que les séquences des degrés de réseaux réels aient rarement la forme stricte d'une distribution de Pareto [54].

4. Un réseau régulier est tel que chaque noeud possède le même nombre de connexions, comme dans un treillis.

5. En statistique, un modèle nul est un modèle qui génère des données semblables aux données auxquelles on a accès afin de tester l'hypothèse nulle, selon laquelle ce modèle aurait généré les données.

2.1.2 Réseaux aléatoires

Au sens le plus simple, un réseau aléatoire est tout bonnement une variable aléatoire dont les valeurs sont des réseaux. Pour cette définition, considérons $\mathcal{G}_N$, l'ensemble de tous les réseaux simples et non orientés à N noeuds, pour lequel il existe une équivalence avec l'ensemble des matrices binaires symétriques de diagonale nulle. Cet ensemble est dénombrable et de taille $2^{N(N-1)/2}$, il peut donc être muni de la tribu discrète $\mathscr{P}(\mathcal{G}_N)$.

Définition 2.1.8 (Réseau aléatoire) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{G}_N$. Un *réseau aléatoire* G sur un espace de probabilité $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$ est une variable aléatoire sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, m)$ à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathcal{G}_N, \mathscr{P}(\mathcal{G}_N))$.

Cette définition est très générale, elle tient notamment compte des cas où il est impossible de calculer analytiquement les probabilités de connexion par paire entre les noeuds. C'est le cas si le réseau aléatoire est défini par maximisation d'entropie sous contraintes moindrement complexes, ou bien s'il est défini en termes d'une marche aléatoire où les liens sont échangés. Or, tous les réseaux aléatoires dans ce travail sont en fait des réseaux dont les probabilités de liens sont bien définies et indépendantes, ce qui permet de formuler le réseau en tant que variable aléatoire de Bernoulli multivariée.

Exemple 2.1.2 (Réseau aléatoire de Bernoulli). Soit $(\mathcal{G}_N, \mathscr{P}(\mathcal{G}_N))$. Si les probabilités de connexion entre chaque paire de noeuds d'un graphe aléatoire G sont bien définies et indépendantes, alors la matrice $(p_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ avec

$$p_{ij} = \text{Prob}[(i,j) \in E] = \text{Prob}[(j,i) \in E] = p_{ji}, \tag{2.8}$$

symétrique et de diagonale nulle définit une mesure de probabilité discrète sur $\mathcal{G}_N$. La probabilité d'observer un graphe g de matrice $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ est

$$\text{Prob}[G = g] = \prod_{i<j} p_{ij}^{a_{ij}} (1 - p_{ij})^{1-a_{ij}} \tag{2.9}$$

L'existence de chaque lien entre une paire de noeuds i et j est dictée par une loi de Bernoulli de paramètre p_{ij}. Le *degré espéré* du noeud i est alors donné par la somme de ses probabilités de connexions avec les autres noeuds, soit

$$\langle k_i \rangle = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}. \tag{2.10}$$

Le réseau aléatoire de Bernoulli est encodé par un réseau pondéré par les probabilités de connexion p_{ij}. Dans ce cas aléatoire, l'équivalent de la séquence des degrés prend la forme d'une distribution sur les valeurs possibles des degrés des noeuds, qu'on appelle *la distribution des degrés*. Le nom « graphe aléatoire de Bernoulli » est parfois utilisé pour désigner un réseau

aléatoire où $p_{ij} = p \ \forall (i,j) \in V \times V \, ; \, i \neq j$, aussi appelé graphe de Erdős–Rényi ou de Gilbert, et historiquement très important en science des réseaux. Dans le cadre des réseaux aléatoires, le mot « paramètre » est à prendre au sens standard d'un scalaire qui change certaines caractéristiques d'un modèle, ce qui n'a rien à voir avec la paramétrisation des variétés présentée au chapitre précédent [6].

Une manière naturelle de définir un réseau aléatoire sur un espace métrique est d'assouplir la condition de l'équation (2.3) sur les connexions dans un réseau géométrique.

Définition 2.1.9 (Réseau géométrique aléatoire) Soit un espace métrique $(\mathcal{X}, d)$ ainsi qu'un ensemble de noeuds $V = \{1, \ldots, N\}$ associés à des points $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{X}$ de l'espace. Soit une fonction décroissante $p : \mathbb{R} \to [0,1]$. Alors la composition de p avec la métrique d sur l'espace définit un réseau aléatoire de Bernoulli où

$$p_{ij} = \text{Prob}[(i,j) \in E] = p \circ d(x_i, x_j) = p(d(x_i, x_j)). \tag{2.11}$$

La condition de décroissance sur la fonction p n'est pas absolument nécessaire dans la définition ci-haut. Or, grâce à elle, les réseaux géométriques aléatoires sont reliés à l'intuition suivante. Si un noeud i est connecté à deux autres noeuds, disons j et ℓ, alors on pourrait s'attendre à ce que j et ℓ aient plus de chances d'être connectés aussi. Cette propriété découle naturellement de l'inégalité du triangle lorsqu'à chaque noeud correspond un point d'un espace métrique. En particulier, si p est la fonction échelon de Heaviside, inversée et décalée de t, on retrouve un réseau géométrique.

Exemple 2.1.3 (Réseau géométrique). Soit un réseau géométrique aléatoire sur l'espace $(\mathcal{X}, d)$ de fonction de probabilité de connexion p. Si p est la fonction échelon de Heaviside définie par

$$p(d) = H(t-d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d < t \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \tag{2.12}$$

on retrouve un réseau géométrique de la définition 2.1.6.

Dans un réseau géométrique, aléatoire ou pas, les communautés sont caractérisées par des regroupements de noeuds à plus petite distance les uns des autres. Le terme communément utilisé pour décrire de telles communautés issues ou reliées à la géométrie sous-jacente d'un réseau est *communauté souple* [56]. La « souplesse » réfère au fait qu'une communauté définie en termes de proximité n'est pas une caractéristique purement catégorique (donc rigide) des noeuds, mais peut être interpolée souplement d'un noeud à un autre en fonction de la distance

6. Il s'avère en fait que souvent, la paramétrisation des lois de probabilité permet de définir des variétés sur lesquelles chaque point correspond à une loi particulière. La géométrie de l'information correspond à un champ de recherche à part entière qui s'intéresse justement au lien entre les probabilités et la géométrie différentielle [55].

qui les sépare.

Lorsqu'une famille de réseaux aléatoires est définie par certaines propriétés elles-mêmes aléatoires, on parlera de *modèle de réseau aléatoire*. Le terme *modèle* décrit cette construction afin d'être cohérent avec la littérature existante sur le sujet, et tout particulièrement les modèles des prochaines sections. Un tel modèle particulièrement important pour nous est associé aux réseaux aléatoires géométriques où on surenchérit d'un niveau d'aléatoire en considérant que les position des noeuds sont des variables aléatoires.

Définition 2.1.10 (Modèle de réseau aléatoire géométrique) Soit un espace métrique $(\mathcal{X}, d)$ muni d'une mesure de probabilité et $V = \{1, \dots, N\}$. À chaque noeud i est associée une variable aléatoire continue Y_i à valeurs dans $\mathcal{X}$, décrivant la position de ce noeud dans l'espace. Soit aussi une fonction de probabilité de connexion $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Alors, l'espace, l'ensemble de noeuds, leurs coordonnées aléatoires ainsi que p forme un *modèle de réseau aléatoire géométrique*. Si les coordonnées $\{Y_i\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), le modèle peut être décrit à l'aide de la densité de probabilité f_Y des Y_i sur l'espace, ainsi que le nombre de noeuds N et la fonction de probabilité p.

Une telle construction est en fait une mesure aléatoire continue sur l'espace discret des graphes simples à N noeuds, puisque la valeur des probabilités de connexion, et donc la probabilité d'un graphe donné dans $\mathcal{G}_N$, dépend du résultat d'une expérience aléatoire sur la position de ses noeuds. Plus spécifiquement, il arrive que l'acte d'échantillonner successivement des points dans un espace soit défini en termes de processus ponctuel, un exemple de mesure aléatoire [57].

Il arrive qu'on parle de la coordonnée y_i d'un noeud i. Il s'agit alors soit i) d'un abus de langage et on réfère alors de manière simplifiée à la variable aléatoire Y_i, ii) d'une coordonnée associée à une réalisation particulière d'un modèle ou encore iii) de la coordonnée d'un noeud d'un réseau réel telle qu'inférée par un algorithme de plongement de réseaux [58-60], ce qui devrait être clair selon le contexte.

2.2 Modèle $\mathbb{H}^{D+1}$

À la lumière de la section précédente, un réseau hyperbolique aléatoire est tout bonnement un réseau géométrique aléatoire, où l'espace métrique sous-jacent est un sous-ensemble de H^{D+1}.

Définition 2.2.1 (Modèle $\mathbb{H}^{D+1}$) Soit une boule hyperbolique $B^{D+1}(R, \zeta) \subset H^{D+1}(\zeta)$, munie de la distance hyperbolique d_h et un ensemble de noeuds $V = \{1, \dots, N\}$. À chaque noeud i est associée une variable aléatoire Y_i à valeurs dans $B^{D+1}(R, \zeta)$ et de densité de probabilité $f_{Y_i}(y_i)$, où y_i est un point de la boule. On suppose que les Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), ce qui permet de noter la densité f_Y pour tout Y_i. Soient

$\beta > 0$ et $\mu > 0$. La fonction de probabilité de connexion du modèle est donnée par

$$p_h(d_h) = \frac{1}{1 + e^{\zeta\beta(d_h - \mu)/2}}. \tag{2.13}$$

Au total, le « modèle » est en fait une variété $B^{D+1}(\zeta, R)$ munie d'une mesure de probabilité, un ensemble de N noeuds V, une fonction f_Y qui associe des coordonnées aléatoirement aux noeuds et une fonction de probabilité de connexion p_h qui dépend de la distance. ⌟

Ce modèle de réseaux hyperboliques aléatoires est général au sens où on ne précise pas selon quelle densité de probabilité f_Y les points associés aux noeuds sont échantillonnés, seulement la forme de la probabilité de connexion [7]. Celle-ci est une sigmoïde, répondant à l'intuition selon laquelle la probabilité est maximale lorsque la distance entre les noeuds tend vers 0. Tel qu'illustré à la figure 2.3, la valeur du paramètre β ajuste la forme de la probabilité de connexion. Lorsque $\beta \to \infty$, la probabilité de connexion tend vers une fonction échelon où deux noeuds sont connectés si la distance qui les sépare est plus petite que μ, qui agit donc comme un seuil de distance hyperbolique. Dans ce régime dit rigide, le coefficient de clustering moyen des réseaux échantillonnés du modèle est maximal [30], étant donné que tout triplet de point suffisamment proche dans l'espace sera connecté. Ce lien entre le clustering et β est d'ailleurs mis à profit pour inférer les paramètres de réseaux hyperboliques associés à des réseaux réels à l'aide d'algorithmes de plongement [58]. Pour se donner une idée d'ordre de grandeur, les valeurs courantes pour β tournent autour de $\beta \approx 3.5$ en $D = 1$. Une telle valeur du paramètre β fait en sorte que les connexions à plus grande distance ont plus de chances d'être observées. Qui plus est, il a été montré récemment qu'une transition de phase s'exprime dans les propriétés des réseaux lorsque $\beta/D = 1$. Tous les détails des trois régimes sont explicités dans [19]. À ces égards, notre travail s'est concentré sur le régime $\beta > D$.

Dans les versions initiales du modèle, le paramètre μ était fixé au rayon R de la boule hyperbolique afin que les degrés attendus minimal et maximal aient des ordres de grandeur « physiques » pour un réseau simple, soient $\langle k \rangle_{\min} \approx 1$ et $\langle k \rangle_{\max} \approx N$ [30]. Le paramètre μ s'avère aussi être relié au nombre moyen de liens du réseau aléatoire hyperbolique dans une version particulière du modèle où f_Y est telle que les coordonnées des noeuds sont échantillonnées de manière uniforme sur l'espace.

Définition 2.2.2 (Modèles $\mathbb{H}^{D+1}$ uniforme et quasi-uniforme) Soit un modèle $\mathbb{H}^{D+1}$ à N noeuds. Le *modèle* $\mathbb{H}^{D+1}$ *uniforme* est tel que les Y_i sont de densité uniforme sur B^{D+1}. En termes des coordonnées hyperboliques $y_i = (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_D)$, les coordonnées angulaires sont de densité f_Φ uniforme sur $S^D(1)$ des équations (1.38) et la coordonnée radiale a la densité f^{u} de l'équation (1.57). En revanche, si la coordonnée radiale est de densité $f^{\text{q-u}}$ donnée par

7. En fait, dans les versions initiales de ce modèle et du modèle $\mathbb{S}^D$ de la section suivante, la probabilité de connexion était techniquement n'importe quelle fonction décroissante et intégrable. Néanmoins, l'interprétation liée à la physique statistique présentée à la sous-section 2.2.1 a peu à peu donné foi à l'équation (2.13).

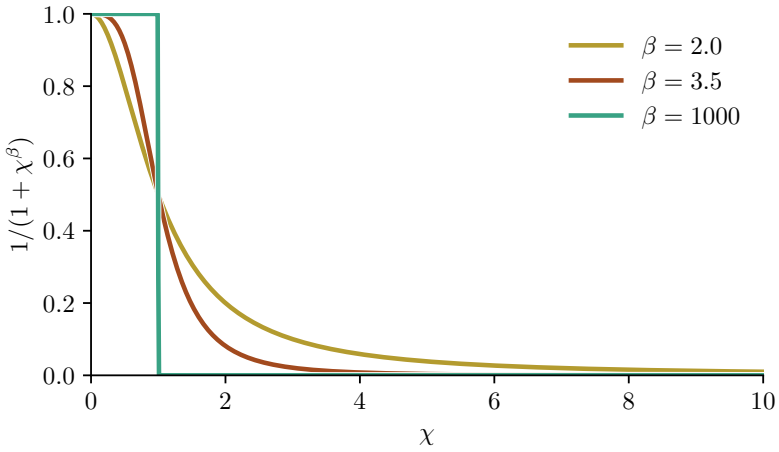


FIGURE 2.3 – Forme générale de la probabilité de connexion selon la valeur du paramètre β.

l'équation (1.58), il s'agit du *modèle* $\mathbb{H}^{D+1}$ *quasi-uniforme*, puisque les coordonnées angulaires sont échantillonnées uniformément mais pas les coordonnées radiales. ⌟

Dans la littérature, ce sont surtout les modèles uniformes et quasi-uniformes qui ont été étudiés puisque ce sont eux qui exhibent plus naturellement la géométrie sous-jacente hyperbolique. Celle-ci se reflète dans la structure des réseaux de diverses façons. Notamment, les chemins les plus courts entre les noeuds du réseau en termes de la distance par bonds ont une grande probabilité d'exister près des géodésiques hyperboliques [61-63].

En plus de N, dont l'effet sur le réseau est direct, ainsi que β et μ qui ont été traités, les paramètres globaux du modèle sont D, ζ et R qui définissent la variété. Ces paramètres influencent d'une manière parfois non triviale les propriétés des réseaux échantillonnés à l'aide du modèle aléatoire. Néanmoins, tous ces paramètres ne sont pas entièrement indépendants les uns des autres. En particulier, le calcul de la distance à l'aide de la loi des cosinus hyperboliques de l'équation (1.49) met en évidence que la valeur de ζ agit simplement comme un facteur d'échelle sur les distances et peut être absorbée dans les coordonnées radiales en changeant la valeur de R [19].

La version la plus simple de ce modèle, pour $D = 1$, a été étudiée extensivement au cours de la dernière décennie, étendue à de nombreux types de réseaux et appliquée à maintes données réelles. En revanche, l'intérêt pour le modèle plus général en dimension $D \geq 1$ n'a fleuri que tout récemment. Ces avancées sont relatées dans une revue de littérature détaillée à la section 2.4. Pour l'instant, la sous-section suivante élabore sur les liens entre les réseaux hyperboliques et la physique statistique.

2.2.1 Liens avec la physique statistique

La probabilité de connexion de l'équation (2.13) a de quoi éveiller la curiosité de tout.e physicien.ne en mal d'entropie [8]. Il s'agit en effet de la distribution de Fermi-Dirac, tel qu'explicité d'emblée dans l'article originel de Krioukov *et al.* [30]. En guise de rappel, la distribution de Fermi-Dirac décrit le nombre moyen de particules (soit 0 ou 1) dans un état d'énergie lorsque deux d'entre elles ne peuvent pas se trouver dans le même état d'énergie, c'est-à-dire que le principe d'exclusion de Pauli s'applique. Dans une approche propre à la physique statistique, elle est dérivée de l'ensemble grand canonique, soit un système de particules en contact avec un réservoir à température et potentiel chimique fixés. L'analogie entre l'équation (2.13) et la distribution de Fermi-Dirac suggère que le modèle $\mathbb{H}^{D+1}$ peut être interprété en termes de physique statistique, où l'équivalent des états d'énergie sont les liens entre les noeuds. Alors, la probabilité de connexion décrit la probabilité qu'un état d'énergie soit peuplé, c'est-à-dire qu'un lien existe. Il sont analogues aux fermions étant donné qu'entre toute paire de noeuds, il peut soit y avoir un unique lien ou ne pas y en avoir [9]. La température consiste en l'inverse du paramètre β et le potentiel chimique μ est le seuil de distance hyperbolique à partir duquel les noeuds sont connectés avec une probabilité de 1 dans la limite $\beta \to \infty$, soit l'équivalent de la limite thermodynamique froide en physique statistique. En poussant l'analogie encore plus loin, il y aurait lieu de se demander ce que représenterait alors le spin hypothétique de ces « fermions ». Or, dans notre modèle, un seul et unique lien peut occuper un « état d'énergie », contrairement aux deux fermions de spins différents qui peuvent avoir la même énergie tout en respectant le principe d'excusion de Pauli en mécanique quantique. Plus de recherches seraient nécessaires pour évaluer si le spin demi-entier des fermions pourrait trouver un analogue dans d'autres modèles, par exemple si les liens avaient deux possibilités de direction (graphe dirigé) plutôt qu'être seulement présents ou absents (graphe simple).

Non seulement cette analogie donne un sens physique aux paramètres du modèle, mais elle est aussi une manière possible de le construire [30, 41, 64]. En effet, avec l'équation (2.13) pour la probabilité de connexion, le modèle correspond à un ensemble de graphes exponentiels, aussi appelé ensemble d'entropie maximale, obtenu en définissant la probabilité d'un graphe par l'exponentielle d'une fonction d'énergie similaire associée à un hamiltonien. Selon le type de contraintes imposées sur l'ensemble, différentes familles de graphes aléatoires peuvent être obtenues. En particulier, le modèle de réseaux hyperboliques de la définition 2.2.1 est équivalent à un ensemble où une contrainte est imposée sur chaque lien, et ces contraintes sont alors des fonctions de la distance hyperbolique entre les noeuds, appelés les champs auxilaires dans le jargon. Ce cadre théorique a été utilisé tout dernièrement pour démontrer que les réseaux hyperboliques sont les seuls réseaux géométriques aléatoires pouvant reproduire à la fois des

8. L'expression est à prendre au sens poétique, c'est-à-dire avec un certain désir de créer du sens à partir de ce qui n'en a pas nécessairement.

9. Si de multiples liens étaient possibles entre les noeuds, tout porte à croire que l'équation (2.13) prendrait la forme de la loi de Bose-Einstein

distributions des degrés hétérogènes, du clustering ainsi que la propriété petit monde tout en étant non denses [64].

2.2.2 Popularité et similarité

En 2012, Papadopoulos *et al.* [43] ont introduit un modèle de réseau hyperbolique analogue au modèle $\mathbb{H}^2$, noté PSO dans la littérature subséquente en référence au titre de l'article en question, soit *Popularity versus similarity in growing networks*. C'est un modèle dit *génératif*, c'est-à-dire que des noeuds et des connexions sont ajoutées au fil d'une échelle de temps discrète. Le mécanisme de ce modèle consiste à ajouter des noeuds au réseau à chaque temps discret t à une coordonnée angulaire $\theta_t \in [0, 2\pi)$ échantillonnée aléatoirement (de la distribution uniforme dans le modèle initial, bien que certains modèles où les coordonnées angulaires ne sont pas échantillonnées uniformément ont été subséquemment proposés [56, 65]). Les liens associés à chaque nouveau noeud sont ceux qui minimisent le produit du temps d'arrivée des noeuds précédents et de la distance angulaire qui les sépare. Par conséquent, le temps d'arrivée est relié à la popularité des noeuds puisque les noeuds ayant le plus de connexions sont les premiers arrivés, à l'image du célèbre modèle d'attachement préférentiel d'Albert et Barabási [66].

Dans la mesure où les liens sont créés à plus petite distance angulaire, la coordonnée angulaire est associée à la similarité, aussi appelée homophilie en sciences sociales, c'est-à-dire la propension qu'ont les éléments d'un système à se rassembler avec d'autres éléments semblables. Or, en définissant aussi la coordonnée radiale d'un noeud arrivé au temps t par $r_t = \log t$, les auteurs en arrivent à un modèle semblable au modèle $\mathbb{H}^2$, où les connexions sont établies avec tous les noeuds qui minimisent la distance hyperbolique approximative de l'équation (1.63). Il s'agit donc d'une version générative du modèle $\mathbb{H}^2$ dans sa forme rigide, c'est-à-dire avec une probabilité de connexion en fonction échelon. Selon le modèle PSO, la distance dans l'espace hyperbolique est une manière fort pratique de combiner les deux attributs (popularité et similarité) qui motivent la création préférentielle de liens entre les noeuds du réseau.

L'intérêt de ce modèle est d'étoffer l'interprétation des coordonnées radiales et angulaires du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$. L'interprétation de la similarité en lien avec la coordonnée angulaire était déjà présente dès les premiers articles publiés sur le sujet, puisqu'il s'agit d'une des motivations principales à définir des réseaux dans des espaces métriques. En fait, les espaces latents sont utilisés depuis plus d'un siècle en sciences sociales pour expliquer l'homophilie dans les réseaux sociaux [64]. Qui plus est, le lien entre la coordonnée radiale et le degré des noeuds suggérait déjà un lien avec la popularité. L'article de 2012 se démarque en procédant à l'inverse, soit en construisant un modèle sur la base de la popularité et la similarité, puis en démontrant qu'il est équivalent à certains réseaux hyperboliques.

La section suivante s'intéresse à un autre modèle qui est à certains égards équivalent au modèle

$\mathbb{H}^{D+1}$, en plus d'être au coeur du formalisme utilisé dans l'article constituant le chapitre 3.

2.3 Modèle $\mathbb{S}^D$

À l'instar de la découverte des espaces hyperboliques en deux temps, d'abord dans leur forme axiomatique puis en tant que surface à courbure négative, les réseaux hyperboliques aléatoires ont d'abord existé sous une forme plus abstraite. Initialement, l'une des deux variables associées à chaque noeud n'avait pas explicitement d'interprétation géométrique, en s'inspirant du formalisme des variables *cachées*, ou *latentes*, qui a été développé pour expliquer les connexions à partir de propriétés associées aux noeuds [67]. Si les noeuds sont à la fois munis d'une variable cachée et d'une coordonnée dans un espace métrique, la probabilité de connexion suit une loi qui rappelle la manière dont la masse, en plus de la proximité, explique l'attraction gravitationnelle dans les modèles newtoniens. Le modèle proposé par Serrano *et al.* [42] va en ce sens, puisque chaque noeud a une coordonnée dans un espace métrique, une D-sphère S^D, en plus d'être muni d'un *degré latent*.

Définition 2.3.1 (Modèle $\mathbb{S}^D$) Soit une D-sphère $S^D(\hat{R})$ et un ensemble de noeuds $V = \{1, \ldots, N\}$. À chaque noeud i est associée une variable aléatoire (Y_i, K_i), dont Y_i est à valeurs dans $S^D(\hat{R})$ et K_i est à valeurs dans $(0, \infty)$. De plus, on suppose que : Y_i et K_j sont indépendantes pour toutes les paires i, j ; les Y_i sont i.i.d de densité $f_Y(y_i)$; les K_i sont i.i.d de densité $f_K(\kappa_j)$. La fonction de probabilité de connexion du modèle est donnée par

$$p_s(d_s, \kappa_i, \kappa_j) = \frac{1}{1 + \frac{d_s}{(\hat{\mu}\kappa_i\kappa_j)^{1/D}}}. \tag{2.14}$$

On dit alors qu'une *réalisation du modèle* est un graphe aléatoire G à valeurs dans $\mathcal{G}_N$ dont les probabilités de connexion sont fixés par p_s, les coordonnées sur $S^D(\hat{R})$ et les degrés latents, et qu'une *réalisation du graphe* est un réseau $g = (V, E)$ donné où les liens E ont été tirés aléatoirement selon la loi du graphe.

L'idée originelle est d'associer à chaque noeud i une variable κ_i, laquelle est associée à son degré attendu dans le modèle puisqu'elle ajuste la distance entre les noeuds dans la probabilité de connexion. Il est courant de définir une *distance effective*

$$\chi_{ij} = \frac{\hat{R}\theta_{ij}}{(\hat{\mu}\kappa_i\kappa_j)^{1/D}}, \tag{2.15}$$

où la distance sur la sphère $\hat{R}\theta_{ij}$ entre les noeuds i et j est ajustée selon la valeur de des degrés latents κ_i, κ_j de sorte qu'un noeud avec un degré latent élevé est « plus proche » des autres au sens de sa probabilité de connexion. La notation $\mathbb{S}^D$ sert à distinguer la famille de graphes aléatoires ci-haut de S^D, la D-sphère définie au Chapitre 1. Qui plus est, les accents circonflexes sur les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{R}$ servent à les discerner de leurs analogues dans le modèle

$\mathbb{H}^{D+1}$. Ces paramètres jouent des rôles comparables dans l'un et l'autre modèle, d'où le choix d'utiliser des symboles semblables, ainsi que pour respecter la notation adoptée dans [41].

L'intérêt de considérer un modèle qui n'est pas purement géométrique est de rendre plus limpide le lien entre les κ_i et les degrés attendus dans le graphe aléatoire résultant. Le paramètre $\hat{\mu}$ de l'équation (2.14) redimensionne le produit des degrés latents $\kappa_i\kappa_j$ pour que $\langle k_i \rangle = \kappa_i$ dans une certaine limite. En effet, lorsque le nombre de noeuds $N \to \infty$, si ceux-ci sont répartis uniformément selon leur coordonnée angulaire, il est possible de fixer

$$\hat{\mu} = \frac{\Gamma(D/2)\beta \sin(D\pi/\beta)}{2D \langle \kappa \rangle \pi^{D+1/2}}, \tag{2.16}$$

afin que la valeur du degré attendu $\langle k_i \rangle$ soit celle du degré latent $\kappa_i, \forall i = 1, \ldots, N$. ce qui a été fait dès le début dans l'article de Serrano *et al.* [42]. Une dérivation alternative de la relation de proportionnalité entre κ et $\langle k \rangle$ est présentée par [68].

Pour sa part, le rayon $\hat{R}$ de la D-sphère est généralement ajusté selon le nombre de noeuds N. La densité globale de noeuds sur $S^D(\hat{R})$ est $N/\text{Vol}[S^D(\hat{R})]$. Pour un certain N, il est possible de fixer la densité à 1 en ajustant le rayon $\hat{R}$ selon

$$\hat{R} = \left(\frac{\Gamma(D+1/2)\text{Vol}[S^D(\hat{R})]}{2\pi^{D+1/2}} \right)^{1/D} = \left(\frac{\Gamma(D+1/2)N}{2\pi^{D+1/2}} \right)^{1/D}, \tag{2.17}$$

où $\hat{R}$ a été isolé dans l'équation (1.39), puis $\text{Vol}[S^D(\hat{R})]$ a été remplacé par N. Dans ce qui suit, le rayon est fixé en fonction de N selon l'équation (2.17). En revanche, cela a peu de répercussions sur les calculs puisqu'on travaille principalement avec une variable aléatoire composite de $\kappa_i, \kappa_j, \hat{R}$ et $\hat{\mu}$, présentée à la section 2.3.2. Cela simplifie ces choix de paramètres d'une manière qui n'a pas d'incidence directe sur les résultats du Chapitre 3.

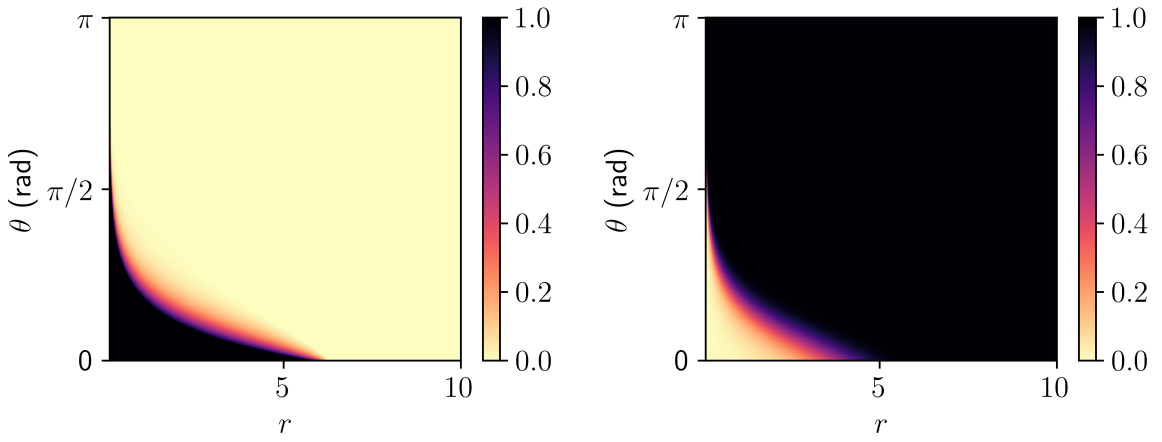
2.3.1 Quasi-isométrie

Sous certaines conditions, il existe un changement de variable qui crée une correspondance entre les modèles $\mathbb{H}^{D+1}$ et $\mathbb{S}^D$. Soit une réalisation du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$, c'est-à-dire un ensemble de noeuds munis de coordonnées sur la boule hyperbolique $B^{D+1}(R, \zeta) \subset H^{D+1}(\zeta)$, ainsi que la probabilité de connexion p_h. Soit $\kappa_0 > 0$ et la fonction $\xi : (0, R) \to (\kappa_0, \infty)$ telle que

$$\xi(r) = \kappa_0 \exp\left[\frac{\zeta D}{2}(R - r) \right]. \tag{2.18}$$

La fonction ξ est décroissante, un grand r est envoyé à un petit κ et vice versa. Pour des valeurs données de κ_0, ζ, D, R, cette fonction est une bijection, et sa bijection inverse est

$$\xi^{-1}(\kappa) = R - \left(\frac{2}{\zeta D} \right) \log\left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right). \tag{2.19}$$



(a) (b)

FIGURE 2.4 – Régime où la distance hyperbolique approximative est une mauvaise approximation en relation avec la probabilité de connexion du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$. En (a), l'erreur relative $^{d_h-\tilde{d}_h}/_{d_h}$ reportée de la figure 1.8a et en (b) $1/(1+z^\beta)$ avec $z = d_h - \tilde{d}_h$ et $\beta = 3$.

Alors, pour tout noeud i, on définit $\kappa_i = \xi(r_i)$ afin d'obtenir la formulation $\mathbb{S}^D$ du réseau. Pour obtenir une équivalence avec la probabilité de connexion p_s, il faut additionnellement fixer

$$\mu = \left(\frac{2}{\zeta}\right) \log\left(\frac{2R}{(\hat{\mu}\kappa_0^2)^{1/D}}\right) \tag{2.20}$$

et mettre à profit l'approximation de la distance hyperbolique de l'équation (1.63). Lorsque $D = 1$, les équations (2.18) et (2.19) constituent précisément le changement de variable introduit dans [69, Équation (2)]. Le changement de variable peut être grandement simplifié lorsque certains paramètres, comme ζ ou le rayon $\hat{R}$ de la D-sphère, sont fixés à 1, ce qui peut généralement être fait sans perte de généralité étant donné que certains paramètres dépendent les uns des autres, et qui est notamment présenté dans [41] pour $D = 1$. À notre connaissance, le changement de variable en dimension arbitraire n'a pas encore été introduit explicitement dans la littérature.

Cette équivalence statistique entre les deux modèles est contrainte par l'erreur sur la distance hyperbolique approximative $\tilde{d}_h$, présentée à la fin du chapitre 2. Or, en $D = 1$ l'approximation est valide pour toutes les probabilités de connexions qui sont significativement non nulles [30]. Ainsi, c'est pour décrire des liens qui ne seront jamais observés que l'approximation est douteuse. Ceci est illustré à la figure 2.4, où on compose le terme d'erreur de la figure 1.8a avec la probabilité de connexion du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$.

Dans certains ouvrages, dont [68], ce changement de variable est qualifié de *quasi-isométrie.*

Le sens mathématique précis de ce terme réfère à une transformation (pas nécessairement continue) d'un espace métrique à un autre telle que les distances dans l'un et l'autre espaces sont assez proches [11, §8.14]. Par exemple, la ligne réelle est en ces termes quasi-isométrique à une ligne de points discrets, mais pas au plan par exemple. L'utilisation du terme pour la correspondance entre les modèles peut être interprétée à la lumière de la distance effective χ mentionnée brièvement à l'équation (2.15). C'est en effet techniquement celle-ci qui se transforme en l'exponentielle de la probabilité de connexion de l'équation (2.13) d'où suit l'équivalence (au sens des probabilités de connexion) entre les deux modèles. Il serait intéressant de vérifier qu'il s'agit (ou pas) d'une quasi-isométrie au sens de Bridson [11].

2.3.2 Variable η comme seuil angulaire des liens

Dans ce travail, on introduit la variable

$$\eta(\kappa_i, \kappa_j, \hat{R}, \hat{\mu}) = \frac{(\hat{\mu}\kappa_i\kappa_j)^{1/D}}{\hat{R}}. \tag{2.21}$$

En d'autres mots, η est une variable aléatoire déterminée par la densité $f_K(\kappa)$ ainsi que les paramètres globaux du modèle. Alors, la fonction de probabilité de connexion dans le modèle $\mathbb{S}^D$ prend la forme suivante :

$$p_s(\eta, \theta) = \frac{1}{1 + (\theta/\eta)^\beta}. \tag{2.22}$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{1 + (\theta/\eta)^\beta} = H(\eta - \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < \eta, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \tag{2.23}$$

La limite $\beta \to \infty$ de la probabilité de connexion est une fonction échelon de Heaviside où tous les noeuds situés à une séparation $\theta < \eta$ sont connectés, ce qui met en lumière η comme un seuil de distance angulaire par paire, ou local.

Pour la fin de cette sous-section, on présente quelques résultats, amusants mais loin d'être fondamentaux, sur les limites de ce seuil angulaire η selon certains régimes du modèle.

Avec $\hat{R}$ de l'équation (2.17), c'est-à-dire tel que la densité totale des noeuds sur $S^D(\hat{R})$ est égale à 1, η devient

$$\eta(\kappa_i, \kappa_j, N, \hat{\mu}) = \left(\frac{\hat{\mu}\kappa_i\kappa_j}{N} \cdot \frac{2\pi^{D+1/2}}{\Gamma(D+1/2)} \right)^{1/D} \tag{2.24}$$

À la lumière de la correspondance entre le degré latent et la coordonnée radiale du modèle $\mathbb{H}^{D+1}$ présentée à la section précédente, η peut donc être interprétée comme une fonction qui quantifie la popularité conjointe d'une paire de noeuds relativement à N. Lorsque les noeuds sont identifiés par des indices i et j, la séparation angulaire est parfois notée plus succinctement par η_{ij}.

Lorsque $\hat{\mu}$ est par ailleurs fixé par l'équation (2.16) pour que les degrés latents correspondent aux degrés espérés,

$$\eta = \left(\frac{\kappa_i \kappa_j}{\langle \kappa \rangle N} \cdot \frac{\Gamma(D/2)\beta \sin(D\pi/\beta)}{\Gamma(D+1/2)D} \right)^{1/D}. \tag{2.25}$$

Cette expression nous permettra d'étudier comment le seuil angulaire se comporte avec D et β/D dans les conditions mentionnées ci-haut.

Lemme 2. *Soit η défini par l'équation (2.25), pour des valeurs particulières de κ, κ', $\langle \kappa \rangle$, N.*

i) Si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $D < M \, \forall D$, alors

$$\lim_{\beta \to D} \eta = 0.$$

ii) Si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $D < M \, \forall D$, alors

$$\lim_{\beta \to \infty} \eta = \left(\frac{\kappa \kappa'}{\langle \kappa \rangle N} \frac{\pi \Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} \right)^{1/D}.$$

iii) Si $\beta = cD$, $\forall D$, $c \in (1, \infty)$ de sorte que le ratio β/D soit constant, alors

$$\lim_{D \to \infty} \eta = 1.$$

Démonstration. i) Trivialement, $\beta/D \to 1$ et alors $\sin(\beta\pi/D) \to \sin \pi = 0$.

ii) Si on note $g(\beta) := \sin(D\pi/\beta)$ et $h(\beta) := D/\beta$, alors $g(\beta) \to 0$ et $h(\beta) \to 0$ lorsque $\beta \to \infty$. Or,

$$\frac{g'(\beta)}{h'(\beta)} = \frac{-D\pi/\beta^2 \cos(D\pi/\beta)}{-D/\beta^2} = \pi \cos(D\pi/\beta) \to \pi$$

lorsque $\beta \to \infty$. Par conséquent, selon la règle de L'Hôpital, [5, Théorème 5.13],

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{g(\beta)}{h(\beta)} = \pi.$$

Puisque $\frac{\kappa\kappa'}{\langle\kappa\rangle N} \frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)}$ est constant, selon le théorème 3.3 de [5],

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{\kappa \kappa'}{\langle \kappa \rangle N} \frac{\Gamma(D/2)\beta \sin(D\pi/\beta)}{\Gamma(D+1/2)D} = \frac{\kappa \kappa'}{\langle \kappa \rangle N} \frac{\pi \Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)}.$$

Enfin, le résultat suit de la continuité de $\eta \mapsto \eta^{1/d}$, [5, Théorème 4.7].

iii) Pour tout $p > 0$, $p^{1/D} \to 1$ lorsque $D \to \infty$, voir [5, Théorème 3.20]. Or, ici le terme dont on prend la racine D-ième varie avec D, il nous faut donc adapter légèrement la démonstration. Pour alléger la notation, posons $A := \frac{\kappa\kappa'}{\langle\kappa\rangle N}(\beta/D)\sin(D\pi/\beta)$ et

$$x_D := \left(\xi \frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} \right)^{1/D} - 1.$$

Avec un argument demi-entier, la fonction Γ peut être exprimée [70] selon

$$\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(D-2)!!}{(D-1)!!} & D \text{ pair}, \\ \sqrt{\pi}\frac{(D-2)!!}{(D-1)!!} & D \text{ impair}. \end{cases}$$

Or, $\forall D > 2$, ${}^{(D-2)!!}/_{(D-1)!!} < 1$ et donc

$$0 < \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(D-2)!!}{(D-1)!!} < \sqrt{\pi}\frac{(D-2)!!}{(D-1)!!} < \sqrt{\pi}. \tag{2.26}$$

D'une part, si $A\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} > 1$, $x_D > 1$. Par la formule du binôme,

$$1 + Dx_D \leq (x_D + 1)^D = A\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)}.$$

Il en résulte que

$$0 < x_D \leq \frac{1}{D}\left(A\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} - 1\right).$$

Or, puisque $A\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d+1/2)}$ est borné selon (2.26), le membre de droite de l'inégalité tend à 0 lorsque $D \to \infty$, d'où $x_D \to 0$ découle aussi. D'autre part, si $0 < A\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} < 1$, le résultat est obtenu similairement en posant

$$x_D := \left(A\frac{\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)}\right)^{-1/D} - 1.$$

□

Ces résultats, bien que peu élaborés, donnent une intuition sur ce qui se passe quand la dimension D prend certaines valeurs limites. Notamment, à l'image de la distance angulaire entre des points tirés aléatoirement sur la D-sphère qui tend à $\pi/2$ lorsque $D \to \infty$, le seuil angulaire η tend à la valeur constante de 1 dans cet équivalent hyperbolique. Il est toutefois bon de se rappeler que cela s'applique lorsque $\hat{\mu}$ et le rayon de la D-sphère sont fixés selon les équations (2.16) et (2.17), un contexte somme toute assez spécifique et qui sous-tend lui-même certaines approximations.

2.4 Revue de littérature

De nombreuses références sur les modèles de réseaux hyperboliques ont déjà été présentées dans les sections précédentes. On retrace ici plus spécifiquement des bribes de l'histoire de l'étude des modèles hyperboliques en lien avec la structure communautaire, les modèles en plus grandes dimensions, ainsi que des liens existant dans la littérature entre les deux.

2.4.1 Réseaux hyperboliques et structure communautaire

L'étude de la structure communautaire des réseaux hyperboliques ne date pas d'hier. Dès leurs premières applications aux réseaux issus de données technologiques, biologiques et économiques [63, 69, 71], les plongements hyperboliques de réseaux ont exhibé une hétérogénéité angulaire évoquant de la structure communautaire assortative. Ces observations empiriques ont établi les bases de l'association entre les communautés hyperboliques et les regroupements angulaires.

La première ligne de recherche pour explicitement caractériser le potentiel des modèles hyperboliques à saisir la structure communautaire a été de lever la supposition d'homogénéité angulaire pour générer explicitement des communautés angulaires. En 2015, Zuev *et al.* ont présenté un modèle d'attachement préférentiel hyperbolique pour générer des réseaux avec des regroupement angulaires, ce qu'ils nomment des communautés souples [56, 72]. Une approche statique a aussi été proposée par [65] pour échantillonner les coordonnées angulaires regroupées à partir de distributions gaussiennes sur le cercle. Ces deux approches considèrent indépendamment les coordonnées angulaires et les degrés latents, c'est-à-dire que les espaces de similarité et de popularité sont indépendants au sens probabiliste.

La structure communautaire détectée par des algorithmes standards a été mise de l'avant pour améliorer l'efficacité des algorithmes de plongement hyperboliques de réseaux réels [59, 73, 74]. L'idée générale est de considérer que les partitions détectées indiquent en première approche les secteurs angulaires où devraient se trouver les noeuds. Tout récemment inspirée de ces méthodes, une équipe de recherche a examiné la structure communautaire inhérente des modèles hyperboliques. Kovács et Palla ont montré que des réseaux échantillonnés avec une distribution angulaire uniforme peuvent tout de même présenter une modularité Q élevée, ainsi qu'une séparation angulaire significative entre des partitions détectées par des algorithmes standards [75]. En revanche, ces résultats indiquent que la modularité et la séparation angulaire des communautés sont surtout élevées dans un régime assez restreint des modèles hyperboliques, lorsque la probabilité de connexion est un seuil rigide et que la distribution des degrés est la moins hétérogène. Aussi, leur analyse est à la merci des limites de la modularité maximale comme mesure scalaire de structure communautaire. En effet, la modularité peut être détectée même là où la structure communautaire n'est pas significative. De plus, selon les résultats théoriques de Chellig *et al.* [76], il est presque toujours possible de trouver une partition angulaire de modularité tendant à 1 dans la limite des grands graphes du modèle $\mathbb{H}^2$.

2.4.2 Modèles hyperboliques de plus grande dimension

Bien que les articles fondateurs [30, 42] présentent des modèles dont la dimension est arbitraire, la première décennie d'exploration des réseaux hyperboliques s'est bel et bien consacrée presque exclusivement à l'espace hyperbolique de plus basse dimension par l'entremise des modèles $\mathbb{S}^1/\mathbb{H}^2$. Il n'y a à ce jour pas de justification théorique ou empirique soutenant que les réseaux

hyperboliques aient nécessairement une dimension minimale. Les raisons principales évoquées pour le choix de $D = 1$ sont la simplicité et les limites imposées sur le coefficient de clustering en très grandes dimensions [64, 72]. Or, le tournant des années 2020 a été marqué par un regain d'intérêt pour les modèles de plus grande dimension.

L'article de Yang et Rideout [31] est le premier ouvrage publié où le modèle $\mathbb{H}^{D+1}$ est présenté explicitement. S'y trouvent aussi des démonstrations des lois de probabilité des degrés selon différents régimes de paramètres ainsi que sur l'absence de corrélations entre les degrés des noeuds. Un traitement semblable est fait par Budel *et al.* [19] dans un article à venir qui cartographie plus en détail les différentes limites du modèle selon la relation entre la température et la dimension ainsi que la répartition radiale des noeuds. Ce manuscrit présente aussi une version raffinée de la distribution des degrés de réseaux hyperboliques en dimension arbitraire, qui est de loi mixte Pareto-Poisson. Dans la même lignée, Kovács et Palla [77] ont décrit explicitement une version à dimension arbitraire du modèle génératif PSO de 2012 [43] présenté dans ses grandes lignes à la section 2.2.2.

En contraste avec ces travaux plus théoriques, Almagro, Serrano et Boguña utilisent une approche guidée par les plongements de réseaux de données réelles pour identifier la dimension hyperbolique intrinsèque de réseaux à partir des dénombrements de cycles courts, soient de trois, quatre ou cinq noeuds [78]. Il s'agit d'un manuscrit assez important pour la recherche en réseaux hyperboliques puisque c'est le premier qui indique que de nombreux réseaux réels auraient vraisemblablement une dimension hyperbolique sous-jacente plus élevée. Par contraste, la recherche de la dimension optimale d'espaces où plonger des données structurées est un problème qui a attiré considérablement plus d'efforts de recherche dans d'autres domaines, comme l'apprentissage machine [79, 80].

2.4.3 Relations entre la dimension et la structure communautaire

La relation entre la structure communautaire et la dimension a été explorée dans le modèle PSO en dimension arbitraire de Kovács et Palla [77]. À la manière de leur article sur la structure communautaire inhérente, ils mesurent la modularité pour différents régimes de paramètres du modèle, en variant aussi cette fois-ci la dimension. Leurs résultats indiquent que la modularité maximale décroît avec la dimension. Qui plus est, ils remarquent une dégénérescence entre les dimensions lorsque les connexions à distances sont permises, à la lumière du fait que localement (au niveau d'une paire de noeuds) c'est le ratio β/D qui détermine la forme de la probabilité de connexion. Somme toute, leur analyse indique que la modularité maximale peut exhiber des valeurs élevées qui suggèrent de la structure communautaire, mais seulement dans certains régimes de paramètres comme dans le cas $D = 1$.

Le lien entre la dimension et la structure communautaire a aussi été étudié numériquement dans [60] pour $D \in \{1, 2\}$. Les auteurs démontrent que certains petits réseaux qui possèdent

une structure communautaire telle que détectée par des algorithmes standard ne montrent pas de séparation angulaire claire entre les communautés dans un plongement en $D = 1$, alors que les communautés sont bien distinctes en $D = 2$. Leurs travaux suggèrent qu'augmenter la dimension pourrait permettre d'éviter le chevauchement angulaire entre les communautés souples.

Chapitre 3

Dimension et structure communautaire des réseaux hyperboliques

3.1 Résumé

Dans la dernière décennie, les réseaux hyperboliques aléatoires ont réussi à expliquer géométriquement de nombreuses propriétés couramment observées dans les réseaux complexes réels, notamment la fermeture des triangles, la navigabilité et l'hétérogénéité des distributions des degrés. Bien que certaines études aient montré que les modèles hyperboliques peuvent générer de la structure communautaire, une autre propriété saillante des réseaux réels, on soutient ici que les modèles actuels négligent l'importance du choix de la dimension de l'espace hyperbolique sous-jacent pour représenter adéquatement des données groupées par communautés. On démontre qu'il existe une différence qualitative notable entre le modèle de plus faible dimension et ses homologues de plus grande dimension, en particulier par rapport à la manière dont la similarité entre les noeuds restreint les probabilités de connexion. Puisqu'augmenter la dimension accroît aussi le nombre de plus proches voisins pour les amas angulaires qui représentent des communautés, on montre numériquement que considérer ne serait-ce qu'une dimension supplémentaire permet de générer des structures communautaires plus diversifiées et réalistes.

3.2 Abstract

Over the last decade, random hyperbolic graphs have proved successful in providing geometric explanations to many key properties of real-world networks, including strong clustering, high navigability, and heterogenous degree distributions. Although a few studies have shown that hyperbolic models can generate community structures, another salient feature observed in

real networks, we argue that the current models are overlooking the choice of the latent space dimensionality that is required to adequately represent data with communities. We show that there is an important qualitative difference between the lowest-dimensional model and its higher-dimensional counterparts with respect to how similarity between nodes restricts connection probabilities. Since more dimensions also increases the number of nearest neighbors for angular clusters representing communities, considering only one more dimension allows us to generate more realistic and diverse community structures.

3.3 Introduction

When one pictures a system and relationships between its constituents, the idea of closeness naturally comes to mind because more often than not, the flows that make up those relationships depend upon some form of proximity. Take neurons in a brain or servers underlying the infrastructure of the Internet, two systems that may seem to have little in common. Yet, both are remarkably complex and adequately modeled in the field of network geometry [41, 63, 81], where closeness between nodes and properties of an underlying abstract space explain how elements of the network are interconnected. In particular, a latent space of constant negative curvature, the two-dimensional hyperbolic plane, captures in a simple yet accurate way many significant complex network properties, namely sparsity, self-similarity, small-worldness, heterogeneity, non-vanishing clustering, and community structure [64]. In this framework, each node exists on a surface where a radial dimension encodes its popularity, or how likely it is to have many neighbors, and an angular dimension encodes the similarity between nodes, where similar nodes are more likely to be related [43]. The successes of hyperbolic network geometry cover a wide range of practical applications, like predicting economic patterns across time [82], making sense of the resilience of the Internet [63] or modeling information flow in the brain [81, 83], to name a few. Furthermore, hyperbolic space is the only known metric space on which maximum-entropy random graphs can reproduce real network properties like clustering, sparsity, and heterogeneous degree distributions all at once [64]. The model has also been extended to weighted [84], growing [43, 85], bipartite [86], multilayer [87, 88] or modular networks [56, 65, 72].

Now that hyperbolic networks of the lowest dimension have been shown to capture so many realistic properties, some attention has shifted to the study of higher-dimensional models [31, 77, 78]. In these, there is still one radial coordinate for popularity, but there are $D > 1$ dimensions encoding similarity, or perhaps, *similarities*. In other words, there is more than one way in which things can be similar or not, and higher-dimensional hyperbolic network models embody this intuition. The choice of dimension is an already prominent problem for machine learning applications of hyperbolic embeddings [80] as it might facilitate the likelihood maximization procedure for hyperbolic coordinates of real networks. It has been shown that the clustering places an upper limit on the dimension of the space for modeling

real networks [89]. In recent work, Almagro *et al.* [78] have shown that various networked data sets have an underlying hyperbolic dimension that is ultra-low, albeit not minimal as previously assumed.

One of the most ubiquitous properties of complex networks is community structure, when connectivity within subgroups of nodes, or communities, is prominently different than with the rest of the network [45, 90]. Network motifs have long been recognized as universal building blocks of complex networks [91], community structure detection is one of the most long-standing active fields of network science [92, 93], and most networked data show some sort of community structure, with one of the most interesting complex systems, the brain, making no exception [44, 94]. In hyperbolic network models, community structure is expressed as subgroups of nodes that are closer angularly, either in hyperbolic embeddings of real networks [58, 63] or synthetic models that explicitly generate communities [56, 65, 72]. Since changing the dimension of hyperbolic network models affects primarily the number of angular coordinates, one could think that dimension and community structure are closer than they appear.

Let us take a look at a hyperbolic embedding of the airport network on Fig. 3.1. Airports within the same continent are more prone to be connected by direct flights, which is why nodes of the same color are mostly grouped by angular coordinate. Nevertheless, airports in Africa, Asia, and Europe seem to be more mixed together because their actual geographic location has, very broadly, the shape of a triangle which cannot be reflected in the maximum likelihood embedding of Fig. 3.1. This network illustrates that a unique similarity dimension might not be enough to model community structure with non-sequential patterns. If that were the case, one could wonder why is that so, and how can we quantify community structure in hyperbolic random graphs?

As to why, we find that going from one angular similarity dimension to more, and even to only one more, have drastic effects on how the similarity between nodes influences their connectivity. We show that angular closeness constrains connections much more, and differently, in $D = 1$ than in other dimensions, which is done by studying the probability density function of the angular distance between connected nodes. We also quantify how the number of neighbors is not the same on a circle or on a sphere or on an even higher-dimensional sphere. This phenonenon impacts the number of nearest neighbors for angular clusters representing communities in hyperbolic random graphs. As a simplest experiment of how those two phenomenons come into play, we generate hyperbolic networks possessing community structure in $D = 1$ and $D = 2$. We thus obtain insights into how and why networks with community structure might have an underlying hyperbolic dimension that is higher than one.

This paper is divided as follows. In Sec. 3.4, the key properties of the $\mathbb{H}^{D+1}$ hyperbolic random graph model are recalled, along with its relationship to the $\mathbb{S}^D$ formulation and some remarks about angular distance on D-spheres. The interplay between distance and dimension

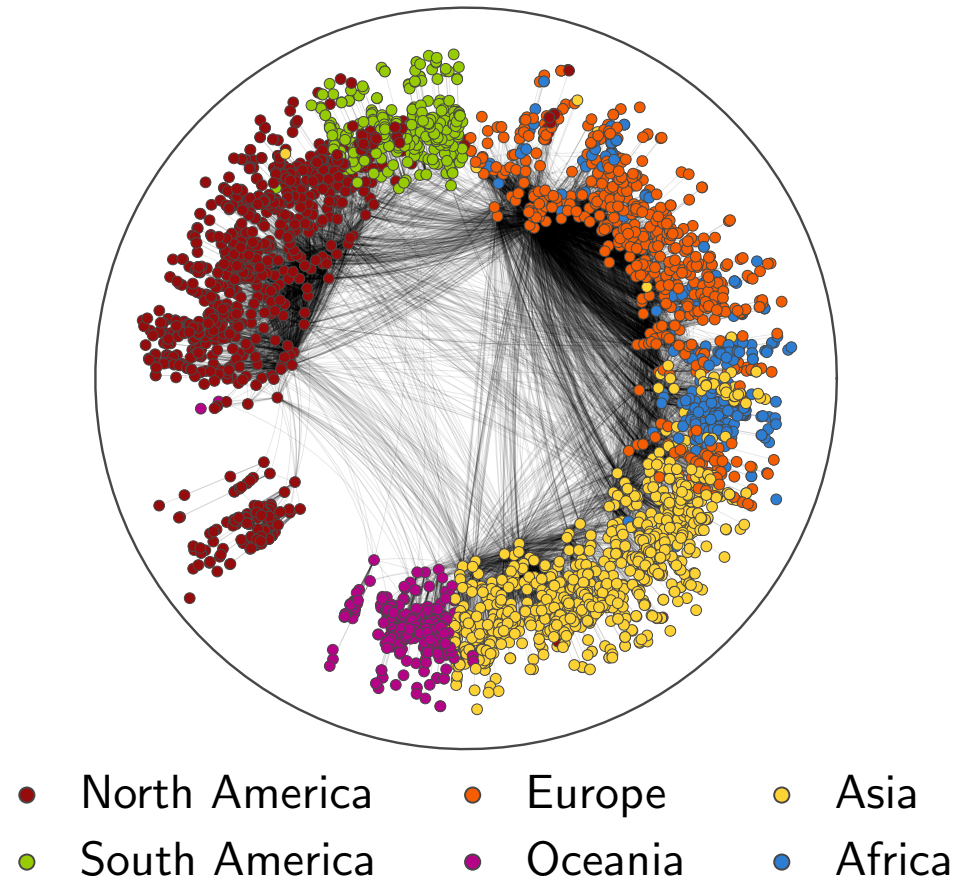


Figure 3.1 – Airports network embedded in the hyperbolic disk using the Mercator algorithm [58]. Edges represent pairs of airports connected by a direct flight and colors represent the continent on which the airport is located. Here, edges follows hyperbolic geodesics of the conformal disk model [4]. Data downloaded from `openflights.org`.

is studied in Sec. 3.5.1, where we will see how dimension affects how connected nodes in hyperbolic random graphs are likely to be found at a given angular distance from one another. In either the pairwise case, where the expected degrees of the nodes have to be considered, or in the general case, for any expected degree distribution, the probability of finding connected nodes at a certain angular distance presents a sharp contrast between $D = 1$ and $D \geq 2$. Then, we digress briefly on the number of neighbors on D-spheres. In the last part of the paper, we show how this affects the possibility to generate hyperbolic networks with community structure. This is quantified on bloc matrices representing how generated communities are related to one another in Sec. 3.6.

3.4 Hyperbolic networks models

We first review basic notions and establish some useful notation about hyperbolic random graphs in any dimension, before presenting some of their most remarkable properties.

A hyperbolic space is a complete, simply connected, Riemannian manifold of constant negative curvature $-\zeta^2$ and dimension $D+1$ [14, 4, Chap. 8]. The lowest dimensional space with $D = 1$ is the hyperbolic plane, a smooth surface that can be modeled as one sheet of a hyperboloid in the three-dimensional Minkowski space, but also using other equivalent models like the upper half-plane, the Klein disk and the Poincaré disk [4, 26].

Hyperbolic random graphs are based upon the hyperboloid model H^2, where all points of the hyperbolic plane are parametrized using coordinates $\varphi \in [0, 2\pi)$ and $r \in [0, R)$ and thus have a natural projection on a circle through coordinate φ [30]. An analogous coordinate parametrization is used in higher dimension, although the angular coordinate then map points to the D-sphere instead of the circle, *i.e.* $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_D)$, with $\varphi_1, ..., \varphi_{D-1} \in [0, \pi)$ and $\varphi_D \in [0, 2\pi)$ [31, 4, Sec. 3.4]. The distance d_h between two points $x, x' \in H^{D+1}$ whose respective coordinates are (φ, r) and (φ', r') is given by the hyperbolic law of cosines

$$d_h(x, x') = \frac{1}{\zeta}\text{arcosh}(\cosh \zeta r \cosh \zeta r' - \sinh \zeta r \sinh \zeta r' \cos \theta), \tag{3.1}$$

where $\theta = \text{acos}(x \cdot x' / |x|\,|x'|)$ is the angular distance between x and x', here considered as two vectors in $\mathbb{R}^{D+1}$. This generalization is referred to as the hyperboloid model H^{D+1}. One important aspect of Eq. (3.1) is that, for sufficiently large r, r', and for small θ,

$$d_h(x, x') \approx r + r' + \frac{2}{\zeta}\log\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{3.2}$$

See [31, 32] for a detailed derivation and bounds on the approximation.

What is referred to as the $\mathbb{H}^{D+1}$ model throughout this paper is not only the hyperbolic space presented above, but a random graph defined on this space. Consider a set of N nodes,

$V = \{x_i\}_{i=1,\dots,N} \subset H^{D+1}$, where each x_i is a continuous random variable on H^{D+1}. A natural choice to study the effect of hyperbolic geometry on the graph is to sample uniformly in H^{D+1} [30, 31]. The connection probability

$$p_h(x, x') = \frac{1}{1 + e^{\beta\zeta[d_h(x,x') - \mu]/2}} \tag{3.3}$$

defines a random graph with node set V, where each edge is an independent Bernoulli random variable with chance of success $p_h(x, x')$. We stress that there are two levels of randomness. First, the nodes' positions are sampled from a continuous distribution on H^{D+1}. Second, each realization of those positions defines a discrete probability measure on the set of all simple graphs of size N. For uniformly distributed nodes, shortest paths on graphs sampled from $\mathbb{H}^{D+1}$ follow the shortest paths on the underlying hyperbolic space H^{D+1} with high probability [30, 61], which is why the random graphs themselves are said to be hyperbolic. Two additional parameters are introduced in Eq. (3.3): $\beta > 0$ that controls for the range of connection probabilities and $\mu > 0$ that sets a connectivity distance threshold and tunes the expected average degree when nodes are sampled uniformly [30]. There is a phase transition at $\beta/D = 1$, a critical value for which uniform hyperbolic random graphs have different asymptotic properties [19]. Our work takes place in the so-called « cold » regime, $\beta > D$, which has been shown to generates graphs with power-law degree distributions and low average degree. It also follows that the ratio β/D is kept constant when comparing models of different dimensions in Secs. 3.5 and 3.6.

The random graph model can also be defined in the $\mathbb{S}^D$ representation [42], using the same angular coordinates that maps the nodes to a D-sphere $S^D = \{x \in \mathbb{R}^{D+1} \,|\, |x|^2 = \hat{R}^2\}$, but assigning to each node a new continuous random variable, the *latent degree* $\kappa \in (\kappa_0, \infty)$, instead of the radial coordinate r. The following change of variables, a D-dimensional generalization of what is done in [58], transforms from r to κ and inversely through

$$\kappa = \kappa_0 \exp\left[\frac{\zeta D}{2}(R - r)\right]. \tag{3.4}$$

Introducing one last parameter $\hat{\mu}$, we can set $\mu = (2/\zeta) \log[2\hat{R}/(\hat{\mu}\kappa_0^2)^{1/D}]$ in Eq. (3.3) and using the hyperbolic distance approximation of Eq. (3.2), we obtain

$$p_s(x, x') = \frac{1}{1 + \left[\frac{\hat{R}\theta}{(\hat{\mu}\kappa\kappa')^{1/D}}\right]^{\beta}}, \tag{3.5}$$

the connection probability as originally defined in the latent variables formalism [42]. Albeit having different values for the equivalence between connection probabilities to hold, parameters $\hat{R}$ and $\hat{\mu}$ in the $\mathbb{S}^D$ model play a similar role, respectively with regards to nodes's density on the space and the mean degree, as R and μ in the $\mathbb{H}^{D+1}$ model, which justifies this choice of notation. [1]

1. The notation also follows [41].

For large sparse graphs with uniformly sampled angular coordinates, the parameter μ can be tuned such that the expected degree of a node with latent degree κ (sampled from any distribution) is proportional to the value of κ [42, 68], where the expectation is over all possible realizations of $\mathbb{S}^D$, hence the name « latent degree ». In addition to this relation between latent and expected degrees, Eq. (3.5) highlights how angular coordinates encode similarity and latent degrees encode popularity, since the connection probability gets closer to 1 for small angular distance θ and high latent degrees κ, κ'. For this reason, the D-sphere parametrized by angular coordinates is sometimes referred to as the *similarity space*. It is worth mentioning that in the literature, the notation is often simplified by adequately fixing parameters, which has not been done heretofore to keep the relationship between cited articles more accessible.

The change of variables defined in Eq. (3.4) preserves the connection probabilities between nodes whenever Eq. (3.2) is valid. For uniformly distributed nodes on H^{D+1}, it has been shown that the proportion of node pairs for which this is true tends to 1 [41]. Thus, random graph models within either $\mathbb{S}^D$ or $\mathbb{H}^{D+1}$ are considered equivalent. In our work the $\mathbb{S}^D$ representation is used without loss of generality.

Given latent degrees κ, κ', we can define a new continuous random variable,

$$\eta(\kappa, \kappa') := \frac{(\hat{\mu}\kappa\kappa')^{1/D}}{\hat{R}}, \tag{3.6}$$

whose outcome depends on the probability density function (pdf) of latent degrees, as well as parameters $\hat{\mu}$ and $\hat{R}$. Letting go of the explicit dependency on $\kappa\kappa'$ for brevity, the connection probability between a pair of nodes, given by Eq. (3.5), can be written as

$$p(\theta, \eta) = \frac{1}{1 + (\theta/\eta)^\beta}, \tag{3.7}$$

which highlights that η acts as a local angular distance connectivity threshold. Indeed,

$$\lim_{\beta \to \infty} p(\theta, \eta) = H(\eta - \theta), \tag{3.8}$$

where H is the Heaviside step function. Thus, in the $\beta \to \infty$ regime, all node pairs for which $\theta < \eta$ would be connected. In the $\mathbb{S}^D$ representation, it is common to fix the radius $\hat{R}$ such that the number of nodes N is equal to the surface area of the D-sphere [42, 58], which yields

$$\hat{R} = \left(\frac{\Gamma(\frac{D+1}{2})N}{2\pi^{(D+1)/2}} \right)^{1/D}. \tag{3.9}$$

In this setting, η varies as $(\kappa\kappa'/N)^{1/D}$. Thus, we can think of η as capturing the pairwise popularity in a way reminiscent of how the angular distance θ captures the similarity of node pairs.

A common choice of pdf for angular coordinates is such that points parametrized by φ are uniformly distributed on S^D. We also consider Pareto-distributed latent degrees with mean $\bar{\kappa}$,

$$f_K^{\text{Pareto}}(\kappa) = (\gamma - 1)\, \kappa_0^{\gamma - 1} \kappa^{-\gamma}, \qquad \kappa_0 = \frac{\bar{\kappa}(\gamma - 2)}{\gamma - 1}, \tag{3.10}$$

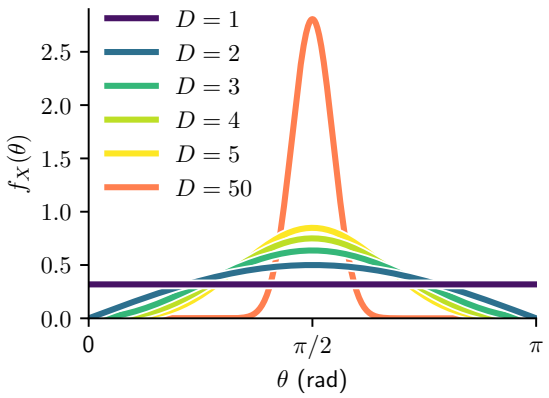


Figure 3.2 – Probability density function of angular distance between points sampled uniformly at random on a D-sphere.

which, with $\gamma = 2\zeta + 1$, is akin to sampling nodes uniformly from a hyperbolic ball of H^{D+1}, but offer more freedom on the shape of the degree distribution [2].

Increasing the dimension of spheres is far from being as intuitive as unfolding more dimensions of flat spaces, which can be pictured through angular distance distributions. Let X be a random variable describing the angular distance $\theta \in [0, \pi]$ between two points sampled uniformly at random on S^D. As derived in [21], the pdf of X is given by

$$f_X(\theta) = \frac{1}{I_D} \sin^{D-1} \theta, \tag{3.11}$$

with

$$I_D = \int_0^\pi \sin^{D-1} \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\Gamma(D+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(D/2)}. \tag{3.12}$$

Figure 3.2 shows that for $D \gg 1$, chances are that any other point will be found at more or less an angular distance of $\theta = \pi/2$, a surprising property related to the concentration of measure phenomenon [22]. Yet even for very low D, there is a significant qualitative shift between uniformity in $D = 1$ and unimodality in $D \geq 2$. This well-known property hints intuition for the upcoming section, where instead of sampling pairs of points on D-spheres, we study edges of hyperbolic random graphs.

3.5 Effects of dimensionality

Dimension is a fundamental property of spaces. An ant living on a circle would have much less freedom than one living on a sphere. Yet, if those two ants were to talk to each other, they might agree that they live on the same kind of space because some properties, like the possibility to come back to the same point by going straight ahead long enough, are the same. As presented in Sec. 3.4, increasing the dimension of hyperbolic random graphs boils down

2. The $\bar{\kappa}$ is used for the mean value to avoid confusion with expected values in random graphs.

to considering more angular coordinates that map to the sphere or higher dimensional D-spheres, but how does this impact the graph structure? Some properties of the graphs are almost unchanged, like the degree distribution [31], while some others, like the short cycle structure [78], are affected significantly.

Our take on this question broadly deals with neighborhoods, of connected nodes in the graph but also simply of points on D-spheres. Since the dimension affects primarily the angular similarity space, the focus is first on uniform distribution of nodes on $\mathbb{S}^D$ and the study of angular distance between nodes that are connected. On another note, we then study how the number of nearest neighbors on D-spheres varies with dimension.

3.5.1 Angular distance between connected nodes

Distance between connected nodes in hyperbolic random graphs have been studied from their debut [30], but as far as we know only in one dimension. In $\mathbb{S}^1$, most edges are observed between nodes separated by a very small angular distance, except for nodes of very high expected degree (see for instance [30, Fig. 5.]). We have found this propriety to be strongly affected by the dimension of the underlying hyperbolic space, making it as much an effect of dimensionality than an effect of hyperbolicity.

Consider a $\mathbb{S}^D$ model of N nodes as defined in Sec. 3.4 with angular coordinates sampled uniformly with respect to the spherical measure and latent degrees sampled from any pdf $f_K(\kappa)$. We study the distribution of the angular distance between connected nodes within this hyperbolic random graph, as a way to assess the interplay between the dimension of the similarity space and the topology of the graph. A pairwise case of two nodes with given latent degrees is first examined, with its generalization to the whole latent degree distribution then presented. The hard threshold limit described by Eq. (3.8) is also studied since it allows for some insightful approximations of our results.

For a pair of nodes, general case

Consider a pair of nodes with latent degrees κ, κ' such that η is given by Eq. (3.6). We study the pdf of angular distance between those two nodes, provided that they are connected in the random graph. Let X be the continuous random variable describing the angular distance $\theta \in [0, \pi]$ between these nodes. Since the angular coordinates of the graph are uniformly distributed, the pdf of X is given by Eq. (3.11). Let Y be the continuous random variable describing the value of η, whose support depends on possible values of κ. Finally, let A be the discrete Bernoulli random variable describing whether the nodes are connected ($A = 1$) or not ($A = 0$) according to the probability of Eq. (3.5). The pdf of angular distance between two nodes is given by the conditional pdf

$$f_{X|Y,A}(\theta \,|\, \eta,\, 1) = \frac{f_{X,Y,A}(\theta, \eta, 1)}{f_{Y,A}(\eta, 1)} \tag{3.13}$$

with the left-hand side notation standing more compactly for $f_{X|Y,A}(X = \theta \,|\, Y = \eta,\, A = 1)$. Since A depends on θ and η through the connection probability of Eq. (3.5), but random variables are otherwise independent, the numerator of Eq. (3.13) is given by

$$f_{X,Y,A}(\theta, \eta, 1) = \frac{f_X(\theta) f_Y(\eta)}{[1 + (\theta/\eta)^\beta]}. \tag{3.14}$$

Likewise, the denominator is

$$f_{Y,A}(\eta, 1) = f_Y(\eta) f_{A|Y}(1 \,|\, \eta) \tag{3.15}$$

where $f_{A|Y}(1 \,|\, \eta)$ is the following density, with X marginalized out,

$$f_{A|Y}(1 \,|\, \eta) = \int_0^\pi \frac{f_X(X)}{1 + (\theta/\eta)^\beta} \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \frac{\sin^{D-1}\theta}{I_D[1 + (\theta/\eta)^\beta]} \mathrm{d}\theta. \tag{3.16}$$

Altogether, this yields the explicit expression for Eq. (3.13)

$$f_{X|Y,A}(\theta \,|\, \eta,\, 1) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\eta)} \frac{\sin^{D-1}\theta}{[1 + (\theta/\eta)^\beta]}, \tag{3.17}$$

with normalization

$$\mathcal{Z}(\eta) := \int_0^\pi \frac{\sin^{D-1}\theta}{1 + (\theta/\eta)^\beta} \mathrm{d}\theta. \tag{3.18}$$

Intuitively, Eq. (3.17) is proportional to $\sin^{D-1}\theta$ as in the distance distribution for uniformly distributed nodes on $\mathbb{S}^D$ of Eq. (3.11), while allowing for the influence of hyperbolic connection probability given by Eq. (3.7). Its behavior for $D \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ is shown in Fig. 3.3.

An immediate observation is that the pdf of the angular distance separating connected nodes is strictly decreasing for $D = 1$ and $\beta < \infty$, since it is proportional to the connection probability of Eq. (3.5). Hence, most edges will have nearly $\theta = 0$ in $D = 1$, as expected in the $\mathbb{H}^2$ generative model [30] and shown by the purple curve in Fig. 3.3. In contrast, Eq. (3.17) is unimodal for all $D > 1$, with a mode greater than zero and increasing with dimension, as we will see shortly.

The existence and the location of the mode of Eq. (3.17) for $D > 1$ is deduced by setting its first derivative with respect to θ to zero to obtain

$$(D - 1)\left[\left(\frac{\eta}{\theta^*}\right)^\beta + 1\right] = \frac{\beta \tan\theta^*}{\theta^*}, \tag{3.19}$$

where $\theta^* \in (0, \pi)$ can be a maximum, a minimum or an inflection point. Since Eq. (3.17) is the product of a unimodal function and a decreasing function, we assume the critical point above is a maximum. It is shown in Appendix 3.8 that $\theta^* = 0$ iff $D = 1$. Furthermore, if $\theta^* \ll 1$ such that $\tan\theta^* \approx \theta^*$, the solution of Eq. (3.19) can be closely approximated by

$$\theta^* \approx \eta \left(\frac{1}{\frac{\beta}{(D-1)} - 1}\right)^{1/\beta}. \tag{3.20}$$

This approximation is valid whenever the angular threshold $\eta \sim (\kappa\kappa'/N)^{1/D}$ is small enough, which is the case for a significant fraction of node pairs in hyperbolic random graphs [30] and most observed degree distributions [53]. Both factors of Eq. (3.20) are increasing functions of the dimension D. Therefore, for the vast majority of nodes having a "reasonable" expected degree, the most likely angular distance between connected nodes in $\mathbb{S}^D$ is greater and greater as dimension increases. This is yet another indicator that most connected nodes will in fact be separated by an angular distance $\theta > 0$ in hyperbolic random graphs $\mathbb{S}^D$ with $D > 1$. The expression (3.17) encapsulates in a simple yet accurate way that the joint effect of nodes' angular repartition on D-spheres with the hyperbolic connection probability is qualitatively and quantitatively different across ultra-low dimensions of the model.

For a pair of nodes, hard threshold limit

An informative limiting case for the angular distance between connected nodes arises with $\beta \to \infty$. Then, the connection probability becomes a step function given by Eq. (3.8) with angular distance threshold η. Equation (3.17) becomes

$$f_{X|Y,A}(\theta \,|\, \eta, 1) \overset{\beta\to\infty}{\approx} \frac{H(\eta-\theta)\sin^{D-1}\theta}{\mathcal{Z}(\eta)} \overset{\eta\ll 1}{\approx} \frac{H(\eta-\theta)\, D\theta^{D-1}}{\eta^D}, \tag{3.21}$$

where the second approximation uses the small angle property of sine. In Fig. 3.3, the dashed line shows the exact value of Eq. (3.17) with $\beta \to \infty$, but this is exactly the behavior expected

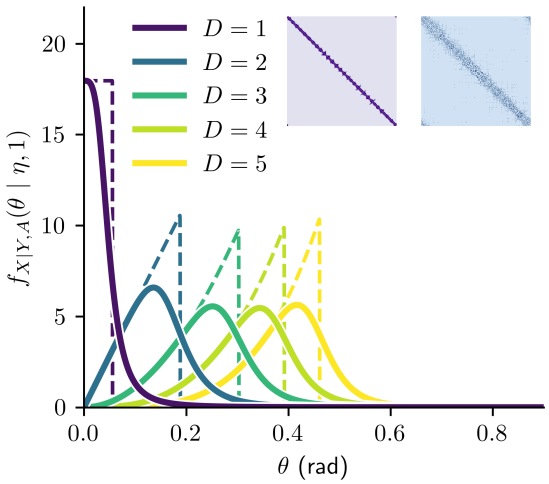


Figure 3.3 – Probability density functions of angular distance between connected nodes in the $\mathbb{S}^D$ model given by Eq. (3.17), for $N = 1000$ nodes, with $\kappa = \kappa' = 10.0$ and $\beta/D = 3.5$. For $D = 1$, the maximum is at $\theta = 0$, as depicted in the purple example connectivity matrix where the dark diagonal line illustrates all of the connection probability concentrated to very small angular distances. In $D \geq 2$, this is relaxed, as shown by the blue curve and connectivity matrix. The dashed lines show the $\beta \to \infty$ limit. Matrices represent a $\mathbb{S}^D$ connection probability matrix for $D = 1$ (left) and $D = 2$ (right), $\kappa_i = 10.0$ for all nodes i, ordered according to the polar coordinates.

from the truncated powers of θ given in the last expression of Eq. (3.21). There is a sharp maximum at the threshold η for all $D > 1$, which means quite counterintuitively that in this limit, most connected nodes will be separated by their local maximal angular distance η. This highlights a stark contrast between $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^D$, $D > 1$, in a regime where the underlying hyperbolic geometry is the most binding to the topology of the graph.

For all latent degrees, general case

Let us now zoom out of a specific pair of nodes and study the angular distance between connected nodes considering the entire latent degree distribution. To marginalize η out of Eq. (3.17), one would need to compute

$$f_{X|A}(\theta \,|\, 1) = \int_{\Omega_Y} f_{X|Y,A}(\theta \,|\, \eta, 1) f_{Y|A}(\eta \,|\, 1)\, \mathrm{d}\eta, \tag{3.22}$$

where the integral is computed over all possible values of η. If we sample a graph from a $\mathbb{S}^D$ model, and then draw an edge uniformly at random, this is precisely the pdf of the angular distance between nodes creating that edge. Using Baye's theorem, we can write

$$f_{Y|A}(\eta \,|\, 1) = \frac{f_{A|Y}(1 \,|\, \eta) f_Y(\eta)}{f_A(1)}. \tag{3.23}$$

Then, combining Eqs. (3.13)-(3.15) and (3.23) yields the following explicit form for Eq. (3.22):

$$f_{X|A}(\theta \,|\, 1) = \frac{f_X(\theta)}{f_A(1)} \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{f_Y(\eta)}{1 + (\theta/\eta)^\beta}\, \mathrm{d}\eta. \tag{3.24}$$

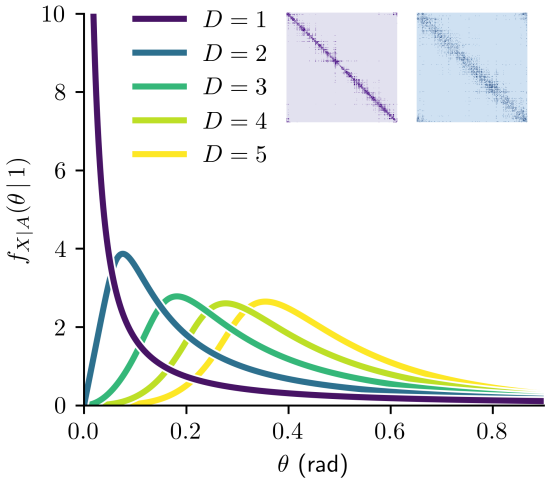


Figure 3.4 – Probability density functions of angular distance between connected nodes in the $\mathbb{S}^D$ model given by Eq. (3.23), for $N = 1000$ nodes, $\beta/D = 3.5$ and with a Pareto latent degree distribution with $\bar{\kappa} = 10.0$ and exponent $\gamma = 2.5$. Matrices represent a $\mathbb{S}^D$ connection probability matrix, for $D = 1$ (left) and $D = 2$ (right), ordered using the polar coordinates of the nodes.

To further study the angular distance between connected nodes, the marginal pdf of η has to be computed given the pdf of κ, which is done in Appendix 3.8, along with the computation for $f_A(1)$.

Figure 3.4 illustrates the behavior of Eq. (3.24) for latent degrees that follow a Pareto distribution. The differences between $D = 1$ and $D > 1$ found in the pairwise case are still notable when we consider the whole distribution, in particular the concentration of connected nodes at very small angular distances for $D = 1$.

3.5.2 Number of nearest neighbors

Dimension affects angular closeness of nodes in hyperbolic graphs, but on a more elementary level it also impacts how many points can be closest to each other on D-spheres. If a finite number $n > 2$ of points is spread on a circle, any given point will always have two, and only two, nearest neighbors. This, however, ceases to be true on higher-dimensional spheres, where the number of nearest neighbors then depends on the number of points n. To quantify this, let us define a *characteristic neighborhood* $\mathcal{B}(\phi_n) \subset S^D(\hat{R})$ as an open ball (with respect to the standard great-circle distance) on the sphere, with angular radius ϕ_n of the ball chosen such that

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(\phi_n)) = \frac{\mathrm{Vol}(S^D(\hat{R}))}{n}. \tag{3.25}$$

The volume refers to the D-dimensional measure of the D-sphere, i.e. the circumference of the circle, the surface area of the sphere, the volume of the 3-sphere, and so on. The division of the space into areas of equal volume in Eq. (3.25) allows one to define the number of nearest neighbors n_{nn} as

$$n_{\mathrm{nn}} = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(3\phi_n))}{\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(\phi_n))} - 1. \tag{3.26}$$

The idea is to compute the volume of an open ball of radius $3\phi_n$ on $S^D(\hat{R})$ and assume that it contains $1 + n_{\mathrm{nn}}$ points, a central one and its nearest neighbors. The definition of n_{nn} is an extension of $D = 1$, where $\mathcal{B}(\phi_n)$ is simply an arc of length $2\pi\hat{R}/n$. In this simplest space, we trivially have

$$n_{\mathrm{nn}} = \frac{3\phi_n\hat{R}}{\phi_n\hat{R}} - 1 = 2 \tag{3.27}$$

for all $n > 2$, in accordance with our previous intuition.

Furthermore, open balls on $S^2(\hat{R})$ are spherical caps of surface area $2\pi\hat{R}^2[1 - \cos\phi_n]$. Using Eq. (3.25) to fix the value of ϕ_n, it follows that for $D = 2$,

$$n_{\mathrm{nn}} = \frac{n}{2}[1 - \cos(3\,\mathrm{acos}\,(1 - 2/n))] - 1 = \frac{16}{n^2} - \frac{24}{n} + 8\ , \tag{3.28}$$

where we used the cosine triple angle formula. For general dimension D, $\mathcal{B}(\phi_n)$ is a hyperspherical cap of volume

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{B}(\phi_n)) = \frac{2\pi^{D/2}\hat{R}^D}{\Gamma(D/2)} \int_0^{\phi_n} \sin^{D-1}\theta\, d\theta. \tag{3.29}$$

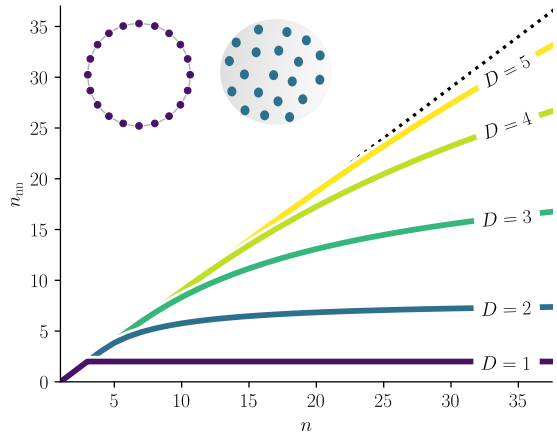


Figure 3.5 – Number of nearest neighbors n_{nn} given by Eq. (3.26) for $D \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. The dotted line is at $n - 1$, the maximal number of neighbors for n points on S^D. A circle and a sphere are also shown to exemplify neighboring points in $D = 1$ and $D = 2$.

It follows that

$$n_{\mathrm{nn}} = \frac{n\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^{3\phi_n} \sin^{D-1}\theta \, d\theta - 1, \tag{3.30}$$

where ϕ_n satisfies Eq. (3.25) using the volume of Eq. (3.29).

When $n \gg 1$, it follows that $\phi_n \ll 1$. Using the approximation $\sin x \approx x$ over the integration domains of Eqs. (3.29) and (3.30), we find the asymptotic number of nearest neighbors

$$n_{\mathrm{nn}} \overset{n\gg 1}{\approx} 3^D - 1. \tag{3.31}$$

In this regime, characteristic neighborhoods are equivalent to open balls in $\mathbb{R}^D$, since S^D are manifolds, thus locally Euclidean by definition. Equation (3.31) can therefore be interpreted in the light of results from [95], where $3^D - 1$ is the maximal number of lattice directions inside a connected set of $\mathbb{R}^D$. It is worth noticing that for $D \in \{1, 2, 3\}$, the value of Eq. (3.31) can be pictured using neighboring line segments, squares and cubes in intuitive Euclidean space, hence justifying the apparently *ad hoc* definition of n_{nn}. For instance, in an infinite square grid in $\mathbb{R}^2$, one square always has $8 = 3^2 - 1$ neighbors.

As depicted in Fig. 3.5, n_{nn} is the same in any dimension when n is low and only a few points are spreaded on S^D. But with higher dimensions, n_{nn} keeps on increasing up to higher asymptotic limits given by Eq. (3.31).

Now if, instead of counting points, n were the number of angular communities within a hyperbolic network, either real embedded networked data or a random graph model, this geometrical property of D-spheres would limit the number of communities that could be connected. The following section frame more precisely how the two effects of dimensionality we just highlighted influence community modeling within $\mathbb{S}^D$ networks models.

3.6 Impacts on community structure

A community is a collection of nodes that are (typically) more densely connected together than to the rest of the network, which is captured in geometric networks by a fraction of nodes that are closer together in the space. In hyperbolic networks, community structure is modeled through angular aggregation of nodes on the spherical similarity space, thus creating *soft communities* [56]. In real networks embedding on $\mathbb{S}^1$, nodes sharing qualitative attributes correlated with communities have been observed to form angular clusters [58, 81, 82]. On the other hand, methods for generating modules in random hyperbolic models have also used angular closeness, either through some variant of geometric preferential attachment mechanism [56, 72] or by direct sampling of clusters as angular coordinates [65].

Dimensionality has consequences on ways in which nodes can be nearby in $\mathbb{S}^D$, and how angular closeness is not as binding to connectivity when $D > 1$. We proceed to show how the previous findings impact community structure modeling in hyperbolic networks for ultra-low dimensions $D \in \{1, 2\}$. Numerical simulations of hyperbolic random graphs possessing community structure are at the core of the following section. Communities are generated as angular clusters and latent degrees are fixed subsequently. Once coordinates are well defined, we coarse-grain hyperbolic random graphs into block matrices that encode inter-community relations as simple weighted networks. Some global and local quantities are then measured on those block matrices to capture how communities can be related to each other in hyperbolic random graphs. This characterizes how community structure is impacted in $\mathbb{S}^D$ between $D = 1$ and $D = 2$.

3.6.1 Generating communities in hyperbolic spaces

We consider the simplest possible case where all angular communities are of similar sizes and uniformly spread on the space, with latent degrees fixed subsequently to achieve a Pareto expected degree distribution in the random graph. This allows us to experiment with the simplest soft community structure—yet general—random graphs that possess all relevant properties of hyperbolic networks.

Let n be the number of angular communities we wish to generate. Angular coordinates for each node are first sampled such that n clusters are distributed homogeneously on the space, as shown in Fig. 3.6(a). The disparity of nodes within each angular cluster is tuned via a parameter $\sigma \in [0, 1]$ comparable to the standard variation of normal distributions. When $\sigma = 0$, all nodes of a cluster have the same angular coordinate, whereas when $\sigma = 1$, sampling is roughly equivalent from sampling points uniformly on S^D. This procedure is similar to sampling Gaussian mixtures on the circle of Ref. [65].

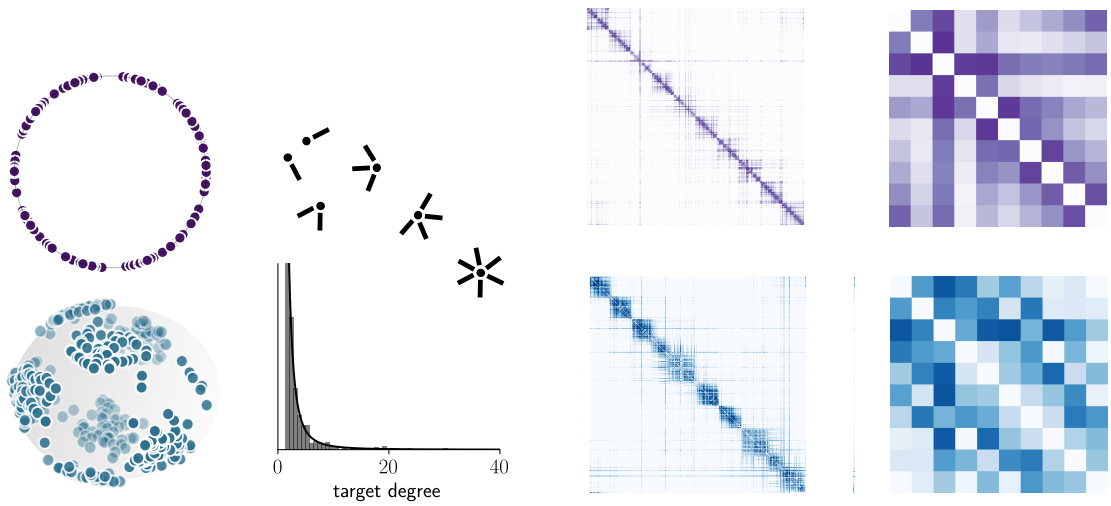
Once angular coordinates are fixed, latent degrees are optimized using a scheme inspired by Ref. [72] to obtain a Pareto expected degree distribution. We model independently the

angular coordinates and the latent degrees, which is equivalent to assuming that the similarity space giving rise to some community structure is decoupled from the degrees of nodes within the graph. It follows from this assumption that the degree distribution within each angular cluster is drawn independently from the same distribution. With such angular coordinates and latent degrees, the hyperbolic random graph is fully defined by the connection probabilities of Eq. (3.5). Each node $i = 1, \dots, N$ has an additional community label $c_i = 1, \dots, n$ describing its membership to one of the angular clusters, which is redefined as the closest centroid. It follows that all communities are of similar size, albeit not identical, and that there is no overlap between communities, as exemplified in Fig. 3.7(b).

To study community structure, each random graph is mapped to a weighted graph of inter-community edges probabilities. Consider the $n \times n$ matrix

$$B_{uv} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \delta(c_i, u) \delta(c_j, v)(1 - \delta(c_i, c_j)), \tag{3.32}$$

where $m := \sum_{i<j} p_{ij}(1-\delta(c_i, c_j))$ is the sum of probabilities associated with inter-communities edges, which can be interpreted as the total expected number of edges between distinct communities. Matrix B's elements are normalized sums of edge probabilities between two communities, with diagonal set to zero. Thus, B can be thought of as a weighted graph describing how distinct communities interact with each other. It is normalized with the total expected



(a) (b) (c) (d)

Figure 3.6 – Example of sampling hyperbolic random graphs with angular community structure in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$. Angular coordinates (a) are used to optimize latent degrees such that a given expected degree distribution (b) is achieved. The random graphs are then fully specified by Eq. (3.5), which is illustrated in (c) matrices of connection probabilities between all nodes, ordered with polar coordinates within each community. Those are then coarse-grained into block matrices (d) using Eq. (3.32) to study inter-community interactions in hyperbolic spaces.

number of inter-community edges such that B_{uv} quantifies the probability of finding an edge between the corresponding pair of commmunities u and v. The complete procedure to sample a given random graph to obtain a block matrix B is illustrated in Fig. 3.6.

3.6.2 Global assessment of angular dependency

Anecdotally, blocks near the diagonal within matrices of Fig. 3.6(d) suggest that community structure in $\mathbb{S}^1$ is more bounded by angular closeness than in $\mathbb{S}^2$. Indeed, similarly-generated hyperbolic random graphs in $\mathbb{S}^2$ look more permissive with regards to how community blocks can be related to one another. To quantify these observations, we use the stable rank and the Shannon entropy of matrices B. Both quantities are global measures of matrix structure, related in a complementary way to how diagonal versus uniform a matrix can be.

Stable rank

The rank of a matrix is a global measure intimately related to dimensionality. In its formal definition, the rank is the maximum number of linearly independent columns or rows of a matrix, thus counting the dimension of the vector space it generates [96]. When working with noisy or random matrices, it is more convenient to use the *stable rank*, also called numerical rank or effective rank, and defined as

$$\operatorname{srank}(B) = \frac{1}{s_1^2} \sum_{i=1}^{n} s_i^2, \tag{3.33}$$

where s_i, $i = 1, \ldots, n$ are the singular values of B in nonincreasing order [97, 98]. The stable rank is always bounded above by the usual rank and is maximal for the identity matrix, diagonal matrices with non-zero diagonal elements, or Toeplitz matrices of the form

$$B = \begin{pmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots \\ a & b & c & 0 & \ddots \\ 0 & a & b & c & \ddots \\ 0 & 0 & a & b & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

which makes it useful for quantifying to which extent matrix entries are concentrated near the diagonal. Moreover, the stable rank is invariant under any similarity transformation $B \mapsto PBP^\top$, where P is a permutation matrix, thus ensuring that the value of $\operatorname{srank}(B)$ is independent of the node labelling in the graph corresponding to B.

Since we compare different number of communities, hence block matrices of different order, we choose to work with the *rank-to-dimension* ratio,

$$r(B) = \frac{\operatorname{srank}(B)}{n}, \tag{3.34}$$

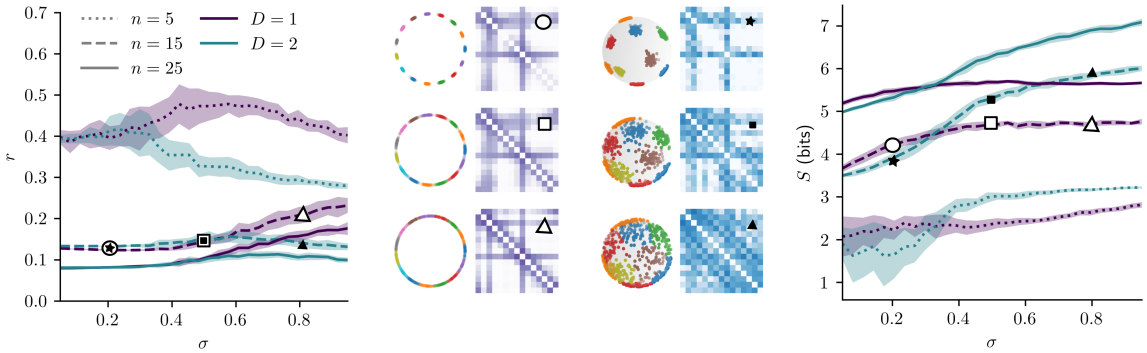
a version of the stable rank normalized by its maximal possible value [99]. It follows that $r(B) = 1$ for a matrix of maximal rank, for instance a diagonal matrix, and $r(B) = 0$ for a null matrix. In between those extremes, $r(B)$ captures to which extent the entries of B could be permuted to yield a diagonal matrix. In the context of community block matrices, this allows us to evaluate the complexity of connection patterns between communities.

In Fig. 3.7(a), we show that for various number of communities n and angular dispersion of nodes σ, r is always higher on $\mathbb{S}^1$ than $\mathbb{S}^2$. Higher rank of the $D = 1$ block matrices quantifies how the inter-communities edge weights are more strictly bounded near the diagonal compared to $D = 2$. This difference is less notable when angular communities are few ($n = 5$) and highly concentrated ($\sigma \in [0.1, 0.2]$), since then the additional dimension has the least impact on the topology of the graphs. In other parameter regimes, the difference between $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$ experimentally expresses the strong angular dependence of connectivity patterns explained in §3.5.1, when specifically applied to community structure.

Shannon entropy

Shannon entropy [100] quantifies to which extent the probability mass function of a discrete random variable is uniform. It is often intuitively described as a measure of how uncertain the outcome of a random event is. As currently defined, matrices B describe the probability mass function of a single edge between two communities. It follows that the Shannon entropy of B matrices,

$$S(B) = -\sum_{u<v} B_{uv} \log_2(B_{uv}), \tag{3.35}$$



(a) (b) (c)

Figure 3.7 – (a) Stable rank to dimension ratio and (c) Shannon entropy of community block matrices in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$, when increasing the angular dispersion of nodes. The center panel (b) illustrates examples of angular coordinates and block matrices with $\sigma \in \{0.2, 0.5, 0.8\}$ for $D = 1$ (purple matrices) and $D = 2$ (blue matrices) with corresponding values of stable rank and indicated with symbols on (a) and (c). All the graphs have $\beta/D = 3.5$ and a Pareto expected degree distribution with average degree of 4.0 and $\gamma = 2.5$.

quantifies how uniform block matrices are, in bits. This entropy is zero if only one entry of B has value 1, depicting a maximally non-uniform community structure. Conversely, $S(B)$ reaches its maximal value, $\log_2({}^{n(n-1)}/_2)$, if the matrix B is entirely uniform with $B_{uv} = {}^2/_{n(n-1)}$ for all ${}^{n(n-1)}/_2$ possible community unordered pairs (u, v).

Figure 3.7(c) shows that as nodes angular dispersion increases, block matrices in $\mathbb{S}^2$ have an increasing entropy. This quantifies how block matrices in $D = 2$ are more and more uniform as nodes scatter across the space. Conversely, block matrices in $\mathbb{S}^1$ uphold the same tridiagonal structure, which is reflected in the stagnation of the entropy. Again, the difference in behavior is minimal for $n = 5$, but for $n \in \{15, 25\}$ it is not. A higher Shannon entropy of block matrices in $D = 2$, or their uniformity, means that any given community is likely to be connected to many other communities. This effect is quantified more precisely in the following section.

3.6.3 Local count of neighboring communities

We also evaluate *community degrees* as a hyperbolic random graph equivalent to the number of nearest neighbors n_{nn} of Sec. 3.5.2. Community degrees are computed as rows sum of a binary version of the community block matrix B. We binarize matrix B through the following definition

$$C_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{if } B_{uv} > {}^1/_m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.36}$$

If the expected value of the number of edges between two communities is greater or equal than 1, that is to say we expect at least one edge between communities u and v on average in the random graph, then the two communities are related. This is a very liberal way to binarize B; other thresholds or methods could have been used. In Appendix 3.9, we show that our numerical results for comparison of $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$ are valid for other binarization procedures.

The degree of community u is then defined as

$$k_u = \sum_{v=1}^{n} C_{uv}, \tag{3.37}$$

which quantifies the number of other communities u is related to. We then define the *average community degree* as

$$\langle k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} k_u. \tag{3.38}$$

In Fig. 3.8, we show the average community degree for hyperbolic random graphs with angular communities sampled according to the scheme described in Sec. 3.6.1. As expected, with only $n = 5$ angular communities, the dimension has very little impact and both models reach a value of nodes dispersion σ where all communities are related to $n-1$ others. Yet, when more angular clusters are considered, $\langle k \rangle$ in $\mathbb{S}^1$ barely increases,whereas in $\mathbb{S}^2$ communities keep on relating to more others as nodes get more dispersed on the sphere.

An upper bound on community degree in $D = 1$ is suggested by the purple curves of Fig. 3.8, although this is not the same phenomenon as the strict limits of Fig. 3.5. In §3.5.2, the hyperbolic connection probability was not considered and the meaning of a neighborhood was purely geometric, with n_{nn} varying with n. Here, we vary the angular dispersion on nodes for a given number of communities n. Yet in $\mathbb{S}^1$, the circular boundary still poses an upper limit to how many communities can be related together. As opposed to $n_{\text{nn}} = 2$ in $D = 1$, the numerical upper bound of Fig. 3.8 is more than two other neighboring communities, thanks to this very permissive definition of community degree and to high degree nodes (having small radius in the hyperbolic representation) allowing for long angular range connections between communities.

This is yet another way to assess that in $\mathbb{S}^1$, most of the inter-community edges are concentrated to fewer nearest neighbors than in $D = 2$, as exemplified in matrices of Fig. 3.7(b).

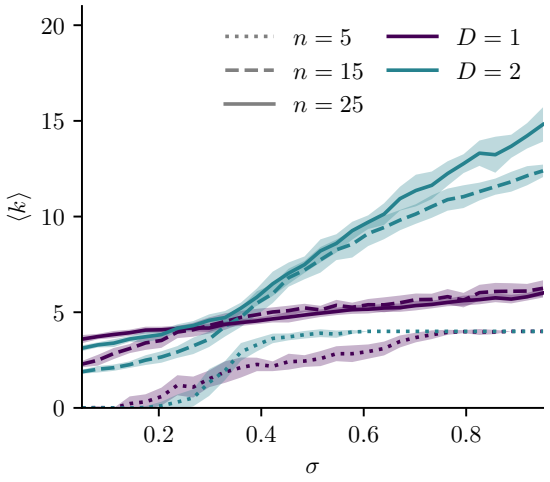


Figure 3.8 – Average community degree $\langle k \rangle$ of hyperbolic random graphs with angular communities sampled in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$. All the graphs have $\beta/D = 3.5$ and a Pareto expected degree distribution with average degree of 4.0 and $\gamma = 2.5$.

3.7 Summary and future work

Recent developments [78] have shown that hyperbolic latent spaces of real networks are likely to be ultra-low dimensional, albeit not the simplest $\mathbb{S}^1$ model and its purely geometric $\mathbb{H}^2$ equivalent that have been mostly studied so far. Our work adds to this line of research by showing that the tight angular bounds for connections in the $\mathbb{S}^1$ model unrealistically restricts the community structures that can be generated on hyperbolic random graphs. Conversely, considering only one addititional dimension expands the inter-community connection possibilities in a way that could improve real modular networks modeling.

In the first part of this paper, we have shown that realized edges in hyperbolic random graphs

are mostly near zero angular distance in $D = 1$, whereas it is not the case in greater dimension. This is quantified through the angular distance distribution between connected nodes given by Eq. (3.17), which has a mode that gets further away from 0 as D increases. Our main result is the sharp qualitative difference between the $D = 1$ and $D > 1$ cases, which is also prominent when the angular distance distribution is averaged over all nodes' latent degrees. It follows that in $D > 1$, connection patterns between individual nodes are less restricted by their angular proximity. Besides, the number of nearest neighbors for points on spherical manifolds is also an increasing function of the dimension. Thus, the number of nearest angular neighboring clusters of nodes, or soft communities in hyperbolic random graphs, varies with D, which reflects on community structure modeling.

To assess these effects, in the second part of this paper, we experimented numerically with hyperbolic random graphs in which nodes' angular coordinates were grouped in soft communities in $D = 1$ and $D = 2$. By averaging the individual connection probabilities into the probabilities to find an edge between two distinct communities, we obtained block matrices describing inter-community relationships. The structure of these were studied across different values of angular dispersion of nodes to highlight differences arising from adding only one similarity dimension. Indeed, block matrices were more bounded to a diagonal shape by angular closeness in $D = 1$, as quantified by their stable rank, and more uniform in $D = 2$, as quantified by their Shannon entropy. The idea of having more uniform inter-community block matrices refers to the fact that in $D > 1$, any given community can be related to more other communities, as also quantified by the average community degree. Akin to the number of nearest neighbors for points, the average community degree was higher in $D = 2$, especially as soft communities were more dispersed angularly.

Our work sheds new light on the question of what really is hyperbolic networks' community structure. Although mechanisms underlying soft communities formation and modeling in $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{H}^2$ [56, 60, 72] and the inherent modularity of hyperbolic random graphs [75, 76] have already been examined through various lenses, we have argued here that hyperbolic network models of varying dimensions are quite distinct when it comes to their community structure, in particular between $D = 1$ and $D > 1$. Since most real-world networks possess some sort of nodes' aggregates, this supports the hypothesis that increasing the dimensionality of hyperbolic underlying spaces might also help the likelihood maximisation procedure that is used to infer hyperbolic coordinates for networked data [41]. However, current embedding algorithms are yet to be generalized to more dimensions [58], or have only been used on relatively small networks [60].

Furthermore, knowledge about community structure has already been shown to impact performance of very diverse network tasks, from hyperbolic embedding coordinate inference [59, 73, 74] to dimension reduction [101-103], efficient information communication [104] and resilience [105]. A natural way to push our work will then be to study how this coupling

between community structure and the underlying dimension of hyperbolic networks affects tasks which have already been shown to perform better in the framework of hyperbolic network geometry. In particular, greedy routing of information propagation has been one of the first and most interesting assets of hyperbolic geometry [62, 81], which should be studied in higher dimensions while explicitly considering community structure.

Another intriguing direction of research would be to use hierarchical network generation mechanisms like geometric branching growth [83] in higher dimensions. Such a procedure generates a hyperbolic network through subdivision of a small initial network into finer and finer descendants, a statistical inverse of geometric renormalization [89]. By placing the initial seed network into higher dimensional spaces, one could compare hierarchical community structure in different dimensions, akin to our numerical study but in a more complex setting.

Acknowledgments

This work was supported by the Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies, the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, and the Sentinelle Nord program of Université Laval, funded by the Canada First Research Excellence Fund. We acknowledge Calcul Québec and Compute Canada for their technical support and computing infrastructures.

3.8 Appendix A : Explicit computations for angular densities

3.8.1 Modes of angular distance between connected node pairs

Taking the first derivative of Eq. (3.17) with respect to θ and setting it to zero yields

$$\frac{(D-1)\sin^{D-2}\theta^*\cos\theta^*}{1+(\theta^*/\eta)^\beta} = \frac{\sin^{D-1}\theta^*}{[1+(\theta^*/\eta)^\beta]^2}\frac{\beta(\theta^*/\eta)^\beta}{\theta^*}, \tag{3.39}$$

where θ^* can be a minimum, a maximum or an inflexion point. We separate two cases:

1. If $\theta^* \in (0,\pi)$, Eq. (3.39) can be simplified to Eq. (3.19).
2. We proceed to show that $\theta^* = 0$ iff $D = 1$ in the regime $\beta > D$, $\eta > 0$. First, if $D = 1$, Eq. (3.39) reduces to
$$0 = \frac{\beta(\theta^*/\eta)^\beta}{\theta^*[1+(\theta^*/\eta)^\beta]^2}, \tag{3.40}$$
which is verified only for $\theta^* = 0$. Conversely, setting $\theta^* = 0$ in Eq. (3.39) trivially yields $D = 1$.

3.8.2 Probability density function for η

Since η is a scalar function of κ, κ', the pdf for Y can be computed as follows.

$$f_Y(\eta) = \int_{\Omega_K} \int_{\Omega_K} \rho_K(\kappa)\rho_K(\kappa')\delta(g(\kappa')) \, \mathrm{d}\kappa \, \mathrm{d}\kappa' \tag{3.41}$$

with $g(\kappa') := \eta - {(\mu\kappa\kappa')^{1/D}}/{R}$ and δ the Dirac delta function. By definition of composition with the Dirac delta function under the integral,

$$\delta(g(\kappa')) = \frac{\delta(\kappa' - \kappa'_*)}{|g'(\kappa'_*)|}, \tag{3.42}$$

with $\kappa'_* = {(\eta R)^D}/{\mu\kappa}$, the unique root of g. Hence

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\kappa'}\right|_{\kappa'=\kappa'_*} = \frac{\mu\kappa\eta^{(1-D)}}{DR^D} > 0, \tag{3.43}$$

and it follows that

$$\delta(g(\kappa')) = \frac{\delta(\kappa' - {(\eta R)^D}/{\mu\kappa})}{\mu\kappa\eta^{(1-D)}} DR^D. \tag{3.44}$$

Eq. (3.41) can thus be computed as

$$f_Y(\eta) = \frac{DR^D}{\mu\eta^{1-D}} \int_0^\infty \rho_\kappa(\kappa)\rho_\kappa({(\eta R)^D}/{\mu\kappa}) \frac{d\kappa}{\kappa}. \tag{3.45}$$

For any distribution of κ with a non-zero lower bound κ_0,

$$\frac{(\eta R)^D}{\mu\kappa} < \kappa_0 \quad \iff \quad \frac{(\eta R)^D}{\mu\kappa_0} < \kappa, \tag{3.46}$$

which means that the integrand in Eq. (3.45) is null in the regime of Eq. (3.46). We finally have

$$f_Y(\eta) = \frac{DR^D}{\mu\eta^{1-D}} \int_{\kappa_0}^{{(\eta R)^D}/{\mu\kappa_0}} \rho_\kappa(\kappa)\rho_\kappa({(\eta R)^D}/{\mu\kappa}) \frac{d\kappa}{\kappa}. \tag{3.47}$$

This pdf can be computed exactly for κ drawn from a Pareto distribution with parameter γ. Let

$$\rho_\kappa(\kappa) = (\gamma - 1)\kappa_0^{\gamma-1}\kappa^{-\gamma}, \tag{3.48}$$

then computation of the integral in Eq. (3.47) gives

$$f_Y^{\text{Pareto}}(\eta) = \frac{D(\gamma-1)^2\kappa_0^{2(\gamma-1)}\mu^{\gamma-1}}{R^{D(\gamma-1)}\eta^{D(\gamma-1)+1}} \log\left[\frac{(\eta R)^D}{\mu\kappa_0^2}\right]. \tag{3.49}$$

3.8.3 Marginalized connection probability

Since the connection probability of hyperbolic random graphs (Eq. (3.5)) depends on θ and η, one would need to know the pdf for θ and the pdf for η to compute the marginalized connection probability that appears in the normalization of Eq. (3.24).

$$f_A(1) = \int_{\Omega_Y} \int_{\Omega_X} f_{X,Y,A}(\theta, \eta, 1) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\eta. \tag{3.50}$$

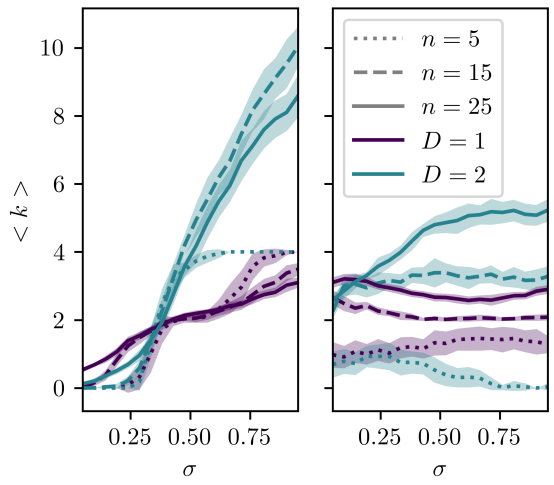


Figure 3.9 – Community degree $\langle k \rangle$ with alternative binarization methods. On the left, Eq.(3.37) is used with a higher threshold of $10/m$ and on the right, the disparity filter of Ref. [106] is applied with $\alpha = 0.2$.

Given $\Omega_X = [0, \pi]$, $\Omega_Y = [\eta_0, \infty)$ and Eq. (3.14),

$$f_A(1) = \int_{\eta_0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{D-1}\theta \, f_Y(\eta)}{I_D[1 + (\theta/\eta)^{\beta}]} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\eta \tag{3.51}$$

$$= \frac{1}{I_D} \int_{\eta_0}^{\infty} \left[\int_0^{\pi} \frac{\sin^{D-1}\theta}{1 + (\theta/\eta)^{\beta}} \, \mathrm{d}\theta \right] f_Y(\eta) \, \mathrm{d}\eta \tag{3.52}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(D/2)}{\Gamma(D+1/2)} \int_{\eta_0}^{\infty} \mathcal{Z}(\eta) f_Y(\eta) \, \mathrm{d}\eta, \tag{3.53}$$

where the angular distance distribution of Eq. (3.11) and the definition of Eq. (3.18) have been used.

3.9 Appendix B : Other thresholding methods for block matrices

Here we validate that results about community degree of Sec. 3.6.3 are robust to other binarization methods. In Fig. 3.9, we show the community degree $\langle k \rangle$ measured on the same matrices as the ones used for Fig. 3.8, but using a higher threshold (left) and the disparity filter of Ref. [106] (right) to transform the inter-community edges probability matrix B to a binary matrix. Both plots show that community degree in $\mathbb{S}^2$ increases to higher values than in $\mathbb{S}^1$. The disparity filter penalizes locally homogeneous edge weights, which explains why the blue curves on the right panel do not increase as much as on Fig. 3.8, since then the inter-community edge probability becomes more and more homogeneous on the neighboring angular clusters.

3.10 Complément : Étalement maximal des communautés angulaires

Lorsqu'on échantillonne des points sur S^D à partir de combinaisons linéaires de n distributions normales sur l'espace, l'écart-type des distributions détermine à quel point celles-ci se chevauchent. Supposons que toutes les distributions ont la même variance dans toutes les directions et des covariances nulles entre ces directions. Dans une certaine limite, tous les points échantillonnés seront centrés près du mode de chaque distribution. En revanche, on peut facilement imaginer que dans une autre limite, les distributions normales se chevauchent tant et si bien qu'elles deviendront indiscernables d'une distribution uniforme [3]. Qui plus est, il semble raisonnable de supposer que l'écart-type $\sigma_{\max}$ pour lequel cette indiscernabilité survient varie selon la dimension D et le nombre de distributions n (le nombre de communautés angulaires) sur l'espace. Tentons d'y voir plus clair, et surtout de définir $\sigma_{\max,D}(n)$ selon le nombre de communautés n et la dimension $D \in \{1, 2\}$ pour orienter nos simulations de réseaux hyperboliques modulaires dans $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^2$.

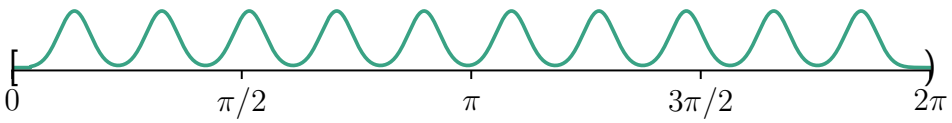


FIGURE 3.10 – Disposition de $n = 10$ distributions normales équidistantes et de même écart-type sur l'intervalle $I := [0, 2\pi)$.

Pour étudier le cas $D = 1$, considérons n distributions normales indépendantes et équidistances sur un tronçon de la ligne réelle $I := [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$, de même écart-type σ_1 et de moyennes $\mu_i = \mu + {}^{2\pi i}/_{n}$, $i = 1, \ldots, n$. La figure 3.10 illustre cette disposition. Pour simplifier, négligeons le fait que ces distributions sont tronquées et posons

$$f_i(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_1}\right)^2} \tag{3.54}$$

pour leurs lois de probabilités en ignorant que $f_i(x)$ n'est pas correctement normalisée. Soit aussi la loi de probabilité du mélange de ces distributions,

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \frac{1}{n\sigma_1\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_1}\right)^2}, \tag{3.55}$$

qui hérite de l'absence de normalisation adéquate des $\{f_i(x)\}_i$. Sur l'intervalle I, la loi de probabilité uniforme est $u(x) = {}^1/_{2\pi}$. On dira que F et u sont *indiscernables* si les modes de

3. Il aurait été aussi possible de considérer le cas limite où le mélange de deux distributions dont les modes sont à une distance x devient unimodal, soit $x = 2\sigma$ pour deux distributions normales de variance σ^2 [107]. Cependant, cela mène à un critère moins strict que l'indiscernabilité par rapport à la distribution uniforme, ce qui est moins intéressant pour nous.

F se confondent avec la valeur de u, c'est-à-dire lorsque

$$\Big[F(x) = u(x)\Big]_{x=\text{argmax}[F(x)]} \tag{3.56}$$

$$F(\mu_i) = u(\mu_i) \tag{3.57}$$

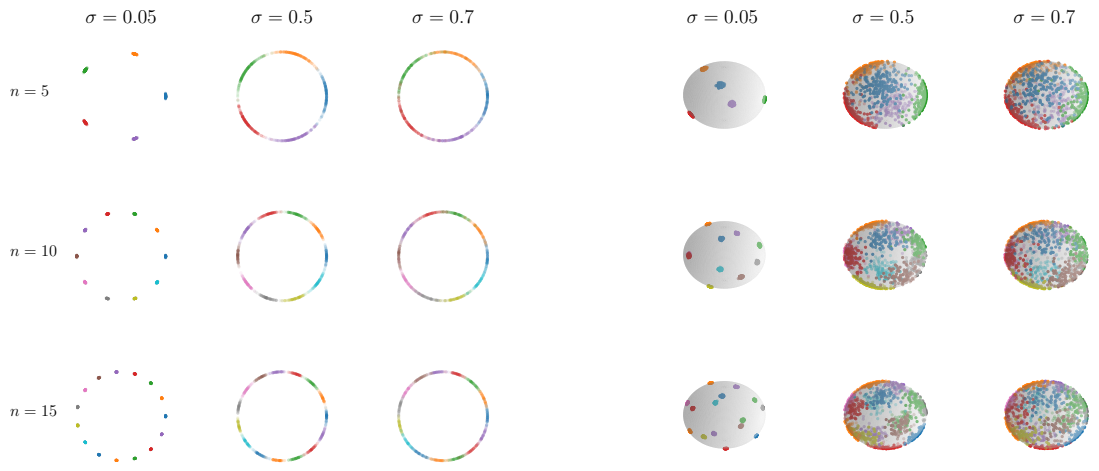
$$\frac{1}{n\sigma_1\sqrt{2\pi}}\left[1 + \sum_{j\neq i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_i-\mu_j}{\sigma_1}\right)^2}\right] = \frac{1}{2\pi} \tag{3.58}$$

$$\sigma_1 \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{n}. \tag{3.59}$$

On définit donc $\sigma_{\text{max},1}(n) := \frac{\sqrt{2\pi}}{n}$. On peut grossièrement étendre ce raisonnement à la sphère, où $u(x) = 1/4\pi$ lorsqu'on considère une sphère de rayon $R = 1$, ou autrement dit lorsqu'on considère uniquement les densités angulaires. Avec à nouveau des variances égales et des covariances nulles, en supposant que le voisinage d'un mode est approximativement euclidien et en négligeant la correction sur la normalisation, on aurait maintenant

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_D \left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_2}\right)^2}. \tag{3.60}$$

En cherchant la valeur de σ_2 pour laquelle les modes de F coïncident avec $1/4\pi$, on trouve $\sigma_{\text{max},2}(n) \approx \sqrt{\frac{2}{n}}$.



(a) (b)

FIGURE 3.11 – Étalement maximal des communautés angulaires selon leur nombre n, en fonction d'un écart-type maximal à partir duquel le mélange des distributions normales est indiscernable d'une distribution uniforme sur l'espace.

À la figure 3.11, on illustre que malgré de nombreuses approximations, notre définition de $\sigma_{\text{max},1(n)}$ permet de comparer des dispositions avec différents nombres de communautés n

pour $D = 1$ et $D = 2$. Bien que tout ceci ne soit pas très rigoureux, cela suffit pour nos simulations numériques.

Conclusion

La proximité entre les noeuds explique élégamment de nombreuses propriétés des réseaux complexes lorsque la géométrie sous-jacente est hyperbolique. Que ce soit pour démontrer l'efficacité du passage de l'information dans des réseaux comme l'Internet ou le cerveau, pour interpréter géométriquement pourquoi certains noeuds sont beaucoup plus connectés que les autres ou encore pour comprendre la structure à plus grande échelle des réseaux, leur géométrie hyperbolique continue d'attirer l'attention des chercheurs. Dans le cadre des modèles de réseaux hyperboliques aléatoires, chaque noeud a une coordonnée de popularité, associée à leur nombre total de connexions, et D coordonnées angulaires dites de similarité. Les liens entre les noeuds sont alors déterminés aléatoirement selon une fonction qui décroît selon la distance hyperbolique. Dans leurs débuts, les réseaux hyperboliques ont surtout été étudiés avec $D = 1$, où la similarité entre les noeuds était encodée par leur position sur un cercle. Il semblait qu'augmenter la dimension compliquerait le modèle sans apporter d'avantages manifestes. Or, tant dans les réseaux de données dont les coordonnées ont été inférées que dans les modèles hyperboliques aléatoires, les communautés sont représentées par des amas de noeuds à plus petite distance angulaire les uns des autres. Puisque la dimension D du modèle affecte directement le nombre de coordonnées angulaires, celle-ci a un impact sur la manière dont on peut modéliser la structure communautaire des réseaux hyperboliques. À cet égard, ce mémoire a présenté quelques perspectives sur comment la dimension des réseaux hyperboliques affecte les patrons de connexion entre les noeuds, et en particulier la structure communautaire qu'il est possible de générer aléatoirement à partir de regroupements angulaires de noeuds. Le coeur de ce travail constituait le chapitre 3, mais nous avons d'abord présenté quelques éléments de géométrie et de science des réseaux.

Les gens qui étudient la science des réseaux ne sont typiquement pas des géomètres, et donc les espaces sous-jacents sont normalement présentés assez rapidement dans la littérature. Pour tenter d'éviter de s'inscrire dans cette lignée, nous avons présenté au chapitre 1 quelques éléments de base de géométrie. D'abord, nous avons introduit quelques notions d'espaces métriques et de géométrie différentielle, puisque les espaces hyperboliques où sont définis les réseaux aléatoires avec lesquels nous travaillons sont bel et bien des variétés lisses. Ensuite, quelques éléments de théorie de la mesure et des probabilités ont été définis puisque l'aléatoire occupe une place de choix dans notre modèle. La géométrie sphérique a été présentée afin de

préparer le terrain pour la géométrie hyperbolique, certes, mais surtout parce que la paramétrisation d'espaces hyperboliques de plus grandes dimensions envoie d'une certaine façon les points aux coordonnées angulaires d'une D-sphère. Puis, à la section 1.4, nous avons présenté le modèle de l'hyperboloïde d'espace hyperbolique ainsi que quelques propriétés et sa projection sur la boule conforme. Dans ce chapitre, nous avons vu que le volume des boules ouvertes ne se comporte pas du tout de la même façon dans les géométries sphériques et hyperboliques, ce qui a des répercussions lorsqu'on échantillonne des points au hasard dans ces espaces.

Si ces points sont associés à des noeuds, et qu'une probabilité de connexion qui dépend de la distance est définie entre ceux-ci, on retrouve un modèle de réseau géométrique aléatoire comme ceux du chapitre 2. Ce second chapitre a commencé par un bref historique de la science des réseaux et de ses notions de base, avant de plonger dans les réseaux qui existent dans des espaces métriques et qui portent une part de hasard. En particulier, le modèle $\mathbb{H}^{D+1}$ a été introduit ainsi que certaines de ses propriétés. Dans celui-ci, les noeuds sont déposés dans une boule ouverte de l'espace hyperbolique H^{D+1} et sont associés à un point ayant une coordonnée radiale et D coordonnées angulaires selon la paramétrisation par coordonnées hyperboliques. À un changement de variable, une approximation et quelques équivalences de paramètres près, ce modèle est analogue à une formulation alternative, le modèle $\mathbb{S}^D$. Alors, les noeuds sont munis des mêmes D coordonnées angulaires mais la coordonnée radiale est remplacée par le degré latent, qui ajuste le degré moyen des noeuds dans le graphe aléatoire résultant d'une réalisation du modèle. À l'image de la séparation angulaire θ_{ij} entre deux noeuds i et j, nous avons introduit la popularité par paire η_{ij}, qui quantifie les degrés latents des deux noeuds vis-à-vis la taille du réseau sous la forme d'un seuil de distance angulaire. Cette nouvelle variable nous permet de réécrire la probabilité de connexion du modèle $\mathbb{S}^D$ sous une forme plus simple. Le chapitre 2 a été conclu avec une revue de littérature détaillée des modèles de réseaux hyperboliques en dimension arbitraire, de ceux qui considèrent explicitement la structure communautaire et des liens entre ces deux aspects qui ont très peu été explorés jusqu'à présent.

Le chapitre 3 est une adaptation d'un article en cours de soumission dans lequel on présente nos résultats sur l'importance de la dimension des modèles de réseaux hyperboliques aléatoires pour la modélisation de la structure communautaire. Les premières sections de ce chapitre reviennent donc brièvement sur le contexte de notre recherche et les modèles $\mathbb{H}^{D+1}$ et $\mathbb{S}^D$. La section 3.5 présente les effets de la dimension sur la distance angulaire et le nombre de proches voisins. Il s'avère qu'en dimension $D = 1$, la proximité angulaire est bien plus restrictive à l'existence des liens qu'en plus grandes dimensions, ce qu'on quantifie à l'aide de la loi de probabilité de la distance angulaire entre les noeuds connectés des équations (3.17) et (3.24), illustrées aux figures 3.3 et 3.4. Étant donné que le nombre de plus proches voisins n_{nn} augmente aussi avec la dimension selon l'équation (3.30), les amas angulaires qui représentent des communautés dans les modèles de réseaux hyperboliques ne sont pas reliés de la même

façon. Pour étudier cela, on génère des réseaux hyperboliques aléatoires dont les communautés sont des amas angulaires en dimensions $D = 1$ et $D = 2$, ce qui est exposé dans la section 3.6. Les relations entre les communautés sont étudiées en moyennant les probabilités de connexion individuelles entre les noeuds pour obtenir des probabilités de retrouver des liens entre les communautés encodées dans des matrices par blocs. Les matrices par blocs ont une structure plus près de la diagonale en dimension $D = 1$, ce qui est quantifié à l'aide du rang stable. Puisque la proximité angulaire est plus restrictive pour les liens individuels en $D = 1$, ceci se reflète dans les relations entre les communautés. Qui plus est, en dimension $D = 2$, les matrices par blocs sont plus uniformes selon leur entropie de Shannon, ce qui exprime la probabilité de retrouver des liens entre plus de communautés différentes. Une autre manière de voir cela est de quantifier le nombre moyen de communautés angulaires qui sont reliées entre elles à l'aide du degré de communauté, plus élevé en $D = 2$. Au total, une seule dimension de similarité restreint donc la structure communautaire qui peut être générée, tandis qu'en ajoutant une unique dimension on retrouve déjà des patrons de connexions entre les communautés plus diversifiées et réalistes.

Il est certain que ces simulations ont été effectuées dans un contexte extrêmement simplifié où tous les amas angulaires étaient de tailles semblables et à environ la même distance les uns des autres, une situation qu'il serait surprenant d'observer dans un réseau issu de données réelles. Cette distance entre nos conclusions théoriques et les applications pratiques est à notre avis la plus grande critique de ce travail. Une solution évidente aurait été de travailler directement avec des réseaux issus de données empiriques afin d'inférer les coordonnées hyperboliques en différentes dimensions, puis de les comparer à l'aide de méthodes standards comme la prédiction de liens manquants ou le passage d'information entre les noeuds. Cependant, les algorithmes actuels d'inférence de coordonnées hyperboliques sont soit limités à la plus petite dimension [58], ou bien ils ont été appliqués uniquement à de très petits réseaux [60]. Un tel ajout à notre recherche aurait donc été en soi un projet de maîtrise supplémentaire. L'idée principale est donc de présenter certaines limites des modèles $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{S}^1$ pour bien saisir la structure communautaire, afin de motiver plus de travaux en ce sens.

Une autre suite à ce projet serait de tenter de faire le pont entre les travaux récents d'Almagro *et al.* [78] et les nôtres afin d'étudier la relation entre la structure communautaire à l'échelle macroscopique et les cycles courts au niveau local de quelques noeuds connectés entre eux. Une autre avenue pourrait être d'étudier la structure communautaire plus réaliste qui pourrait être générée en subdivisant un réseau hiérarchiquement à la manière de Zheng *et al.* [83], mais en plus grandes dimensions. Il serait tout aussi intéressant de continuer à explorer les manières de quantifier la structure communautaire des réseaux hyperboliques. Même si quelques résultats de simulations numériques ont réussi à se frayer un chemin jusque dans le Chapitre 3, une certaine insatisfaction persiste quant à notre habileté à quantifier les différences de structures communautaires d'une dimension à l'autre. Qui plus est, de nombreuses analyses supplémen-

taires pourraient être développées sur les lois de probabilité des distances entre les noeuds connectés.

Il reste une question, plutôt philosophique, qui n'a pas été traitée explicitement mais qui est camouflée dans la trame de ce travail. Il s'agit de savoir si la création et l'étude d'un modèle d'un phénomène physique *explique* bel et bien celui-ci. Dans le cas de la science des réseaux, la question se pose tout particulièrement puisque l'étude des systèmes complexes se situe généralement au niveau macroscopique de leur structure, ce qui ne répond pas nécessairement aux nombreux « pourquoi » qui émergent des interactions individuelles et du contexte propre à chaque jeu de données. La géométrie hyperbolique de certains réseaux empiriques est une abstraction ; à notre connaissance, il n'existe pas de véritable structure hyperbolique sous-jacente responsable de la structure des réseaux observés. Malgré cela, de nombreuses propriétés dont l'ubiquité n'est plus à démontrer peuvent être recréées dans le cadre de cette approche, aussi théorique soit-elle. Peut-on alors dire que ces propriétés sont *expliquées*, ou si nos modèles reproduisent seulement les mêmes mystères sous des conditions plus élégantes ?

Bibliographie

[1] B. Désy, P. Desrosiers et A. Allard, « Dimension matters when modeling network communities in hyperbolic spaces », arXiv:2209.09201, (2022).

[2] Euclid, *Euclid's Elements*, trad. par T. Heath (Digireads.com, 2017).

[3] Euclide, *Éléments Livre Premier*, trad. par R. Arteau-McNeil et M. Vachon (Collection Résurgences, 2012).

[4] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, 2e éd. (Springer, 2006).

[5] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis* (McGraw-Hill, 1953).

[6] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, 2e éd. (Taylor et Francis, 2003).

[7] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, trad. par T. Nagase et K. Nomizu (American Mathematical Society, 2001).

[8] F. Bonahon, *Low-Dimensional Geometry : From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots* (AMS, 2009).

[9] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, 2e éd. (Wiley Interscience, 1995).

[10] K. Tapp, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Springer, 2016).

[11] M. R. Bridson et A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature* (Springer, 1999).

[12] Y. Ollivier, « Le hasard et la courbure », Mémoire déposé en vue d'obtenir le diplome d'habilitation à diriger des recherches (2009).

[13] R. Forman, « Bochner's Method for Cell Complexes and Combinatorial Ricci Curvature », Discrete & Computational Geometry **29**, 323-374 (2003).

[14] S. B. Myers, « Riemannian manifolds in the large », Duke Mathematical Journal **1**, 39-49 (1935).

[15] D. Williams, *Probability with Martingales* (Cambridge University Press, 1991).

[16] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds* (CRC Press, 1991).

[17] K. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces* (AMS Chelsea Publishing, 2005).

[18] J. P. R. Christensen, « On some measures analogous to Haar measure », Mathematica Scandinavica **26**, 103-106 (1970).

[19] G. Budel, M. Kitsak, R. Aldecoa, K. Zuev et D. Krioukov, « Random hyperbolic graphs in $d+1$ dimensions », arXiv.2010.12303, (2020).

[20] D. Castelvecchi, « Ukrainian mathematician becomes second woman to win prestigious Fields Medal », Nature **607**, 224-225 (2022).

[21] T. Cai, J. Fan et T. Jiang, « Distributions of Angles in Random Packing on Spheres », Journal of Machine Learning Research **14**, 1837-1864 (2013).

[22] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon* (American Mathematical Society, 2001).

[23] M. Gromov et V. D. Milman, « A Topological Application of the Isoperimetric Inequality », American Journal of Mathematics, 843-854 (1983).

[24] J. W. Milnor, « Hyperbolic geometry : The first 150 years », Bulletin of the American Mathematical Society **6**, 9-24 (1982).

[25] R. Bonola, *Non-Euclidean geometry ; a critical and historical study of its development*, trad. par H. S. Carslaw (The Open Court Publishing Company, 1912).

[26] J. Stillwell, *Sources of Hyperbolic Geometry* (American Mathematical Society, 1996).

[27] N. I. Lobachevsky, « On the principles of geometry », Kasan Bulletin, Republié dans *La collection complète de travaux en géométrie*, Vol.1, p. 1-67. Université Kasan, (1883) (1829).

[28] D. Hilbert, « Über Flächen von konstanter Krümmung », Transactions of the American Mathematical Society **2**, 87-89.

[29] G. Saathoff, S. Karpuk, U. Eisenbarth, G. Huber, S. Krohn, R. M. Horta, S. Reinhardt, D. Schwalm, A. Wolf et G. Gwinner, « Improved Test of Time Dilation in Special Relativity », Phys. Rev. Lett. **91**, 190403 (2003).

[30] D. Krioukov, F. Papadopoulos, M. Kitsak, A. Vahdat et M. Boguñá, « Hyperbolic geometry of complex networks », Physical Review E **82**, 036106 (2010).

[31] W. Yang et D. Rideout, « High Dimensional Hyperbolic Geometry of Complex Networks », Mathematics **8**, 1861 (2020).

[32] G. Alanis-Lobato et M. A. Andrade-Navarro, « Distance distribution between complex network nodes in hyperbolic space », Complex Systems **25**, 223-236 (2016).

[33] D. E. Knuth, « Big Omicron and Big Omega and Big Theta », SIGACT News **8**, 18-24 (1976).

[34] L. Euler, « Solutio Problematis ad geometriam situs pertinensis », Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae **8**, 128-140 (1736).

[35] J. Harris, J. L. Hirst et M. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, 2e éd. (Springer, 2008).

[36] M. Newman, *Networks*, 2e éd. (Oxford University Press, 2018).

[37] H. A. Simon, « The Architecture of Complexity », Proceedings of the American Philosophical Society **106**, 467-482 (1962).

[38] P. W. Anderson, « More Is Different », Science **177**, 393-396 (1972).

[39] A. Vespignani, « Twenty years of network science », Nature **558**, 528-529 (2018).

[40] E. B. Falk et D. S. Bassett, « Brain and Social Networks : Fundamental Building Blocks of Human Experience », Trends in Cognitive Sciences **21**, 674-690 (2017).

[41] M. Boguñá, I. Bonamassa, M. D. Domenico, S. Havlin, D. Krioukov et M. Á. Serrano, « Network geometry », Nature Reviews Physics **3**, 114-135 (2021).

[42] M. Á. Serrano, D. Krioukov et M. Boguñá, « Self-Similarity of Complex Networks and Hidden Metric Spaces », Physical Review Letters **100**, 078701 (2008).

[43] F. Papadopoulos, M. Kitsak, M. Á. Serrano, M. Boguñá et D. Krioukov, « Popularity versus similarity in growing networks », Nature **489**, 537-540 (2012).

[44] R. F. Betzel, J. D. Medaglia, L. Papadopoulos, G. L. Baum, R. Gur, R. Gur, D. Roalf, T. D. Satterthwaite et D. S. Bassett, « The modular organization of human anatomical brain networks : Accounting for the cost of wiring », Network Neuroscience **1**, 42-68 (2017).

[45] M. Girvan et M. E. J. Newman, « Community structure in social and biological networks », Proceedings of the National Academy of Sciences **99**, 7821-7826 (2002).

[46] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte et E. Lefebvre, « Fast unfolding of communities in large networks », Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2008**, P10008 (2008).

[47] M. Rosvall, D. Axelsson et C. T. Bergstrom, « The map equation », The European Physical Journal Special Topics **178**, 13-23 (2009).

[48] T. P. Peixoto, « Efficient Monte Carlo and greedy heuristic for the inference of stochastic block models », Physical Review E **89**, 012804 (2014).

[49] T. P. Peixoto, « Bayesian Stochastic Blockmodeling », *Advances in Network Clustering and Blockmodeling* (John Wiley & Sons, Ltd, 2019) chap. 11, p. 289-332.

[50] F. Karinthy, *Láncszemek (Chains)* (1929).

[51] S. Milgram, « The Small-World Problem », Psychology Today **1**, 61-67 (1967).

[52] D. J. Watts et S. H. Strogatz, « Collective dynamics of 'small-world' networks », Nature **393**, 440-442 (1998).

[53] I. Voitalov, P. van der Hoorn, R. van der Hofstad et D. Krioukov, « Scale-free networks well done », Physical Review Research **1**, 033034 (2019).

[54] A. D. Broido et A. Clauset, « Scale-free networks are rare », Nature Communications **10**, 1017 (2019).

[55] S.-i. Amari, *Information Geometry and Its Applications* (Springer Tokyo, 2016).

[56] K. Zuev, M. Boguñá, G. Bianconi et D. Krioukov, « Emergence of Soft Communities from Geometric Preferential Attachment », Scientific Reports **5**, 9421 (2015).

[57] J. Grandell, « Point Processes and Random Measures », Advances in Applied Probability **9**, 502-526 (1977).

[58] G. García-Pérez, A. Allard, M. Á. Serrano et M. Boguñá, « Mercator : uncovering faithful hyperbolic embeddings of complex networks », New Journal of Physics **21**, 123033 (2019).

[59] A. Faqeeh, S. Osat et F. Radicchi, « Characterizing the Analogy between Hyperbolic Embedding and Community Structure of Complex Networks », Physical Review Letters **121**, 098301 (2018).

[60] A. Muscoloni et C. V. Cannistraci, « Angular separability of data clusters or network communities in geometrical space and its relevance to hyperbolic embedding », arXiv:1802.01183, (2019).

[61] M. Boguñá, D. Krioukov et K. C. Claffy, « Navigability of complex networks », Nature Physics **5**, 74-80 (2009).

[62] M. Boguñá et D. Krioukov, « Navigating Ultrasmall Worlds in Ultrashort Time », Physical Review Letters **102**, 058701 (2009).

[63] M. Boguñá, F. Papadopoulos et D. Krioukov, « Sustaining the Internet with hyperbolic mapping », Nature Communications **1**, 1-8 (2010).

[64] M. Boguñá, D. Krioukov, P. Almagro et M. Á. Serrano, « Small worlds and clustering in spatial networks », Physical Review Research **2**, 023040 (2020).

[65] A. Muscoloni et C. V. Cannistraci, « A nonuniform popularity-similarity optimization (nPSO) model to efficiently generate realistic complex networks with communities », New Journal of Physics **20**, 052002 (2018).

[66] R. Albert et A.-L. Barabási, « Statistical mechanics of complex networks », Reviews of Modern Physics **74**, 47-97 (2002).

[67] M. Boguñá et R. Pastor-Satorras, « Class of correlated random networks with hidden variables », Physical Review E **68**, 13 (2003).

[68] G. García-Pérez, « A geometric approach to the structure of complex networks », thèse de doct. (Universitat de Barcelona, 2018).

[69] D. Krioukov, F. Papadopoulos, A. Vahdat et M. Boguñá, « Curvature and temperature of complex networks », Physical Review E **80**, 035101 (2009).

[70] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, http ://dlmf.nist.gov/, Release 1.1.3 of 2021-09-15, F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.

[71] M. Á. Serrano, M. Boguñá et F. Sagués, « Uncovering the hidden geometry behind metabolic networks », Molecular BioSystems **8**, 843-850 (2012).

[72] G. García-Pérez, M. Á. Serrano et M. Boguñá, « Soft Communities in Similarity Space », Journal of Statistical Physics **173**, 775-782 (2018).

[73] Z. Wang, Q. Li, F. Jin, W. Xiong et Y. Wu, « Hyperbolic mapping of complex networks based on community information », Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **455**, 104-119 (2016).

[74] Z. Wang, Y. Wu, Q. Li, F. Jin et W. Xiong, « Link prediction based on hyperbolic mapping with community structure for complex networks », Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **450**, 609-623 (2016).

[75] B. Kovács et G. Palla, « The inherent community structure of hyperbolic networks », Scientific Reports **11**, 1-18 (2021).

[76] J. Chellig, N. Fountoulakis et F. Skerman, « The modularity of random graphs on the hyperbolic plane », Journal of Complex Networks **10**, 1-32 (2021).

[77] B. Kovács, S. G. Balogh et G. Palla, « Generalised popularity-similarity optimisation model for growing hyperbolic networks beyond two dimensions », Scientific Reports **12**, 968 (2022).

[78] P. Almagro, M. Boguñá et M. Á. Serrano, « Detecting the ultra low dimensionality of real networks », Nature Communications **13**, 60-96 (2022).

[79] I. J. Goodfellow, Y. Bengio et A. Courville, *Deep Learning* (MIT Press, 2016).

[80] W. Gu, A. Tandon, Y.-Y. Ahn et F. Radicchi, « Principled approach to the selection of the embedding dimension of networks », Nature Communications **12**, 3772 (2021).

[81] A. Allard et M. Á. Serrano, « Navigable maps of structural brain networks across species », PLoS computational biology **16**, e1007584 (2020).

[82] G. García-Pérez, M. Boguñá, A. Allard et M. Á. Serrano, « The hidden hyperbolic geometry of international trade : World Trade Atlas 1870–2013 », Scientific Reports **6**, 33441 (2016).

[83] M. Zheng, G. García-Pérez, M. Boguñá et M. Á. Serrano, « Scaling up real networks by geometric branching growth », Proceedings of the National Academy of Sciences **118**, e2018994118 (2019).

[84] A. Allard, M. Á. Serrano, G. García-Pérez et M. Boguñá, « The geometric nature of weights in real complex networks », Nature Communications **8**, 14103 (2017).

[85] D. Krioukov, M. Kitsak, R. S. Sinkovits, D. Rideout, D. Meyer et M. Boguñá, « Network Cosmology », Scientific Reports **2**, 793 (2012).

[86] M. Kitsak, F. Papadopoulos et D. Krioukov, « Latent geometry of bipartite networks », Physical Review E **95**, 032309 (2017).

[87] K.-K. Kleineberg, M. Boguñá, M. Á. Serrano et F. Papadopoulos, « Hidden geometric correlations in real multiplex networks », Nature Physics **12**, 1076-1081 (2016).

[88] K.-K. Kleineberg, L. Buzna, F. Papadopoulos, M. Boguñá et M. Á. Serrano, « Geometric Correlations Mitigate the Extreme Vulnerability of Multiplex Networks against Targeted Attacks », Physical Review Letters **118**, 218301 (2017).

[89] G. García-Pérez, M. Boguñá et M. Á. Serrano, « Multiscale unfolding of real networks by geometric renormalization », Nature Physics **14**, 583-589 (2018).

[90] H. Cherifi, G. Palla, B. K. Szymanski et X. Lu, « On community structure in complex networks : challenges and opportunities », Applied Network Science **4**, 117 (2019).

[91] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii et U. Alon, « Network Motifs : Simple Building Blocks of Complex Networks », Science **298**, 824-827 (2002).

[92] S. Fortunato et D. Hric, « Community detection in networks : A user guide », Physics Reports **659**, 1-44 (2016).

[93] S. Fortunato et M. E. J. Newman, « 20 years of network community detection », Nat. Phys. **18**, 848-850 (2022).

[94] R. F. Betzel, M. A. Bertolero, E. M. Gordon, C. Gratton, N. U. Dosenbach et D. S. Bassett, « The community structure of functional brain networks exhibits scale-specific patterns of inter- and intra-subject variability », NeuroImage **202**, 115990 (2019).

[95] J. Draisma, T. B. McAllister et B. Nill, « Lattice-Width Directions and Minkowski's 3^d-Theorem », SIAM Journal on Discrete Mathematics **26**, 1104-1107 (2012).

[96] R. A. Horn et C. R. Johnson, *Matrix analysis*, 2e éd. (Cambridge University Press, 2013).

[97] M. Rudelson et R. Vershynin, « Sampling from large matrices », Journal of the ACM **54**, 21-es (2007).

[98] R. Vershynin, *High-Dimensional Probability : An Introduction with Applications in Data Science* (Cambridge University Press, 2018).

[99] V. Thibeault, P. Desrosiers et A. Allard, « The low-rank hypothesis of complex systems », arXiv.2208.04848, (2022).

[100] C. E. Shannon, « A mathematical theory of communication », The Bell System Technical Journal **27**, 379-423 (1948).

[101] J. Jiang, Z.-G. Huang, T. P. Seager, W. Lin, C. Grebogi, A. Hastings et Y.-C. Lai, « Predicting tipping points in mutualistic networks through dimension reduction », Proceedings of the National Academy of Sciences **115**, E639 (2018).

[102] V. Thibeault, G. St-Onge, L. J. Dubé et P. Desrosiers, « Threefold way to the dimension reduction of dynamics on networks : An application to synchronization », Physical Review Research **2**, 043215 (2020).

[103] M. Vegué, V. Thibeault, P. Desrosiers et A. Allard, « Dimension reduction of dynamics on modular and heterogeneous directed networks », arXiv.2206.11230, (2022).

[104] C. W. Lynn, L. Papadopoulos, A. E. Kahn et D. S. Bassett, « Human information processing in complex networks », Nature Physics **16**, 965-973 (2020).

[105] G. Dong, J. Fan, L. M. Shekhtman, S. Shai, R. Du, L. Tian, X. Chen, H. E. Stanley et S. Havlin, « Resilience of networks with community structure behaves as if under an external field », Proceedings of the National Academy of Sciences **115**, 6911-6915 (2018).

[106] M. Á. Serrano, M. Boguñá et A. Vespignani, « Extracting the multiscale backbone of complex weighted networks », Proceedings of the National Academy of Sciences **106**, 6483-6488 (2009).

[107] C. A. Robertson et J. G. Fryer, « Some descriptive properties of normal mixtures », Scandinavian Actuarial Journal **1969**, 137-146 (1969).