Réduire la dimension des systèmes complexes : un regard sur l'émergence de la synchronisation

Mémoire

Vincent Thibeault

Maîtrise en physique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Vincent Thibeault, 2020

Réduire la dimension des systèmes complexes : un regard sur l'émergence de la synchronisation

Mémoire

Vincent Thibeault

Sous la direction de:

Louis J. Dubé, directeur de recherche
Patrick Desrosiers, codirecteur de recherche

Résumé

Les systèmes complexes se caractérisent par l'émergence de phénomènes macroscopiques qui ne s'expliquent pas uniquement par les propriétés de leurs composantes de base. La synchronisation est l'un de ces phénomènes par lequel les interactions entre des oscillateurs engendrent des mouvements collectifs coordonnés. Une représentation sous forme de graphe permet de modéliser précisément les interactions, alors que les oscillations se décrivent par des dynamiques non linéaires. Étant donné le lien subtil entre le graphe et la dynamique des oscillateurs, il est difficile de prédire l'émergence de la synchronisation.

L'objectif de ce mémoire est de développer de nouvelles méthodes pour simplifier les systèmes complexes d'oscillateurs afin de révéler les mécanismes engendrant la synchronisation. À cette fin, nous introduisons des notions de la théorie des graphes et des systèmes dynamiques pour définir la synchronisation sur des bases mathématiques. Nous présentons ensuite des approches existantes sophistiquées pour réduire la dimension de dynamiques d'oscillateurs. Ces techniques sont toutefois limitées lorsque les dynamiques évoluent sur des graphes plus complexes. Nous développons alors une technique originale—spécialement adaptée pour les graphes aux propriétés plus hétérogènes—pour réduire la dimension de dynamiques non linéaires. En plus de généraliser des approches récentes, notre méthode dévoile plusieurs défis théoriques reliés à la simplification d'un système complexe. Entre autres, la réduction de la dimension du système se bute à une trichotomie : il faut favoriser la conservation des paramètres dynamiques, des propriétés locales du graphe ou des propriétés globales du graphe. Finalement, notre méthode permet de caractériser mathématiquement et numériquement l'émergence d'états exotiques de synchronisation.

Abstract

Complex systems are characterized by the emergence of macroscopic phenomena that cannot be explained by the properties of their basic constituents. Synchronization is one of these phenomena in which the interactions between oscillators generate coordinate collective behaviors. Graphs allow a precise representation of the interactions, while nonlinear dynamics describe the oscillations. Because of the subtle relationship between graphs and dynamics of oscillators, it is challenging to predict the emergence of synchronization.

The goal of this master's thesis is to develop new methods for simplifying complex systems of oscillators in order to reveal the mechanism causing synchronization. To this end, we introduce notions of graph theory and dynamical systems to define synchronization on sound mathematical basis. We then present existing sophisticated approaches for reducing the dimension of oscillator dynamics. Yet, the efficiency of these techniques is limited for dynamics on complex graphs. We thus develop an original method—specially adapted for graphs with heterogeneous properties—for reducing the dimensions of nonlinear dynamics. Our method generalizes previous approaches and uncovers multiple challenges related to the simplification of complex systems. In particular, the dimension reduction of a system comes up against a trichotomy: one must choose to conserve either the dynamical parameters, the local properties of the graph, or the global properties of the graph. We finally use our method to characterize mathematically and numerically the emergence of exotic synchronization states.

Table des matières

Résumé ii

Abstract iii

Table des matières iv

Liste des tableaux vi

Liste des figures vii

Liste des contributions viii

Notation, abréviations et symboles ix

Remerciements xvii

Avant-propos xix

Introduction—De divers réductionnismes 1

1 Lien entre la structure et la dynamique des systèmes complexes 6
- 1.1 Structure . . . 7
  - 1.1.1 Graphes . . . 8
  - 1.1.2 Observables structurelles . . . 9
  - 1.1.3 Graphes aléatoires . . . 15
  - 1.1.4 Graphes modulaires . . . 21
- 1.2 Dynamique . . . 27
  - 1.2.1 Définition mathématique . . . 27
  - 1.2.2 Analyse dynamique . . . 30
  - 1.2.3 Oscillateurs . . . 32
- 1.3 Dynamiques sur des graphes . . . 37
  - 1.3.1 Définition mathématique . . . 37
  - 1.3.2 Observables dynamiques et phase . . . 40
  - 1.3.3 Synchronisation . . . 42

2 Réduction dimensionnelle et dynamiques de phase 50
- 2.1 Notions préliminaires . . . 51
- 2.2 Réduction dimensionnelle en une dynamique de phase . . . 52
  - 2.2.1 Explication de l'approche . . . 53
  - 2.2.2 Modèle de Kuramoto . . . 58
- 2.3 Réductions dimensionnelles d'une dynamique de phase . . . 67
  - 2.3.1 Réduction de Ott-Antonsen . . . 69
  - 2.3.2 Réduction de Watanabe-Strogatz . . . 74
  - 2.3.3 Résumé des approches . . . 78

3 DART : une réduction dimensionnelle ciblée pour les dynamiques sur des graphes **81**
3.1 Résumé . . . 83
3.2 Abstract . . . 83
3.3 Introduction . . . 84
3.4 Structural and dynamical setup . . . 85
3.4.1 Modular graphs . . . 86
3.4.2 Phase dynamics . . . 87
3.5 DART : Dynamics Approximate Reduction Technique . . . 89
3.5.1 Definition of the observables . . . 89
3.5.2 Derivation of the reduced dynamical system . . . 92
3.5.3 Construction of the reduction matrix . . . 96
3.5.4 Errors in DART . . . 101
3.5.5 Application to phase dynamics on modular graphs . . . 106
3.6 Chimeras and explosive synchronization . . . 110
3.6.1 Preliminary remarks on chimeras . . . 110
3.6.2 Chimeras in modular graphs . . . 110
3.6.3 Periphery chimeras in two-star graphs . . . 115
3.6.4 Chimera region size . . . 119
3.6.5 Explosive synchronization in star graphs . . . 121
3.7 Conclusion . . . 125
3.8 Appendix A : DN-dimensional real dynamics . . . 127
3.9 Appendix B : Phase and modulus equations for the reduced phase dynamics 130
3.10 Appendix C : Existence and uniqueness of solutions to the compatibility equations . . . 133
3.11 Appendix D : Calculation of C_T and V_T in Procedure 1 . . . 134
3.11.1 Eigenvector matrix V_T . . . 134
3.11.2 Exact methods to compute C_T for a given V_T . . . 134
3.11.3 Approximate method to compute C_T for a given V_T . . . 135
3.12 Appendix E : Calculation of C_{T_u} in Procedure 2 . . . 136
3.13 Appendix F : Equivalence between the complete and the reduced dynamics for $n = N$ . . . 137
3.14 Appendix G : Initial conditions to get chimeras . . . 139
3.15 Complement I : Examples of Procedure 1 . . . 140
3.16 Complement II : Explosive synchronization . . . 141

Conclusion et perspectives **143**

A Outils numériques **149**
A.1 Structure . . . 149
A.2 Dynamique . . . 149

B Extensions de DART **151**
B.1 Observables non linéaires . . . 151
B.2 Observables avec poids dynamiques . . . 162

Bibliographie **164**

Liste des tableaux

I Systèmes complexes 3

2.1 Le modèle de Kuramoto comme modèle canonique 63
2.2 Réductions dimensionnelles de dynamiques de phase 79

3.1 Reduced dynamics obtained from DART 95
3.2 Reduced dynamics of the Winfree, Kuramoto, and theta model 95
3.3 Reduced modulus/phase dynamics for the Winfree, Kuramoto, and theta models 131
3.4 Simplified reduced dynamics for the Winfree, Kuramoto, and theta models . . . 132
C Perspectives futures du mémoire 145

Liste des figures

1.1 Le cerveau comme système complexe . . . 8
1.2 Différents types de graphes . . . 9
1.3 Distributions des degrés synthétiques et réelles . . . 11
1.4 Densités spectrales synthétiques et réelles . . . 12
1.5 Densités spectrales complexes réelles . . . 15
1.6 Univers d'un ensemble de graphes . . . 16
1.7 Univers d'un ensemble de matrices . . . 17
1.8 Univers du modèle de Erdős–Rényi . . . 19
1.9 Réseau du cortex visuel de la souris . . . 21
1.10 Illustration de quelques notions reliées aux systèmes dynamiques . . . 29
1.11 Cycles limites pour trois différents oscillateurs . . . 33
1.12 La phase selon le temps . . . 41
1.13 Synchronisation de la dynamique de van der Pol sur le modèle de Gilbert . . . 43
1.14 Schématisation de la position d'un oscillateur sur le tore unidimensionnel . . . 45
1.15 Illustration intuitive de l'observable de synchronisation de phase . . . 45
1.16 Illustration intuitive de la synchronisation en fréquence et en phase . . . 46
1.17 Synchronisation de la dynamique de Hodgkin-Huxley sur le SBM moyen . . . 49

2.1 Paramétrage d'une courbe sur un cycle limite . . . 53
2.2 Isochrones et transformation de coordonnées vers une phase . . . 55
2.3 Émergence de la synchronisation en fréquence dans le modèle de Kuramoto . . . 66

3.1 Modular graph and matrix of probabilities . . . 86
3.2 SNIC bifurcation in the theta model . . . 88
3.3 Schematization of DART for a modular graph . . . 96
3.4 Graph schematization of DART with spectral densities . . . 102
3.5 Setup for the dimension reduction of the Kuramoto model on the two-triangle . . . 103
3.6 Complete vs. reduced ($n = 2$) Kuramoto dynamics on the two-triangle . . . 104
3.7 Impact of n on the quality of the reduced dynamics . . . 106
3.8 Complete vs. reduced Winfree, Kuramoto, theta model . . . 108
3.9 RMSE error vs. the distance d . . . 109
3.10 Chimera state regions in the Kuramoto-Sakaguchi dynamics . . . 114
3.11 Periphery chimeras for the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the two-star . . . 118
3.12 Periphery chimera illustrated in terms of the phases . . . 119
3.13 Size of the chimera regions vs. the block asymmetry parameter . . . 120
3.14 Explosive synchronization in the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the star . . . 124
3.15 Lorenz dynamics on the mean SBM . . . 129
3.16 Basin of attraction of the chimeras in the Kuramoto-Sakaguchi model . . . 139
3.17 Trajectoires de la dynamique de Kuramoto-Sakaguchi sur l'étoile . . . 141
3.18 Influence de N sur la dynamique de Kuramoto-Sakaguchi sur l'étoile . . . 142

B.1 Graphe d'observables pour la dynamique de van der Pol . . . 161

Liste des contributions

Article

V. Thibeault, G. St-Onge, L. J. Dubé, and P. Desrosiers, « Threefold approach to the dimension reduction of dynamics on networks : an application to synchronization », accepté dans *Physical Review Research*, arXiv : 2005.10922 , 2020.

Présentations

V. Thibeault, G. St-Onge, X. Roy-Pomerleau, L.J. Dubé, and P. Desrosiers, « Predicting synchronization regimes with spectral dimension reduction on graphs », Présentation orale, 14th International School and Conference on Network Science (NetSci), Burlington, Vermont (United States), Mai 2019.

V. Thibeault, G. St-Onge, X. Roy-Pomerleau, L.J. Dubé, and P. Desrosiers, « Predicting synchronization regimes with reduced dimensional dynamics on modular graphs », Présentation orale, Mediterranean School of Complex Networks (MSCx), Salina, Sicily (Italie), Septembre 2018.

V. Thibeault, X. Roy-Pomerleau, G. St-Onge, J-G. Young, and P. Desrosiers, « Synchronization dynamics on the stochastic block model », Présentation par affiche, Réunion annuelle Sentinelle Nord, Québec, Québec (Canada), Août 2018.

V. Thibeault, X. Roy-Pomerleau, G. St-Onge, J-G. Young, L.J. Dubé, and P. Desrosiers, « Synchronization dynamics on the stochastic block model », Présentation par affiche, 13th International School and Conference on Network Science (NetSci), Paris (France), Juin 2018.

Notation, abréviations et symboles

Dans ce mémoire, nous introduisons plusieurs symboles mathématiques dont la signification peut dépendre du contexte. Nous précisons donc généralement la définition des symboles dans le texte. Malgré tout, afin d'éviter des ambiguïtés, nous utilisons les prochaines pages pour définir certaines notations et abréviations en plus d'énumérer les principaux symboles utilisés.

Notation

Un vecteur d'un espace vectoriel à N dimensions (ex. $\mathbb{R}^N$) est noté par une lettre minuscule en caractère gras. Par exemple,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_N \end{pmatrix}^\top,$$

où v_j est la j-ième composante du vecteur et $^\top$ est la transposition matricielle. La conjugaison hermitienne est notée †. L'élément (i, j) d'une matrice A est noté A_{ij}. Dans les démarches reliées aux systèmes dynamiques, un astérisque * signifie un point d'équilibre. Les matrices sont notées par des lettres majuscules, sauf quelques exceptions. Dans la mesure du possible, les ensembles sont écrits dans d'autres calligraphies ou avec une lettre majuscule. Une moyenne arithmétique ou l'espérance sur tout $x \in X$ est notée $\langle\,\rangle_X$ ou $\langle\,\rangle_x$. L'espérance sur un ensemble de graphes est notée $\mathbb{E}[\,]$. Un intervalle réel est noté $[a, b]$, un uplet (ou une suite) est noté $(a, b, ...)$ et un ensemble est noté $\{a, b, ...\}$.

Abréviations

SBM	Stochastic Block Model.
ERGM	Exponential Random Graph Model.
OA	Ott-Antonsen.
DART	Dynamics Approximate Reduction Technique.
MSE	Mean-squared error.
RMSE	Root Mean-squared error.
NMF	Nonnegative matrix factorization.
SNMF	Semi-nonnegative matrix factorization.
ONMF	Orthogonal nonnegative matrix factorization.
CNMF	Convex nonnegative matrix factorization.

Symboles généraux

Ensembles

$\mathbb{N}$	Ensemble des naturels incluant 0.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers.
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des complexes.
$\mathbb{T}^1$	1-tore, c'est-à-dire le cercle unité.
$\mathbb{T}^N$	N-tore $\mathbb{T}^1 \times ... \times \mathbb{T}^1$.
$\mathbb{D}^1$	Disque unité.
$\mathcal{C}^k$	Ensemble des fonctions dont la dérivée d'ordre $k \in \mathbb{N}$ existe et est continue.

Opérations et relations

$\circ$	Composition de fonctions.
$\times$	Produit cartésien.
$\#$	Cardinalité.
$\sim$	Relation d'équivalence.
$\simeq$	Isomorphisme.
$\subset$	Inclusion.

Constantes

π	Pi (3.14159...).
e	Constante d'Euler ou nombre de Néper (2.71828...).
i	Nombre imaginaire ($\sqrt{-1}$) ou indice, dépendant du contexte.

Chapitre 1 : Lien entre la structure et la dynamique des systèmes complexes

Structure

$\mathcal{G}$	Graphe, aussi nommé réseau.
$\mathcal{V}$	Ensemble des sommets.
$\mathcal{E}$	Ensemble des arêtes.
N	Nombre de sommets d'un graphe.

M	Nombre d'arêtes d'un graphe.
A	Matrice d'adjacence d'un graphe.
A_{ij}	Élément (i, j) de la matrice d'adjacence.
$\mathcal{S}$	Observable structurelle.
k_i	Degré du sommet i.
∂i	Voisinage du sommet i.
λ_i	i-ième valeur propre de A.
$\mathcal{M}(\lambda)$	Multiplicité d'une valeur propre λ.
$\rho(\lambda)$	Densité spectrale.
$\mathcal{G}(...)$	Graphe aléatoire.
Ω	Univers d'un graphe aléatoire.
Ω_A	Univers d'une matrice d'adjacence aléatoire.
P	Fonction de probabilité.
H	Entropie de Shannon.
Z	Fonction de partition.
γ	Multiplicateur de Lagrange.
$\mathcal{L}$	Fonction de Lagrange.
q	Nombre de communautés d'un graphe.
$\mathscr{B}$	Partition des sommets d'un graphe.
B_μ	μ-ième bloc d'un graphe.
N_μ	Nombre de sommets (ou cardinal) de B_μ.
s	Surjection de $\mathcal{V}$ vers $\{1, ..., q\}$.

Dynamique

t	Nombre réel représentant le temps.
$\mathscr{T}$	Intervalle réel de temps.
$\mathscr{X}$	Espace des états.
$\boldsymbol{F}$	Champ vectoriel.
$\boldsymbol{x}$	État dynamique.
$\boldsymbol{y}$	Trajectoire.
Γ	Ensemble des paramètres.
ϕ	Fonction d'évolution temporelle.
$\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0}$	Orbite de la dynamique débutant en $\boldsymbol{x}_0$.
$J_{\boldsymbol{F}}$	Matrice jacobienne du champ vectoriel $\boldsymbol{F}$.
$\mathcal{C}$	Cycle limite.
$\mathcal{B}(\mathcal{C})$	Bassin d'attraction de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{D}$	Observable dynamique.
θ	Fonction de phase.
ϑ	Phase.
R	Observable macroscopique de synchronisation de phase.
Φ	Observable macroscopique de phase.
Z	Observable macroscopique complexe de $\mathbb{T}^N \to \mathbb{D}^1$.
R_μ	Observable mésoscopique de synchronisation de phase du μ-ième bloc B_μ.
Φ_μ	Observable mésoscopique de phase du μ-ième bloc B_μ.
Z_μ	Observable mésoscopique complexe de $\mathbb{T}^{N_\mu} \to \mathbb{D}^1$ du μ-ième bloc B_μ.

Chapitre 2 : Réduction dimensionnelle et dynamiques de phase

Θ	Fonction de phase asymptotique.
$\mathcal{I}$	Isochrone.
$\boldsymbol{S}$	Fonction de sensibilité.
θ_j	Trajectoire de l'oscillateur j.
H	Fonction 2π-périodique d'interaction entre les phases.
σ_{jk}	Constante de couplage entre les oscillateurs j et k.
α_{jk}	Déphasage entre les oscillateurs j et k.
Θ_t	Variable aléatoire de phase au temps t.
ρ_{Θ_t}	Densité de probabilité de Θ_t.
ω_j	Fréquences naturelles du j-ième oscillateur.
$\Omega(\omega)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire continue réelle ω dont les résultats sont des fréquences naturelles.
Z_m	m-ième observable de Kuramoto-Daido ($N < \infty$).
$\mathcal{Z}_m$	m-ième coefficient de Fourier de ρ_{Θ_t} et observable de Kuramoto-Daido continue dépendant des fréquences.
$\tilde{Z}_m$	m-ième observable de Kuramoto-Daido continue.
D	Fonction bijective, analytique sur $\mathbb{D}$ et rationnelle linéaire (de Möbius).
$\mathcal{Z}$	Observable complexe sur $\mathbb{D}$.
ρ	Module de $\mathcal{Z}$.
Ψ	Argument de $\mathcal{Z}$.
φ	Angle de rotation global.
w_j	j-ième constante du mouvement de la dynamique de Kuramoto.

Chapitre 3 :
DART : une réduction dimensionnelle ciblée pour les dynamiques sur des graphes

N	Nombre de sommets et dimension du système dynamique complet.
n	Dimension du système dynamique réduit.
θ_j	Phase de l'oscillateur j.
σ	Couplage entre chaque oscillateur.
α	Déphasage entre chaque oscillateur.
f, g	Fonctions 2π-périodiques décrivant la dynamique intrinsèque des oscillateurs.
h	Fonction 2π-périodique d'interaction entre les oscillateurs.
F, G	Fonctions holomorphes complexes décrivant la dynamique intrinsèque des oscillateurs.
H	Fonction holomorphe d'interaction entre les oscillateurs.
Z_μ	μ-ième observable complexe mésoscopique.
O_μ	Sous-ensemble de sommets impliqués dans l'observable Z_μ.
M	Matrice de réduction $n \times N$.
ω_j	Paramètre dynamique de l'oscillateur j.
W	Matrice diagonale des paramètres dynamiques (réelle et $N \times N$).
K	Matrice diagonale des degrés (réelle et $N \times N$).
A	Matrice d'adjacence (réelle et $N \times N$).
$\mathcal{W}$	Matrice réduite des paramètres dynamiques (réelle et $n \times n$).
$\mathcal{K}$	Matrice réduite des degrés (réelle et $n \times n$).
$\mathcal{A}$	Matrice réduite d'adjacence (réelle et $n \times n$).
Ω_μ	Paramètre dynamique moyen pondéré par $M_{\mu j}$.
κ_μ	Degré moyen pondéré par $M_{\mu j}$.
$\mathcal{D}_\Omega$	Matrice diagonale des paramètres dynamiques moyens pondérés.
$\mathcal{D}_\kappa$	Matrice diagonale des degrés moyens pondérés.
V	Matrice des vecteurs propres de W, K ou A.
C	Matrice de coefficients.
T, T_1, T_2, T_3	Matrices cibles parmi W, K et A.
d	Distance provenant de la norme de Frobenius normalisée.
β	Somme du nombre maximum d'arêtes dans chaque communauté du SBM divisée par le nombre maximum d'arêtes possible.
p_{in}	Probabilité qu'un sommet soit connecté à un autre sommet dans la même communauté.

p_{out}	Probabilité qu'un sommet soit connecté à un autre sommet dans une autre communauté.
ρ	Densité du SBM à deux blocs, $\beta p_{\text{in}} + (1-\beta)p_{\text{out}}$.
Δ	Différence entre p_{in} et p_{out} pour un SBM à deux blocs.
(ρ, Δ)	Élément de l'espace densité du SBM.
f	Fraction N_1/N_2.
S_c	Taille de la région des chimères dans l'espace densité du SBM.
S_c^{**}	Taille de la région des chimères selon le déphasage α pour la double étoile.

À Sarah

...il me sembloit ne pouvoir faire plus grande faveur à mon esprit, que de le laisser en pleine oysiveté [...] Mais je trouve,

variam semper dant otia mentem,
[toujours l'oysiveté fait
l'esprit inconstant (Lucain)]

qu'au rebours faisant le cheval eschappé, [l'esprit] se donne cent fois plus de carriere à soy-mesmes, qu'il ne prenoit pour autruy : et m'enfante tant de chimeres et monstres fantasques les uns sur les autres, sans ordre, et sans propos, que pour en contempler à mon ayse l'ineptie et l'estrangeté, j'ay commencé de les mettre en rolle : esperant avec le temps, luy en faire honte à luy mesmes.

Montaigne
De l'Oysiveté, *Les Essais*

Remerciements

L'émergence de ce mémoire est le fruit de l'interaction entre plusieurs personnes envers qui je suis fort redevable. Les héros obscurs de ce mémoire sont sans équivoque mes deux directeurs de recherche qui ont suggéré un bon nombre de commentaires pertinents. Comme le dit Stephen King : « *to write is human, to edit is divine* ».

Je tiens d'abord à remercier tout spécialement mon superviseur Patrick Desrosiers. Son soutien scientifique et psychologique (voire parental) m'a permis de cheminer grandement sur le plan académique et personnel. Ses compétences scientifiques m'inspirent fortement depuis le début de mon baccalauréat. Son enseignement engagé et passionné, sa capacité à comprendre les questionnements des étudiants, son écriture claire et précise et sa rigueur mathématique n'en sont que quelques exemples. Je suis très reconnaissant d'avoir été aussi bien accompagné dans mes premiers pas dans le monde de la recherche : rares sont ceux qui ont la chance de pouvoir collaborer de façon aussi étroite avec leur directeur de recherche.

Je remercie également mon superviseur Louis J. Dubé de m'avoir inclus dans son groupe de recherche Dynamica malgré sa retraite imminente. Ses sages conseils (et ceux de sa grand-mère serbo-croate) ont toujours su, même à distance, « me faire retomber sur mes pattes ». Je me sens privilégié d'avoir été parmi ses derniers étudiants qui ont eu un baptême du feu avec les cours de dynamique moderne et de physique statistique avancée. Le partage de nombreuses références pertinentes (ex. les travaux de P. W. Anderson et de G. Holton) a réveillé ma curiosité pour l'épistémologie et ses courriels parsemés de citations m'ont toujours plu :

Caveat emptor !
Audentes Fortuna Juvat !
Wir müssen wissen, Wir werden wissen !
En toute chose, il faut considérer la fin.

Un remerciement particulier s'impose aussi envers Antoine Allard qui a déniché aux étudiants gradués un local qui favorise les interactions scientifiques et la survie des plantes. Je salue également son soutien moral et sa patience durant la rédaction de ce mémoire et je le remercie d'avoir accepté courageusement d'évaluer ce mémoire et de me diriger au doctorat.

Je tiens aussi à remercier Nicolas Doyon d'avoir accepté d'évaluer ce mémoire et Laurent

Hébert-Dufresne pour sa présence lors de mon colloque de maîtrise. J'ai beaucoup de gratitude envers le travail des examinateurs qui n'est pas de tout repos.

En plus d'être entouré d'excellents professeurs, j'ai bénéficié d'un milieu de recherche stimulant et amical avec le groupe Dynamica. Je garde de précieux souvenirs de nos randonnées en vélo, nos soupers de Noël, notre retraite de travail à Charlevoix et nos discussions autour des bouteilles d'eau et du café.

Je remercie tout spécialement mon partenaire de tandem Xavier avec qui j'ai voyagé avec grand plaisir de la physique du Cégep à celle de la maîtrise. Merci d'avoir vagabondé dans les idées à mes côtés. L'honnêteté de nos discussions a fait vibrer des cordes sensibles, mais toujours avec grand bénéfice. Notre voyage en Italie était fantastique et je suis ravi d'avoir admiré les statues de la Loggia dei Lanzi, l'École d'Athènes et les peintures de Botticelli à ses côtés.

Merci à mes mentors étudiants Charles et Guillaume pour leurs précieux conseils et leur ambition scientifique contagieuse dans les discussions. Je garde d'excellents souvenirs des moments passés ensemble à NetSci Burlington et l'idée de collaborer avec eux au doctorat me remplit d'enthousiasme. Je remercie également Edward pour ses conseils sur la visualisation de données, ses critiques déconcertantes, son humour subtil, son invitation à son mariage mémorable et pour les parties de basketball dont je m'ennuie déjà. Merci à Jean-Gabriel pour ses conseils et ses travaux sur le SBM qui m'ont inspiré durant ma maîtrise. Je suis également heureux d'avoir appris à mieux connaître Jean-Luc, Mohammed, Béatrice et Francis.

En dehors du cadre académique, je voudrais de plus remercier mes amis du baccalauréat, Alicia, Cédric, Charles, Jean-Félix, Mathieu et Nicolas, pour avoir non seulement maintenu nos liens d'amitié, mais pour avoir changé comment je mange, comment je pense et comment je lance un frisbee. Je suis reconnaissant envers Pierre-Marc qui est sans doute le détonateur de mon emballement envers la science et la philosophie. Je ne m'imagine pas atteindre un certain épanouissement intellectuel sans cette amitié qui naissait au secondaire. Je remercie aussi mon coéquipier de baseball, mon partenaire de tennis et mon ami d'enfance Marc-Antoine pour ses encouragements et Simon, Francis, Vincent et Christopher pour les enrichissantes discussions philosophiques. Il y a aussi ceux qui vous incitent ingénieusement à prendre un verre même quand les temps sont troubles. Sur ce plan, je dois une fière chandelle à Rim et Guillaume qui n'ont pas failli à leur tâche.

Du côté familial, je remercie mes parents Martine et Jerry, ma soeur Myriam, Clément et ma belle famille pour leur appui inconditionnel tout au long de mes études.

Finalement, il est essentiel de souligner le soutien, la générosité et la patience de ma copine Sarah. Malgré les nombreux obstacles et la fatigue, elle a su trouver l'énergie pour me motiver à entreprendre de nouveaux projets et à avoir un équilibre de vie plus sain.

Avant-propos

Le chapitre 3 de ce mémoire contient l'article **Threefold way to the dimension reduction of dynamics on networks : an application to synchronization**. L'auteur de ce mémoire est le premier auteur de l'article : il a conçu les idées originales de recherche, il a réalisé les démarches mathématiques, il a réalisé l'entièreté des simulations numériques menant aux figures et il a rédigé l'article.

Les coauteurs Guillaume St-Onge, Louis J. Dubé et Patrick Desrosiers ont révisé l'article. Guillaume St-Onge a également contribué à réaliser un travail exploratoire sur la synchronisation explosive et certaines simulations numériques. De plus, Patrick Desrosiers a aidé à développer les idées originales du projet et les preuves mathématiques.

Les résultats originaux de l'article ont été obtenus sur une période qui s'étend de l'hiver 2017 à l'hiver 2020. Ces résultats auraient potentiellement pu être publiés dans deux articles : un article méthodologique et un article appliqué. Il a toutefois été jugé plus attrayant au niveau de l'échéancier et sur le plan scientifique d'en faire un seul article cohérent.

L'article a été accepté le 19 octobre 2020 dans le nouveau journal libre d'accès *Physical Review Research* de l'*American Physical Society*. L'article est disponible dans l'archive *arXiv* : 2005.10922.

Introduction—De divers réductionnismes

Deux marcheurs discutent en se promenant le long d'un ravissant sentier forestier. Assis sur un rocher tout près, un ambitieux physicien se demande : « comment peuvent-ils s'échanger leurs réflexions ? ». Il pense alors à la propagation du son dans l'air, l'appareil auditif et le cerveau qui jouent certainement des rôles importants dans ces échanges. Mais quels sont les mécanismes qui rendent possible le traitement d'informations dans leur cerveau ? Il se dit alors que des interactions compliquées entre plusieurs milliards de neurones participent à ce traitement. Toujours insatisfait de cette réponse, il explore donc plus profondément le sujet des interactions entre les neurones en réfléchissant aux protéines et aux molécules qui participent aux réactions chimiques au sein des synapses. Heureux d'avoir ramené le tout à la chimie, il se sent d'attaque pour utiliser son expertise en physique. Il fait ainsi appel à ses connaissances de la thermodynamique pour expliquer les réactions chimiques, à la physique statistique pour expliquer la thermodynamique et à la mécanique quantique pour expliquer la physique statistique.

Le physicien peut-il désormais expliquer la discussion des marcheurs à l'aide de ses connaissances de la mécanique quantique ? Ce genre de questionnement, par lequel on examine la possibilité d'expliquer un phénomène après l'avoir *réduit* à des phénomènes considérés comme plus élémentaires, fait l'objet de plusieurs débats chez les scientifiques [7, 165, 251] et les philosophes [79, 130, 182, 204]. La question s'inscrit dans la thématique du *réductionnisme* qui provient du latin *reductio* signifiant « action de ramener » [69]. Mais ramener quoi à quoi et comment ? Cela dépend du type de réductionnisme. Ernst Mayr, un célèbre biologiste de l'évolution, distingue trois types de réductionnisme [164, 165] :

— Réductionnisme *constitutif* : les organismes (ex. les marcheurs) sont composés exactement des mêmes constituants (ex. les particules élémentaires) que la matière inorganique (ex. les minéraux d'un rocher). En extrapolant, le réductionnisme constitutif est un réductionnisme *ontologique* qui affirme que tout ce qui existe est constitué d'un certain nombre restreint de constituants élémentaires [112, 220] ;

— Réductionnisme de *théories* : une théorie T (ex. la thermodynamique) est réduite à une autre théorie B (ex. la physique statistique) si toutes les lois de T peuvent être déduites des lois de B [175, 182].

— Réductionnisme *explicatif* : la connaissance de l'ensemble des constituants (ex. les molécules) d'un système (ex. le cerveau) permet de comprendre le système complètement.

Le réductionnisme constitutif est normalement accepté en science [165], alors que les deux autres génèrent bien des controverses.

En physique, le réductionnisme théorique a connu un certain succès [1] avec les réductions de la mécanique des corps solides à la mécanique des points, la thermodynamique à la physique statistique et la gravitation de Newton à la relativité générale d'Einstein [175]. Ce succès est toutefois plus limité en chimie et en biologie, sciences dans lesquelles les théories s'appliquent à des systèmes avec tant d'éléments en interaction qu'il est difficile de les réduire à des théories plus élémentaires. Malgré tout, d'éminents physiciens ont publié des propos réductionnistes très audacieux concernant ces sciences.

En parlant des défis futurs de la mécanique quantique, Paul Dirac écrit que « les lois sous-jacentes de la physique, nécessaire à la théorie mathématique d'une grande partie de la physique et de toute la chimie, sont complètement connues et la difficulté [restante] est seulement dans l'application exacte de ces lois menant à des équations trop compliquées pour être résolues » [64]. Dans un élan similaire, Steven Weinberg ajoute qu'il y a « des flèches d'explications scientifiques, qui traversent l'espace de toutes les généralisations scientifiques. Ayant découvert plusieurs de ces flèches, nous pouvons désormais regarder le motif qui en émerge et l'on remarque une chose remarquable, peut-être la plus grande découverte scientifique de toutes. Ces flèches semblent converger vers une source commune ! » [251]. Mayr critique fortement ce genre d'affirmations de Weinberg dont la thèse s'apparente au réductionnisme théorique teinté de réductionnisme explicatif. Weinberg se dissocie cependant de ces réductionnismes en introduisant le réductionnisme *objectif* qui est basé sur une intuition que les explications scientifiques sont de plus en plus cohérentes entre elles [164, 165, 251, 252, 253].

Cette intuition est mise à l'épreuve lorsqu'elle est confrontée aux *systèmes complexes*. Il n'y a pas de consensus sur leur définition précise [43, 86], mais certaines caractéristiques leur sont fréquemment attribuées :

— *Grand nombre de constituants en interaction* [43, 250] ;
— *Dynamique non linéaire* : l'évolution temporelle des états des constituants et de leurs interactions est dictée par des fonctions non linéaires [169, 230, 254] ;
— *Structure hétérogène et hiérarchique* : assemblage compliqué de sous-systèmes (ex. neurones) qui sont eux-mêmes constitués de sous-systèmes (ex. molécules) [164, 176, 226] ;
— *Adaptation* : la structure et la dynamique du système se transforment selon l'environnement ou le comportement du système [86, 110, 169].

Le tableau I contient des exemples de systèmes complexes avec des éléments importants de leur structure et de leur dynamique. Par un jeu subtil et souvent mystérieux entre la structure

1. Ce succès est cependant remis en question par Thomas Kuhn par exemple [130, Chapitre IX].

Tableau I – Des systèmes complexes avec des éléments clés de leur structure et leur dynamique.

Système complexe	**Composantes structurelles**	**Variables dynamiques**
Cerveau	Neurones Neurotransmetteurs Connectome	Potentiel électrique Concentration de calcium Ouverture des canaux ioniques
Écosystème	Animaux Végétaux Réseaux trophiques	Taille des populations Position géographique Biomasse
Société	Humains Entreprises Réseaux sociaux	Virus Argent Nouvelles
World Wide Web	Pages web Hyperliens	Utilisateurs Robot d'indexation

et la dynamique, il y a des phénomènes collectifs surprenants qui surviennent, aussi appelés *phénomènes émergents*.

Un exemple spectaculaire de phénomène émergent est la *synchronisation* par laquelle les constituants d'un système ajustent leur mouvement pour osciller de manière coordonnée. La synchronisation survient entre les neurones du cerveau, les photons d'un laser et les lucioles. Dans de telles situations, le phénomène est connu pour avoir un rôle crucial dans la compréhension de l'épilepsie, la génération d'une impulsion laser et la séduction des lucioles [229]. Sans interaction, un constituant ne peut tout simplement pas se synchroniser : la synchronisation est une propriété collective qui dépend de la force des interactions entre les constituants.

En ce sens, Philip Anderson dit : « *More is Different* », un phénomène émergent est une propriété *de plus* et *collective* du système qui possède des propriétés *différentes* des constituants individuels [6]. Ce n'est toutefois pas la fin des réductionnismes. Les approches qui réduisent finement un système en ses constituants et ses interactions sont essentielles pour identifier les mécanismes microscopiques inconnus et possiblement cruciaux pour l'émergence d'un phénomène collectif. C'est le cas par exemple des mécanismes moléculaires intervenant dans l'épilepsie [228]. Ces approches appartiennent au réductionnisme *méthodologique*[2] qui remonte en quelque sorte à la méthode de René Descartes qui « [divise] chacune des difficultés [qu'il examine] en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour mieux les résoudre » [58].

2. Nous définissons cet autre réductionnisme de façon plus modérée et plus approximative que le réductionnisme méthodologique défini en philosophie [112, 259].

Afin de comprendre le phénomène collectif sous une perspective plus globale, il faut toutefois faire le pont entre les mécanismes microscopiques et les mécanismes macroscopiques. Dans le langage de Descartes, il est utile de « conduire par ordre [ses] pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés ... » [58]. Hélas, si l'ambitieux physicien veut expliquer la discussion des marcheurs avec la mécanique quantique, monter peu à peu lui prendra plus d'une vie : à chaque niveau dans la hiérarchie du système, divers phénomènes émergent et s'entremêlent. Comme le précise bien Anderson, « les phénomènes complexes émergents ne violent d'aucune manière les lois microscopiques, mais ils ne paraissent pas logiquement conséquents avec ces lois » [7].

Ce trou conceptuel entre les lois microscopiques et les phénomènes émergents engendre une difficulté majeure pour le réductionnisme méthodologique. En effet, il y a tant de variables à considérer dans un système complexe qu'il devient extrêmement difficile d'en dégager les plus importantes pour l'émergence du phénomène d'intérêt. En d'autres mots, la *dimension élevée* des systèmes complexes est souvent problématique.

Dans ce mémoire, nous nous attardons précisément à la résolution de ce problème dans le but de prédire l'émergence de la synchronisation. Pour ce faire, nous développons une méthode originale de *réduction dimensionnelle*, qui réduit la dimension d'un système complexe pour en isoler les mécanismes essentiels à l'émergence. Ainsi, plutôt que d'étudier le système « en autant de parcelles qu'il se pourrait », nous le décrivons à une dimension intermédiaire choisie prudemment : assez petite pour que des résultats intelligibles sur le système puissent être obtenus, mais suffisamment grande pour que le phénomène émergent se manifeste. En se concentrant davantage sur ce qui « est requis » pour mieux comprendre les systèmes que sur leurs fines décompositions, la réduction dimensionnelle contribue au réductionnisme méthodologique en permettant de « monter peu à peu [...] jusqu'à la connaissance des [systèmes les] plus composés ».

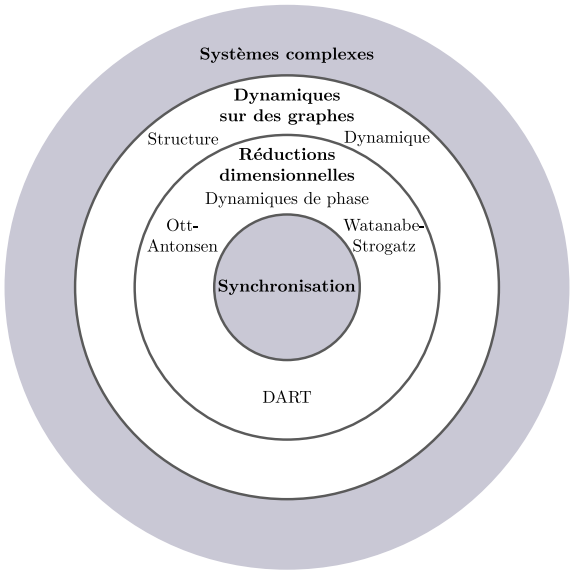
Réduire la dimension d'un système complexe, c'est réduire la dimension de sa structure et de sa dynamique. Ainsi, au chapitre 1, nous présentons des outils mathématiques pour modéliser la structure et la dynamique des systèmes complexes. Pour représenter la structure de façon détaillée, nous utilisons des *graphes*, soit un ensemble de sommets connectés par des arêtes. Ensuite, nous définissons plus précisément ce qu'est une dynamique sur des graphes, en portant un regard particulier sur les *dynamiques d'oscillateurs* qui prennent souvent la forme d'un grand système d'équations différentielles dans lesquelles les variables oscillent dans le temps. Ces dynamiques sont fondamentales dans ce mémoire, puisqu'elles permettent de définir et d'analyser théoriquement la synchronisation.

Les dynamiques d'oscillateurs sont généralement difficiles à analyser lorsqu'elles sont non linéaires et de grande dimension. Au chapitre 2, nous utilisons donc des méthodes mathéma-

tiques de réduction dimensionnelle pour réduire des dynamiques d'oscillateurs de dimension élevée. Nous réduisons d'abord leur dimension en les transformant en des dynamiques de leur phase. Ensuite, puisque les dynamiques de phase sont encore de dimension élevée, nous réduisons leur dimension à nouveau avec des méthodes de réduction dimensionnelle importantes introduites dans les dernières décennies.

Ces réductions dimensionnelles ne s'appliquent toutefois pas aux systèmes avec une structure plus hétérogène. Dans un article présenté au chapitre 3, nous développons ainsi une méthode originale de réduction dimensionnelle, nommée DART selon l'expression anglaise *Dynamics Approximate Reduction Technique*, qui s'applique à divers types de dynamiques sur des graphes et qui généralise plusieurs approches existantes. À l'aide des systèmes de dimension réduite obtenus et des outils de la dynamique non linéaire, nous réalisons notre objectif de prédire l'émergence de la synchronisation en considérant l'effet des propriétés structurelles.

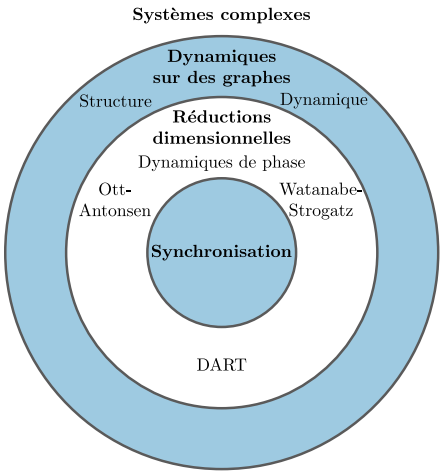
À chaque chapitre, un schéma tel que celui illustré ci-bas est présenté pour situer le lecteur par rapport à la place du chapitre dans le mémoire. Les régions colorées représentent les sujets abordés dans le chapitre et la région centrale est toujours colorée, puisque chaque chapitre porte un regard différent sur la synchronisation. L'ordre des chapitres est à l'image de l'évolution du projet de recherche : des questions sur les systèmes complexes et la synchronisation ont mené au développement d'outils théoriques permettant d'y répondre.



Chapitre 1

Lien entre la structure et la dynamique des systèmes complexes

Ce chapitre a pour objectif principal d'introduire des outils permettant de modéliser les systèmes complexes. Nous divisons cette modélisation en deux volets. Le premier volet est relié à la *structure* par laquelle nous tentons d'établir les relations entre les constituants du système. Nous verrons que la théorie des graphes est utile pour modéliser cette structure. Le deuxième volet concerne la manière dont les constituants du système se meuvent dans le temps, c'est-à-dire leur *dynamique*. Les deux premières sections de ce chapitre sont consacrées à ces aspects cruciaux des systèmes complexes.



Pour élaborer un modèle d'un système complexe, structure et dynamique doivent être incorporées. La dernière section a ainsi pour but de relier structure et dynamique au travers d'une *dynamique sur un graphe*. Avec cette approche, il sera possible d'analyser un phénomène émergent de certains systèmes complexes : la *synchronisation*, par laquelle les éléments du système accomplissent des mouvements coordonnés.

La synchronisation est au coeur de ce mémoire et motivera l'introduction de notions de dynamique non linéaire essentielles à son étude. Ce phénomène apparaît sous plusieurs formes et dans plusieurs types de systèmes, ce que nous discuterons à la fin de ce chapitre.

1.1 Structure

La *structure* d'un système, complexe ou non, est un concept qui paraît plutôt abstrait aux premiers abords, peut-être en raison de la généralité du terme. Le mot structure est emprunté du latin *structura* [69] qui signifie *construction*. Cette étymologie n'est finalement pas étrangère à l'intuition : il suffit de penser une construction comme un édifice, un pont, un bateau, etc. La structure constitue l'ossature porteuse de la construction. Cette ossature est bien visible pour la tour Eiffel par exemple, un assemblage impressionnant de pièces de fer puddlé. Ces pièces, bien qu'elles soient les constituants fondamentaux de la tour, sont insuffisantes pour *soutenir* la tour : il faut les organiser astucieusement pour que la tour soit en équilibre.

Il en est de même pour les systèmes complexes [1] dont la structure est un assemblage d'éléments dont l'organisation n'est pas laissée au parfait hasard : elle soutient les *fonctions* de ces systèmes [141]. Le cerveau est l'archétype du système complexe dans lequel une structure élaborée apparaît à différentes échelles [figure 1.1] [22], ce qui permet l'accomplissement de fonctions telles que le mouvement du corps et la perception. Par exemple, le cerveau de la souris peut être divisé en plusieurs régions fonctionnelles qui interagissent. Ces régions peuvent à leur tour être subdivisées en sous-structures comme le réseau du cortex visuel et constitué essentiellement de neurones interagissant via des synapses. En examinant le système à une échelle encore plus petite qu'un neurone, il y a des réseaux de protéines permettant entre autres aux neurones de transférer et de recevoir de l'information [126]. Pour cette raison, la structure d'un système complexe est souvent qualifiée de *hiérarchique*. De plus, en partie à cause de toute cette profondeur organisationnelle, il est dit que les systèmes complexes sont munis d'une structure en *réseaux complexes* [141]. Il n'y a pas de définition universelle de ce qu'est un réseau complexe. Pour avoir une intuition de ce qu'ils sont, il est standard de simplement donner plusieurs exemples [240].

Les réseaux complexes sont d'origine extrêmement diverse. Ils sont observés dans les systèmes biologiques (réseaux neuronaux, réseaux de protéines, chaînes alimentaires), les systèmes sociologiques (réseaux sociaux, réseaux de collaborations), les systèmes technologiques (Internet, lignes de transmissions électriques), les systèmes urbains (réseaux routiers, réseaux d'égout et de distribution d'eau potable), etc. Derrière cette diversité se cache toutefois une certaine unité. En effet, ces réseaux ont des propriétés communes pouvant être repérées en modélisant mathématiquement leur structure, ce qui est l'objet de cette section. [2]

1. Voir l'introduction et ses références. En particulier, pour des discussions fascinantes sur la *complexité*, voir les articles de H. Simon [226] et de P. Anderson [6] ainsi que les livres de M. Mitchell [169], de P. Anderson [7, Chap. IX] et de P. Charbonneau [43, Chap. 1]. Les références [47, Chap. 3] et [141, Introduction] sont également intéressantes.

2. Notons que dans cette section, nous tirons profit du fait qu'il y a désormais plusieurs banques de données de réseaux réels : *Web of life* [21], *ICON* [48], *Network Repository* [214], *Neurodata* [247], etc. Ces banques de données sont utilisées pour illustrer certaines propriétés des réseaux réels.

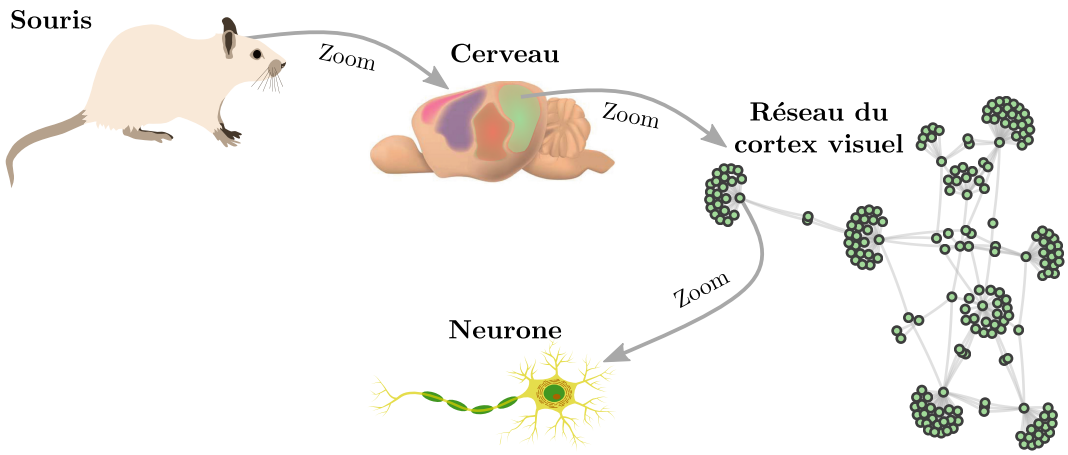


FIGURE 1.1 – Le cerveau comme système complexe. De la souris au neurone, il y a plusieurs structures. Quatre régions (de gauche à droite : motrice, sensorielle, auditive, visuelle) du cortex du cerveau de la souris sont illustrées de manière approximative (modifié de [237]). À droite de la figure, un réseau réel du cortex visuel de la souris disponible sur le site *Neurodata* [247] (mouse_visual.cortex_2.graphml). Le réseau dirigé et pondéré possède 193 sommets et 214 arêtes (synapses). Puisque le but n'est pas de tirer des conclusions biologiques concrètes sur ce réseau, mais plutôt de l'utiliser à titre d'exemple, nous utiliserons la version non dirigée et non pondérée du réseau de *Network Repository* (bn-mouse-visual-cortex-2.edges) [214]. De plus, nous avons illustré tous les noeuds de façon identique, alors qu'en réalité, leur nature est différente. Pour plus de détails, voir la référence [32, Figure 5b].

1.1.1 Graphes

Les systèmes complexes sont munis d'une structure qui peut être modélisée par un objet mathématique appelé *graphe*. Dans cet ouvrage, aucune distinction n'est faite entre la terminologie plus mathématique de « graphe » et la terminologie de « réseau ». [3] Intuitivement, un graphe $\mathcal{G}$ est un ensemble de sommets (noeuds, points) connectés par des arêtes (liens, lignes), comme illustré à la figure 1.1. Un sommet est noté v_j (v pour *vertices*) ou plus simplement i où $i \in \mathcal{V} = \{1, ..., N\}$ pour un graphe à $\#\mathcal{V} = N$ sommets. Une arête est définie comme un couple $(i, j) \in \mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et le nombre d'arêtes est $\#\mathcal{E} = M$. De plus, il est important de souligner qu'une arête (i, j) est une arête qui va du sommet j vers le sommet i. Plus formellement, un graphe est alors défini comme une paire ordonnée $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Une manière alternative de décrire un graphe mathématiquement est avec une matrice. Cette matrice est nommée la matrice d'adjacence $A \in \{0, 1\}^{N^2}$ et ses éléments sont tels que

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Dans cette définition de graphe, une arête qui va du sommet j vers le sommet i n'implique pas nécessairement qu'il existe une arête dans $\mathcal{E}$ qui connecte i à j. Dans un tel cas, le graphe est dit *dirigé* ou *orienté*. À l'inverse, si $(i, j) \sim (j, i)$ pour tout $(i, j) \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire que toutes

3. Nous privilégierons tout de même « réseau » pour parler de réseaux réels et « graphe » pour l'objet mathématique [53].

les arêtes (i, j) ont leur équivalent (j, i) dans $\mathcal{E}$, alors le graphe est dit *non dirigé*. La matrice d'adjacence d'un graphe non dirigé est alors symétrique.

De plus, rien dans la définition de graphe ci-dessus n'empêche qu'une arête (i, i) appartienne à $\mathcal{E}$, c'est-à-dire qu'un sommet i soit connecté à lui-même. Ce type d'arête est appelé une *boucle* et cela fait en sorte que $A_{ii} = 1$. Une notion encore plus générale que la matrice d'adjacence est la matrice de connectivité A.[4] Une telle matrice peut être pondérée, c'est-à-dire que $A_{ij} \in \mathbb{R}$ plutôt que d'être restreint à 0 ou 1. Si les arêtes d'un graphe peuvent posséder des poids positifs et négatifs, alors le graphe (ou la matrice d'adjacence) est *signé*. Si les arêtes possèdent seulement des poids positifs, alors le graphe est dit *pondéré*.

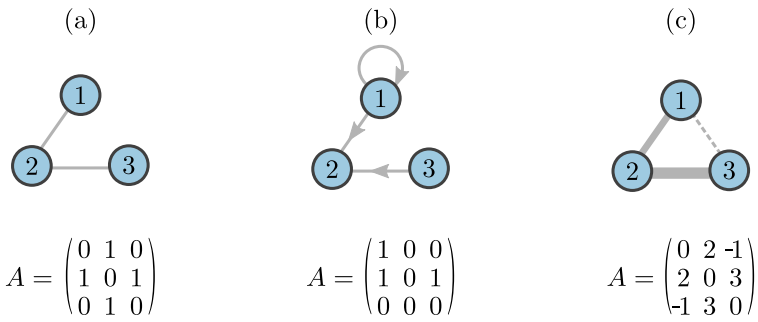


FIGURE 1.2 – Différents types de graphes. (a) Graphe simple et sa matrice d'adjacence symétrique. (b) Graphe dirigé avec une boucle au sommet 1 et sa matrice d'adjacence non symétrique. (c) Graphe pondéré et signé. L'épaisseur d'un arête est reliée au poids qui lui est associé. Plus l'arête est large, plus la valeur absolue du poids est grande. La ligne traitillée représente une arête avec un poids de valeur négative.

1.1.2 Observables structurelles

L'élément A_{ij} de la matrice d'adjacence d'un graphe permet d'indiquer si le sommet j se connecte au sommet i. Cependant, afin de répondre à des questions du genre quel est le sommet le plus important d'un graphe ou à quel point les sommets du graphe sont connectés en moyenne, nous effectuons des mesures sur les graphes. Étant donné un graphe simple non dirigé, nous définissons une observable [51] (ou mesure, propriété) structurelle comme une fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \{0,1\}^{\binom{N}{2}} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \mathcal{S}(A). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Un premier exemple trivial est l'observable retournant un élément de la matrice d'adjacence, soit $\mathcal{S}_E(A) = A_{jk}$. Deux autres exemples évidents d'observables sont les fonctions qui retournent le nombre d'arêtes et le nombre de sommets du graphe. Nous les notons respectivement $\eta : A \mapsto N$ et $\ell : A \mapsto M$. Dans la littérature, il est assez fréquent de confondre

4. Ici, il conviendrait de changer de notation pour éviter la confusion avec la matrice d'adjacence. Cependant, nous choisissons plutôt de conserver la notation A pour la matrice de connectivité et spécifier si les arêtes sont pondérées le cas échéant. Cela évitera d'introduire un nouveau symbole.

l'observable avec sa valeur. À quelques reprises, il nous arrivera de définir $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(A)$. Il existe une très grande quantité d'observables structurelles. Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur deux observables : les degrés et les valeurs propres de la matrice d'adjacence.

Degré

Le *degré entrant* k_i^{in} d'un sommet i est une fonction de la matrice d'adjacence qui renvoie le nombre de sommets connectés au sommet i, ce qui s'écrit

$$k_i^{\text{in}}(A) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \in \{0, 1, ..., N-1\}, \tag{1.3}$$

où A_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice d'adjacence non pondérée et de diagonale nulle (donc reliée à un graphe sans boucle). Au contraire, le *degré sortant*

$$k_j^{\text{out}}(A) = \sum_{i=1}^{N} A_{ij} \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{1.4}$$

représente le nombre de sommets i auquel j se connecte. Lorsque le graphe est non dirigé, la matrice d'adjacence est symétrique et il en résulte que

$$k_i(A) \equiv k_i^{\text{in}}(A) = k_i^{\text{out}}(A)$$

pour tout i, où k_i^{out} est défini par l'équation (1.4) avec le changement d'indice $i \leftrightarrow j$. [5]

Notons que le degré d'un sommet est une propriété *locale* (ou *microscopique*) du graphe. En effet, cette propriété est uniquement reliée aux voisins d'un seul sommet. Par voisin du sommet i dans un graphe non dirigé, nous entendons un élément du *voisinage* ∂i défini comme $\partial i = \{\, j \,|\, (i, j) \sim (j, i) \in \mathcal{E} \,\}$. Cette notation est inspirée de la topologie algébrique et de la géométrie différentielle où ∂O signifie la frontière de l'objet O. Nous en déduisons une relation entre le degré du sommet i et son voisinage, soit $k_i(A) = \#\partial i$.

> **Exemple 1.** À la figure 1.3, les distributions des degrés pour un graphe simple en (a) et deux réseaux complexes [(b) et (c)] sont illustrées. L'axe des ordonnées représente les comptes, c'est-à-dire le nombre de sommets du graphe possédant un certain degré k.

Pour caractériser le graphe de façon *globale* (ou *macroscopique*), nous pouvons utiliser la moyenne de la propriété locale d'intérêt. Par exemple, le degré moyen d'un graphe non dirigé sans boucle de matrice d'adjacence A est

$$\langle k(A) \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} k_i(A) = \frac{2M}{N-1}, \tag{1.5}$$

5. L'abus de notation $k_i \equiv k_i(A)$ est souvent commis pour simplifier la notation.

6. Les données ont été converties, arrangées puis partagées généreusement en privé par Mohammed Badhine qui a suivi la procédure du matériel supplémentaire de la Réf. [264]. Le graphe résultant est dirigé, non pondéré et tel que les sommets sont des neurones et les arêtes sont des synapses ou des jonctions communicantes.

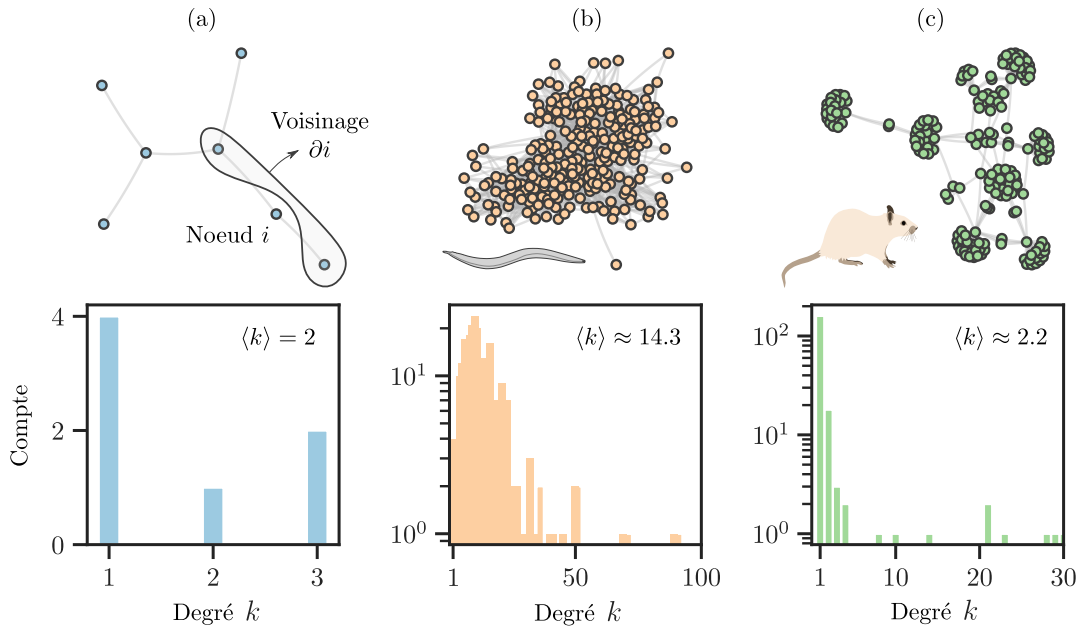


FIGURE 1.3 – (a) Distribution des degrés pour un graphe simple en arbre et schématisation du voisinage d'un sommet. (b) Distribution des degrés du réseau neuronal du ver hermaphrodite *C. elegans*, tiré de *2 Neuronal connectivity II, 2.1 Connectivity Data* du site *Wormatlas* [243]. [6] (c) Distribution des degrés du cortex visuel de la souris [voir Figure 1.1].

où le facteur 2 devant M est présent pour prendre en compte le fait que $A_{ij} = A_{ji}$ pour tout $(i, j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et donc que la somme sur tous les i, j compte en double le nombre d'arêtes M.

Spectre de valeurs propres

Chaque matrice d'adjacence possède un *spectre* qui lui est propre et qui est extrait de l'équation aux valeurs propres

$$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \tag{1.6}$$

où λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre $\boldsymbol{v}_i$. Nous pouvons ainsi définir une observable structurelle Λ_i telle que

$$\Lambda_i(A) = \frac{\boldsymbol{v}_i^\dagger A \boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{v}_i^\dagger \boldsymbol{v}_i} = \lambda_i.$$

Pour identifier les valeurs propres, il suffit de trouver les zéros du polynôme caractéristique

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_{N\times N} - A) = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \lambda^\ell, \tag{1.7}$$

où I est une matrice identité de taille $N \times N$ et $a_\ell \in \mathbb{R}$ puisque A est une matrice réelle. Puisque la matrice d'adjacence est de dimension $N \times N$, il y a N valeurs propres et N vecteurs propres. Les valeurs propres sont typiquement ordonnées selon leur module, c'est-à-dire telles que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_N|$. Le spectre de la matrice d'adjacence est alors noté

$\text{spec}(A) = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$. La *multiplicité* $\mathcal{M}$ d'une valeur propre λ est le nombre d'occurrences d'une certaine valeur propre λ du spectre, ce qui s'exprime comme

$$\mathcal{M}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda,\lambda_i}, \tag{1.8}$$

où δ est le delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$, sinon) et λ_i désigne la i-ème valeur propre de la matrice d'adjacence. La normalisation de la multiplicité par le nombre de valeurs propres de A, soit N, permet de définir la *densité spectrale* [240],

$$\rho(\lambda) = \frac{\mathcal{M}(\lambda)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda,\lambda_i}. \tag{1.9}$$

À la figure 1.4, trois densités spectrales sont illustrées : la densité d'un graphe simple en (a) et deux densités de réseaux réels en (b) et (c).

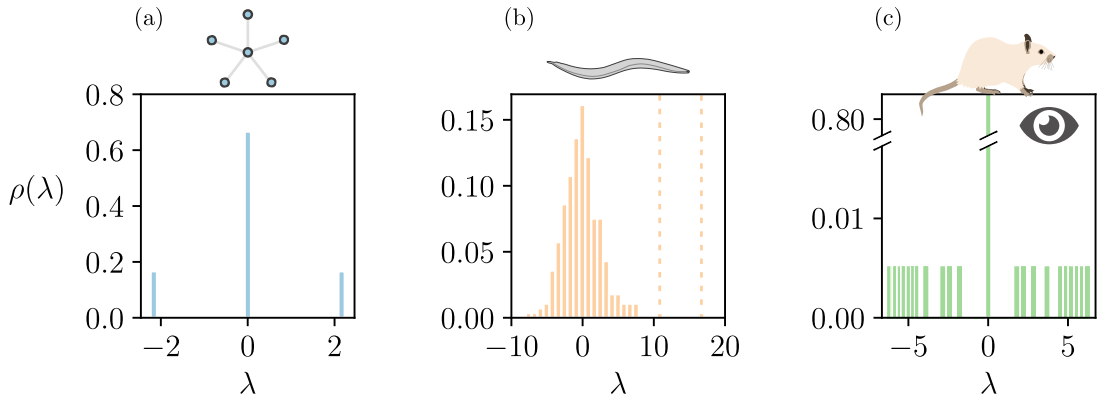


FIGURE 1.4 – (a) Densité spectrale (1.9) d'un graphe en étoile à $N = 6$ sommets (5 sommets en périphérie et un sommet central). (b) Partie réelle de la densité spectrale du réseau neuronal du *C. elegans* extraite des données de *Wormatlas* [243]. Les lignes verticales sont pour mettre en évidence les valeurs propres dominantes. (c) Densité spectrale du cortex visuel de la souris [voir Figure 1.1].

Exemple 2. Le graphe en étoile est un graphe dans lequel un sommet (le coeur) est connecté à N_f sommets en périphérie. Notons la matrice d'adjacence

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

En définissant le polynôme caractéristique $p_N \equiv p_{A_N}(\lambda) = \det(\lambda I_{N\times N} - A_N)$, une équation de récurrence apparaît, c'est-à-dire

$$p_N = \lambda p_{N-1} - \lambda^{N-2}. \tag{1.11}$$

Pour trouver les valeurs propres, nous voulons exprimer l'expression (1.11) en termes de λ uniquement. En substituant $p_{N-1} = \lambda p_{N-2} - \lambda^{N-3}$, puis $p_{N-3} = \lambda p_{N-3} - \lambda^{N-4}$, il est aisé d'inférer que $p_N = \lambda^k p_{N-k} - k\lambda^{N-2}$. En faisant la procédure $k = N-1$ fois et sachant que $p_1 = \det(\lambda I_{1\times 1} - A_1) = \det(\lambda - 0) = \lambda$, nous concluons que le polynôme caractéristique du graphe en étoile est

$$p_N = \lambda^{N-2}\left[\lambda^2 - (N-1)\right].$$

Le spectre de A_N correspond aux zéros de p_N. Par inspection, nous obtenons aisément

$$\mathrm{spec}(A_N) = (\sqrt{N-1}, -\sqrt{N-1}, \overbrace{0, ..., 0}^{N-2 \text{ fois}}),$$

où nous avons spécifié la multiplicité de la valeur propre 0, soit $\mathcal{M}(\lambda = 0) = N - 2$. À la figure 1.4 (a), l'étoile possède $N = 6$ sommets. Ainsi, il s'ensuit de l'équation (2) que

$$\mathrm{spec}(A_6) = (\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 0, 0, 0, 0),$$

où $\pm\sqrt{5} \approx \pm 2.2$, ce qui correspond bel et bien aux valeurs propres calculées numériquement à la figure 1.4 (a). De plus, $\rho(\sqrt{5}) = \rho(-\sqrt{5}) = 1/6 \approx 0.17$ et $\rho(0) = 4/6 \approx 0.67$, ce qui concorde aussi avec le résultat numérique de la figure 1.4 (a).

La ou les valeurs propres de plus grand module sont appelées les *valeurs propres dominantes*. Les valeurs propres de grand module, mais non du plus grand, sont des *valeurs propres sous-dominantes*. Similairement, les vecteurs propres associés aux valeurs propres dominantes et sous-dominantes sont des vecteurs propres dominants et vecteurs propres sous-dominants respectivement. Le théorème de Perron-Frobenius établit que pour une matrice non négative (incluant des zéros et des valeurs positives), il existe une seule valeur propre dominante positive λ_1 associée à un vecteur propre dominant non négatif [113, Chap. 8]. Au chapitre 3, cette caractéristique sera exploitée afin de définir des observables *dynamiques*. Le théorème spectral [113, Théorème 2.5.5] nous permet déjà de constater l'importance des valeurs propres dominantes : une matrice d'adjacence normale ($A^\dagger A = AA^\dagger$, ce qui est vrai entre autres pour un graphe non dirigé) se décompose en termes de ses N valeurs propres λ_i et de N vecteurs propres orthonormaux $\boldsymbol{u}_i$ comme

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\dagger.$$

Puisque les vecteurs propres sont normalisés, ce sont uniquement les valeurs propres qui déterminent la prépondérance de chaque terme dans la somme. Les valeurs propres dominantes seront donc des termes qui dominent dans la somme et qui caractérisent donc plus fortement la matrice d'adjacence.

À l'opposé, si des valeurs propres sont nulles, elles ne contribuent pas à la construction de la matrice d'adjacence. Les valeurs propres nulles fournissent tout de même de l'information sur la structure des graphes. En effet, si une matrice possède une valeur propre nulle, alors son

déterminant est nul [113]. Si le déterminant est nul, alors cela signifie que deux lignes sont identiques ou plus généralement, linéairement dépendantes. Le nombre de valeurs propres nulles s'écrit

$$\mathcal{M}(0) = N - \text{rang}(A),$$

où le rang de la matrice d'adjacence compte le nombre de lignes linéairement indépendantes. Si deux lignes sont linéairement dépendantes, alors deux sommets, i et j, peuvent partager le même voisinage, c'est-à-dire $\partial i = \partial j$.[7] Il est aussi possible que les voisinages des sommets i et j soient disjoints ($\partial i \cap \partial j = \varnothing$), mais que le voisinage d'un autre sommet k soit tel que $\partial k = \partial i \cup \partial j$. Ce genre de phénomène arrive fréquemment dans les réseaux réels [240].

Exemple 3. À la figure 1.4 (a), le rang de la matrice d'adjacence A_N (1.10) de l'étoile est 2, ce qui est vrai peu importe la taille de l'étoile. Il y a donc, comme mentionné précédemment, $\mathcal{M}(0) = N - \text{rang}(A_N) = N - 2$ valeurs propres nulles. Cela s'explique bien en observant le graphe en étoile. En effet, le voisinage de chaque sommet i de la périphérie est le coeur de l'étoile.

En regardant le spectre du réseau du cortex visuel de la souris 1.1, il est plus laborieux de déterminer les sommets possédant des voisinages communs. Toutefois, à vue d'oeil, il y a plusieurs groupes de sommets qui forment des étoiles. Il n'est donc pas sorcier d'observer des similarités entre le spectre du cortex visuel [figure 1.4 (c)] et le spectre de l'étoile [figure 1.4 (a)]. De plus, il y a 22 valeurs propres qui sont non nulles, ce qui correspond justement au rang de la matrice d'adjacence du cortex visuel. Puisqu'il y a $N = 193$ sommets, alors $\rho(\lambda = 0) = (193 - 22)/193 \approx 0.9$ et $\rho(\lambda \neq 0) = 1/193 \approx 0.005$, comme calculés numériquement à la figure 1.4 (c).

Finalement, la densité spectrale des valeurs propres réelles de *C. elegans* à la figure 1.4 (b) possède beaucoup moins de sommets avec des voisinages exactement identiques. En effet, le rang de sa matrice d'adjacence est 273, de sorte que $\rho(\lambda = 0) \approx 0.02$. Cependant, plusieurs sommets ont des voisinages similaires, ce qui est caractérisé par une densité élevée (> 0.15) pour un intervalle de valeurs propres autour de $\lambda = 0$.

Les densités spectrales illustrées à la figure 1.4 sont des cas plutôt simples de ce à quoi ressemblent les densités spectrales de réseaux réels. En effet, plusieurs réseaux réels sont dirigés et leur matrice d'adjacence possède généralement des valeurs propres complexes. C'est le cas des réseaux neuronaux par exemple.

Exemple 4. Il est difficile de mesurer l'ensemble des connexions neuronales dans le cerveau, soit le *connectome*. Le cerveau humain possède $\sim 10^{10}$ neurones et $\sim 10^{14}$ synapses, ce qui

7. Ce constat nous permet de réaliser que la multiplicité d'une valeur propre de A est directement reliée aux *automorphismes de graphe*, c'est-à-dire des permutations de sommets qui ne modifient pas la matrice d'adjacence. Les automorphismes permettent d'identifier des *symétries* dans les graphes [154, 155].

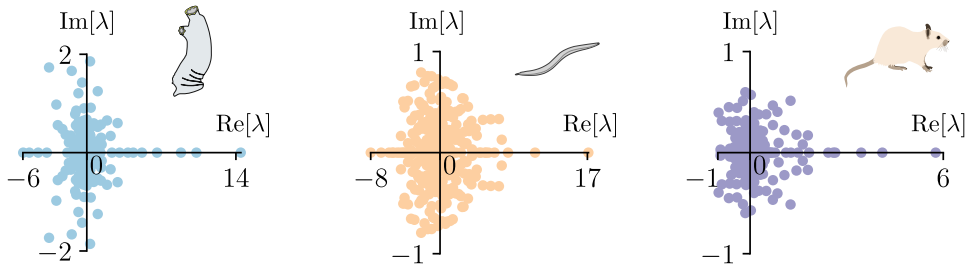


FIGURE 1.5 – (a) Spectre du connectome du *Ciona intestinalis* [215]. Le réseau est dirigé et pondéré. (b) Spectre du connectome du *C. elegans* [243]. Le réseau est dirigé et non pondéré (en raison du traitement des données). (c) Spectre du connectome mésoscopique de la souris [184]. Le réseau est dirigé et pondéré.

complexifie grandement l'identification des connexions. Il n'y a que pour le ver hermaphrodite *C. elegans* [243], la cione *Ciona intestinalis* au stade larvaire [215] et la mouche à fruits *Drosophila melanogaster* [222] que le connectome est connu. Il y a cependant beaucoup de progrès en ce qui concerne le connectome du poisson-zèbre, un poisson transparent au stade larvaire [123, 131]. Nous connaissons également le connectome mésoscopique de la souris [184]. À la figure 1.5, le spectre du connectome de la cione, du ver et de la souris est illustré dans le plan complexe. Il est intéressant de noter les valeurs propres dominantes se détachant du coeur du spectre de même que les symétries entre les valeurs propres autour de l'axe réel. Ces symétries sont une simple conséquence du fait que le complexe conjugué $\bar{\lambda}$ d'une valeur propre complexe λ d'une matrice réelle A est aussi une valeur propre de A. En effet, les propriétés de la conjugaison complexe, les coefficients réels du polynôme caractéristique p_A (1.7) et l'équation $p_A(\lambda) = 0$ impliquent que

$$p_A(\bar{\lambda}) = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \bar{\lambda}^\ell = \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \overline{(\lambda^\ell)} = \sum_{\ell=1}^{N} \overline{(a_\ell \lambda^\ell)} = \overline{\left(\sum_{\ell=1}^{N} a_\ell \lambda^\ell\right)} = \overline{p_A(\lambda)} = \bar{0} = 0$$

et donc $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. Le rôle des valeurs propres complexes dans la structure du réseau est toutefois encore mal compris même si quelques articles abordent le sujet [72, 88, 219].

1.1.3 Graphes aléatoires

Généralement, la structure en graphe d'un système complexe est imparfaitement définie. En effet, il est plutôt rare de connaître les connexions entre chaque paire de sommets. Cela est en partie causé par la difficulté à effectuer les mesures pour tout le système expérimentalement, mais aussi à répéter les expériences pour prendre en compte la variabilité dans les données [179]. Cela constitue un problème central en connectomique, une branche des neurosciences s'intéressant à l'identification des connexions entre les neurones (d'un connectome). Chez l'humain, la structure du cerveau est non seulement variable selon l'individu, mais varie aussi dans le temps au sein d'un même individu [153].

Même lorsque les connexions sont mesurées dans un réseau réel, elles ne sont pas *certaines* : elles sont soumises à une incertitude d'être présentes. C'est le cas par exemple lorsque nous voulons établir les liens d'amitié dans un réseau social. Bien que deux personnes interagissent, il n'est pas assuré qu'elles possèdent les mêmes critères pour qualifier une personne d'« ami(e) », ce qui fait que les arêtes dans le réseau n'ont pas nécessairement la même signification [179].

Une approche modeste pour modéliser un réseau réel est ainsi de considérer un certain niveau d'*aléatoire* dans les connexions d'un graphe. Autrement dit, plutôt que de fixer un seul graphe pour décrire la structure d'un réseau réel, un ensemble de graphes partageant des propriétés spécifiques du réseau réel est considéré. Cela permet ainsi d'avoir un modèle plus flexible (avec plus de variabilité) pour décrire la structure du réseau réel [153]. Dans cette sous-section, les *graphes aléatoires* sont introduits dans l'optique que ce qui est inconnu dans la structure ne peut pas être fixé avec certitude. Cette philosophie est répandue en physique statistique depuis les articles novateurs de Jaynes en 1957 [119, 120]. Nous aborderons ainsi les graphes aléatoires sous la perspective de la théorie des probabilités et de la théorie de l'information.

Définition et construction d'un ensemble

Soit l'ensemble de graphes non dirigés Ω contenant tous les graphes qui partagent le même ensemble de sommets $\mathcal{V} = \{1, ..., N\}$. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble puissance contenant tous les sous-ensembles de graphes de Ω. En définissant une mesure de probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, l'espace de probabilité de graphes [33] à N sommets s'écrit

$$\mathcal{G}(N) \equiv (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P),$$

où Ω est l'*univers* de l'espace de probabilité. Dans cet espace, un événement est donc un ensemble de graphes. Il est aussi standard dans la littérature d'utiliser *ensemble statistique* pour faire référence à cet espace de probabilité. Par souci de concision, nous parlerons plus souvent d'*ensemble de graphes* que d'*espace de probabilité de graphes*. Par exemple, l'univers Ω de l'ensemble $\mathcal{G}(3)$ est illustré à la figure 1.6.

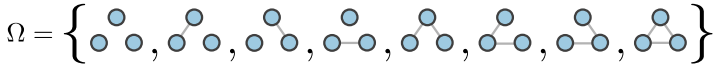


FIGURE 1.6 – Univers Ω de l'ensemble de graphes $\mathcal{G}(3)$.

Puisque tout graphe a son équivalent matriciel (sa matrice d'adjacence), $\mathcal{G}(N)$ est isomorphe à l'espace de probabilité de matrices d'adjacence $\mathcal{A}(N) = (\Omega_A, \mathcal{P}(\Omega_A), P_A)$ où l'univers est

$$\Omega_A = \left\{ a \in \{0, 1\}^{N^2} \,\middle|\, a_{ii} = 0 \wedge a_{ij} = a_{ji} \right\}.$$

La figure 1.7 illustre l'univers Ω_A de $\mathcal{A}(3)$.

Afin de calculer le nombre de graphes non dirigés dans ces ensembles, nous remarquons qu'ils ont au maximum $\binom{N}{2}$ arêtes et que le nombre de graphes à M arêtes est $\binom{\binom{N}{2}}{M}$. Il s'ensuit que

$$\Omega_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

FIGURE 1.7 – Univers Ω_A de l'ensemble de matrices $\mathcal{A}(3)$ où tous les éléments sont reliés un à un aux éléments de l'univers Ω de $\mathcal{G}(3)$ (figure 1.6).

la cardinalité de Ω (ou Ω_A) est

$$\#\Omega = \#\Omega_A = \sum_{M=1}^{\binom{N}{2}} \binom{\binom{N}{2}}{M} = 2^{\binom{N}{2}},$$

où la formule du binôme de Newton,

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^{N-k} y^k,$$

a été utilisée avec $x = 1$ et $y = 1$. Pour $\mathcal{G}(3)$ [et $\mathcal{A}(3)$], nous trouvons alors que $\#\Omega = 2^3 = 8$ ce qui avait déjà été établi en énumérant toutes les possibilités aux figures 1.6 et 1.7.

Une description alternative et équivalente d'un espace de probabilité est en termes de variables aléatoires. Informellement, une variable aléatoire est une fonction X dont les valeurs x dépendent des issues possibles $\omega \in \Omega$ d'une expérience aléatoire. De façon analogue, un *graphe aléatoire* G est défini comme une variable aléatoire dont les valeurs sont des graphes de l'ensemble de graphes $\mathcal{G}(N)$. Il s'ensuit une matrice aléatoire A reliée à G dont les matrices possibles a sont issues de $\mathcal{A}(N)$. Puisque A est une matrice aléatoire, toutes les observables structurelles, soient des fonctions de la matrice d'adjacence (sous-section 1.1.1), sont également des variables aléatoires. Il en résulte que les propriétés de l'ensemble de graphes seront souvent données par les observables structurelles moyennées sur l'ensemble [176].

Cela dit, pour construire un ensemble de graphes aléatoire, il faut spécifier la probabilité de tirer chaque graphe dans l'ensemble. Pour ce faire, nous adopterons une approche provenant de la théorie de l'information selon laquelle la probabilité est définie de telle sorte que l'ensemble de graphes soit maximalement entropique. Dans le contexte de la théorie des graphes, cette approche consiste à ne pas tenir pour acquises des informations qui ne sont pas connues sur un certain graphe observé (un réseau réel). Cela se traduit mathématiquement par la maximisation de l'entropie de Shannon et intuitivement, par la maximisation de notre ignorance. [8] Dans ce qui suit, nous présentons deux types d'ensembles de graphes maximalement entropiques.

8. Comme mentionné au début de cette sous-section, la philosophie derrière ce choix est expliquée plus en détail dans l'article de Jaynes paru en 1957 [120].

Ensembles de graphes contraints rigidement

Soit un graphe de référence non dirigé à N sommets de matrice d'adjacence a^*.[9] Nous définissons un espace de probabilité $\mathcal{A}(N) = (\Omega_A, \mathcal{P}(\Omega_A), P)$ dont chaque matrice d'adjacence $a \in \Omega_A$ est de probabilité non nulle et conserve exactement un certain nombre de propriétés de la matrice d'adjacence a^*. Les propriétés sont notées $\boldsymbol{r}(a^*)$ où $\boldsymbol{r}$ est une fonction de $\{0,1\}^{\binom{N}{2}} \to \mathbb{R}^{L'}$ où L' est le nombre d'observables structurelles considérées. Autrement dit, pour tout a de Ω_A,

$$\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(a^*).$$

Ces L' contraintes sont dites *rigides* puisqu'elles imposent aux graphes de l'espace de probabilité de respecter exactement les propriétés $\boldsymbol{r}$ de a^*. Par exemple, nous pouvons fixer le nombre d'arêtes en imposant que $\boldsymbol{r}(a) = \ell(a) = M$ [exemple 5]. Les contraintes rigides sont indépendantes de la probabilité P d'avoir un certain graphe. La seule contrainte sur P est donc la contrainte (triviale) de normalisation $\sum_{a\in\Omega_A} P(a) = 1$.

Pour calculer la probabilité de tirer un certain graphe, nous maximisons l'entropie de Shannon,

$$H(P(a)) = -\sum_{a\in\Omega_A} P(a) \ln P(a), \tag{1.12}$$

à l'aide de la fonction de Lagrange correspondante,

$$\mathcal{L}(P(a)) = -\sum_{a\in\Omega_A} P(a) \ln P(a) + \gamma \left(\sum_{a\in\Omega_A} P(a) - 1 \right),$$

où γ est un multiplicateur de Lagrange. En dérivant la fonction de Lagrange par rapport à la probabilité P et en l'égalisant à 0, la probabilité s'écrit $P(a) = e^{\gamma-1}$. Ensuite, en appliquant la contrainte de normalisation, le multiplicateur de Lagrange s'écrit comme $\gamma = \ln\left(\frac{1}{\#\Omega_A}\right) + 1$ et la probabilité est simplement

$$P(a) = \frac{1}{\#\Omega_A}. \tag{1.13}$$

La distribution de probabilité résultante est ainsi une distribution uniforme et l'espace de probabilité $\mathcal{A}(N)$ de la matrice d'adjacence est appelé un ensemble microcanonique, par analogie avec la physique statistique.

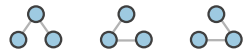
Exemple 5. L'un des modèles de graphes aléatoires les plus élémentaires est le modèle d'Erdős–Rényi $\mathcal{G}(N, M)$, dans lequel le nombre d'arêtes M des graphes de l'ensemble est fixé exactement avec la contrainte $\boldsymbol{r}(a^*) = \boldsymbol{r}(a) = M$. Puisque la contrainte est rigide, il suffit de compter le nombre de configurations en graphes (états) possibles pour trouver la probabilité uniforme $P(a)$. Si les graphes sont non dirigés et simples, il suffit de se demander combien il y a de façons de choisir M arêtes dans $\binom{N}{2}$ (le nombre maximum d'arêtes possibles). Il y

9. Cette matrice d'adjacence a^* est aussi appelée la matrice d'adjacence observée [51]. En effet, étant donné un graphe obtenu expérimentalement, nous pourrions vouloir définir un ensemble de graphes possédant des propriétés similaires à a^*.

en a

$$\#\Omega_A = \binom{\binom{N}{2}}{M}. \tag{1.14}$$

La probabilité d'obtenir un graphe à N sommets et M arêtes est alors donnée par la probabilité microcanonique (1.13) avec le nombre d'états (1.14). La figure 1.8 illustre l'univers du modèle de Erdős–Rényi $\mathcal{G}(3,2)$ où chaque graphe a une probabilité $1/3$ d'être observé.



$$\Omega_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

FIGURE 1.8 – Univers Ω_A du modèle de Erdős–Rényi $\mathcal{G}(3,2)$.

Ensembles de graphes contraints souplement

Un ensemble de graphes peut également être contraint de façon *souple*, c'est-à-dire que les caractéristiques d'une certaine matrice a^* sont respectées *en moyenne* :

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{s}(A)\right] = \sum_{a \in \Omega_A} \boldsymbol{s}(a) P(a) = \boldsymbol{s}(a^*), \tag{1.15}$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance sur Ω_A et $\boldsymbol{s}$ est une fonction de $\{0,1\}^{\binom{N}{2}}$ vers $\mathbb{R}^L$ où L est le nombre de contraintes souples (de propriétés à respecter en moyenne). Autrement dit, s_μ est une observable structurelle de a^* pour tout $\mu \in \{1, ..., q\}$.

Contrairement au cas des contraintes rigides, les contraintes souples (1.15) interviennent dans le calcul de maximisation de l'entropie (1.12) en raison de leur dépendance selon la probabilité P. En effet, la fonction de Lagrange est plutôt

$$\mathcal{L}(P(a)) = -\sum_{a \in \Omega_A} P(a) \ln P(a) + \gamma_0 \left(\sum_{a \in \Omega_A} P(a) - 1 \right) + \sum_{\mu=1}^{L} \gamma_\mu \left(\sum_{a \in \Omega_A} s_\mu(a) P(a) - s_\mu(a^*) \right),$$

où γ_μ correspond au multiplicateur de Lagrange relié à la propriété s_μ. En dérivant par rapport à P, en prenant $\mathcal{L}(P(a)) = 0$, puis en réarrangeant, la probabilité s'écrit $P(a) = e^{\gamma_0 - 1} e^{\sum_{\mu=1}^{l} \gamma_\mu s_\mu(a)}$. De plus, selon la contrainte de normalisation,

$$e^{1-\gamma_0} = \sum_{a \in \Omega_A} e^{\sum_{\mu=1}^{L} \gamma_\mu s_\mu(a)} \equiv Z(\gamma_1, ..., \gamma_L), \tag{1.16}$$

où Z est appelée la *fonction de partition*. Avec les contraintes (1.15), nous trouvons aussi l'équation

$$s_\mu(a^*) = \sum_{a \in \Omega_A} s_\mu(a) P(a) = \frac{\partial}{\partial \gamma_\mu} \ln Z(\gamma_1, ..., \gamma_L). \tag{1.17}$$

Cette dernière équation permet d'obtenir les multiplicateurs de Lagrange. Ainsi,

$$P(a) = \frac{1}{Z(\gamma_1, ..., \gamma_L)} e^{\sum_{\mu=1}^{L} \gamma_\mu s_\mu(a)}, \tag{1.18}$$

ce qui est la loi de probabilité de l'*ensemble canonique*. En raison de la forme exponentielle de la probabilité, les ensembles contraints souplement sont appelés des modèles de graphes aléatoires exponentiels (ERGM).[10] L'analogie avec la physique statistique est également directe. L'équation (1.18) est une distribution de Boltzmann où il y a correspondance entre les multiplicateurs de Lagrange et le bêta thermodynamique, $\beta = (k_B T)^{-1}$, où k_B est la constante de Boltzmann et T est la température.

Exemple 6. Le modèle de Gilbert, plus communément appelé le modèle de Erdős–Rényi [51, 176], est un modèle particulièrement simple d'ensemble souple de graphes [51]. Contrairement au modèle de Erdős–Rényi $\mathcal{G}(N, M)$, le nombre d'arêtes $\ell(a^*)$ est respecté en moyenne :

$$\mathbb{E}\left[\ell(A)\right] = \sum_{a \in \Omega_A} \ell(a) P(a) = \ell(a^*). \tag{1.19}$$

Puisque $\ell(a) = \sum_{i<j} a_{ij}$, la probabilité (1.18) et la fonction de partition (1.16) s'expriment comme

$$P(a) = \frac{e^{\gamma \sum_{i<j} a_{ij}}}{Z(\gamma)}, \text{ avec } Z(\gamma) = \sum_{a \in \Omega_A} e^{\gamma \sum_{i<j} a_{ij}},$$

où $i < j$ signifie $1 \leq i < j \leq N$ (les éléments triangulaires supérieurs, excepté la diagonale, de la matrice d'adjacence). La fonction de partition se simplifie comme suit :

$$Z(\gamma) = \sum_{a \in \Omega_A} \prod_{i<j} e^{\gamma a_{ij}} = \prod_{i<j} \left(\sum_{a_{ij} \in \{0,1\}} e^{\gamma a_{ij}} \right) = \prod_{i<j} (1 + e^{\gamma}) = (1 + e^{\gamma})^{M^{\max}}, \tag{1.20}$$

où le nombre d'arêtes maximum dans le graphe est défini comme $M^{\max} = \binom{N}{2}$. Il vaut la peine de décrire en mots la deuxième égalité de la dernière équation : la somme sur toutes les matrices d'adjacence de l'univers Ω_A des produits de $e^{\gamma a_{ij}}$ sur les arêtes est égale au produit sur les arêtes de la somme de $e^{\gamma a_{ij}}$ sur les deux valeurs possibles d'un élément A_{ij} de la matrice aléatoire, soit $a_{ij} = 0$ ou $a_{ij} = 1$. La probabilité d'avoir un graphe dans l'ensemble est ainsi

$$\begin{aligned} P(a) &= \prod_{i<j} \left[\frac{e^{\gamma}}{1 + e^{\gamma}} \delta_{a_{ij},1} + \left(1 - \frac{e^{\gamma}}{1 + e^{\gamma}} \right) \delta_{a_{ij},0} \right] \\ &= \prod_{i<j} \left[p\, \delta_{a_{ij},1} + (1 - p)\ \delta_{a_{ij},0} \right] \\ &= p^{\ell(a)} (1 - p)^{M^{\max} - \ell(a)}, \end{aligned}$$

où nous avons posé $p \equiv p(\gamma) = e^{\gamma}/(1 + e^{\gamma})$.

Notons désormais que la quantité p est contenue entre 0 et 1 pour tout γ et peut-être interprétée comme la probabilité qu'un sommet i soit connecté à un sommet j pour tout

10. ERGM en anglais, pour *Exponential Random Graph Model*.

$i, j \in \mathcal{V}$.[11] Autrement dit, pour un graphe donné dans l'ensemble, la probabilité que les sommets i et j soient connectés est $\text{Prob}(A_{ij} = 1) = p$ et la probabilité qu'ils ne soient pas connectés est $\text{Prob}(A_{ij} = 0) = 1 - p$. Le modèle de Gilbert est ainsi noté $\mathcal{G}(N, p)$, ce qui s'explique par le fait que N et p caractérisent les propriétés des graphes issus du modèle. Par exemple, avec les équations (1.19) et (1.5), l'espérance du nombre d'arêtes des graphes dans l'ensemble est

$$\mathbb{E}\left[\ell(A)\right] = \frac{\mathrm{d}\ln Z(\gamma)}{\mathrm{d}\gamma} = M^{\max} p = \binom{N}{2} p, \tag{1.21}$$

et que l'espérance du degré moyen des graphes dans l'ensemble est

$$\mathbb{E}\left[\langle k(A)\rangle\right] = \frac{2\mathbb{E}\left[\ell(a)\right]}{N-1} = Np.$$

Connaissant le nombre moyen d'arêtes $\mathbb{E}\left[\ell(A)\right]$ dans l'ensemble et l'expression (1.21), le multiplicateur de Lagrange s'écrit

$$\gamma = \ln\left(\frac{\mathbb{E}\left[\ell(A)\right]}{M^{\max} - \mathbb{E}\left[\ell(A)\right]}\right).$$

D'autres exemples intéressants de constructions de modèles de graphes aléatoires exponentiels sont donnés dans le livre de Coolen [51].

1.1.4 Graphes modulaires

Au sein du réseau du cortex visuel de la souris, nous pouvons y voir certains groupes de sommets en forme d'étoiles comme illustrés à la figure 1.9. Cette observation requiert une

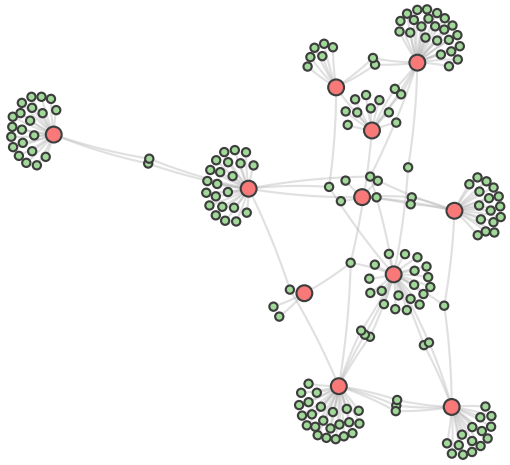


FIGURE 1.9 – Réseau du cortex visuel de la souris [voir Figure 1.1] où onze coeurs d'étoiles sont illustrés en rouge. Notons que le spectre nous donnait déjà une intuition sur le nombre d'étoiles. Pour une étoile, le spectre possède deux valeurs propres dominantes de signe opposé [figure 1.4 (a)]. Dans ce réseau, le spectre [figure 1.4 (c)] possède 22 valeurs propres dont les 11 pairs sont presque symétriques. Or, ce réseau est essentiellement une 11-étoiles où les étoiles sont connectées par les périphéries et les coeurs.

11. Il y a donc en effet un nouvel espace de probabilité défini sur les arêtes possibles du graphe.

analyse du réseau, non à l'échelle microscopique (des sommets) ni à l'échelle macroscopique (le réseau en entier), mais bien à l'échelle mésoscopique [du grec *μέσοζ* (« milieu ») et *σκοπέω* (« observer »)]. La structure à l'échelle mésoscopique d'un réseau est composée par des groupes de sommets qui partagent des propriétés similaires (ex. des groupes composés de sommets de même degré) ou une certaine structure en graphe (ex. des groupes d'étoiles comme à la figure 1.9). Ce constat est important pour la compréhension des systèmes complexes. En effet, *un réseau complexe est un assemblage de ses sous-graphes (ou motifs) dont le rôle est souvent fondamental dans les fonctions du système complexe* [81, 167].

Il n'y a toutefois pas de définition universelle de communautés dans un graphe [81]. Il est souvent dit qu'un graphe est *modulaire* ou qu'il possède une *structure communautaire*[12] si les sommets du graphe se divisent en sous-ensembles tels que le nombre d'arêtes dans chaque sous-ensemble (arêtes intra modulaires) est significativement différent[13] (typiquement plus élevé) que le nombre d'arêtes entre les sous-ensembles (arêtes extra modulaires) [51] .

Cependant, les communautés peuvent aussi être définies à partir des arêtes. En effet, la structure communautaire d'un graphe est parfois difficile à établir, car les sommets appartiennent à plusieurs communautés [75]. Dans un réseau social, les individus (sommets) ont plusieurs types d'interactions avec, par exemple, leur famille, leurs groupes d'amis, leur équipe sportive, etc. Une alternative possible est donc de définir les communautés du réseau avec les arêtes. Un individu ayant des interactions de différentes natures peut ainsi appartenir à plus d'une communauté [75]. Plutôt que de chercher à quels groupes appartient un individu, nous cherchons plutôt quelle est la nature des liens qu'il possède (est-ce un lien familial, amical, etc. ?) à partir de la structure du réseau. Dans une telle situation, il est alors plus naturel d'identifier les communautés du graphe [75].

Or, il y a plusieurs manières de définir, mais aussi de détecter les communautés. La détection de communautés est d'ailleurs une branche importante du domaine des systèmes complexes [81]. Cela n'est pas surprenant, puisque les communautés jouent un rôle souvent prédominant dans les systèmes complexes en sociologie (ex. établir les groupes d'amis), en politique (ex. départir les démocrates des républicains), en écologie (ex. déterminer les troupeaux), en neurosciences (ex. délimiter les régions fonctionnelles du cerveau), etc.

12. Dans ce mémoire, nous utiliserons les termes « modules », « communautés » et « blocs » comme des synonymes.

13. Par exemple, considérons un graphe dans lequel les sommets sont des joueurs de hockey de la Ligue nationale et les arêtes sont les passes que les joueurs se font dans une partie. Nous devrions alors nous attendre à pouvoir départir quels joueurs jouent ensemble, puisque les joueurs visent à faire des passes aux joueurs de leur équipe. Puisque ce sont des joueurs talentueux, ils réussiront normalement plus de passes à leurs coéquipiers qu'ils n'en ratent (passes interceptées par l'autre équipe).

Définition

Comme discuté précédemment, pour définir les graphes modulaires, il est important de spécifier quel type d'organisation communautaire le graphe possède. Dans la suite de ce mémoire, nous considérerons seulement les graphes dont les sommets sont identifiés à un seul groupe. Soit un graphe non dirigé $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ divisé en q parties (modules, communautés, groupes ou blocs) par une partition $\mathscr{B}$ des sommets dans $\mathcal{V}$. Cette partition s'écrit comme un ensemble ordonné,

$$\mathscr{B} = (B_1, ..., B_q), \tag{1.22}$$

où B_μ est l'ensemble des sommets du μ-ième bloc avec $\mu \in \{1, ..., q\}$. Pour que $\mathscr{B}$ soit une partition au sens strict, l'union des blocs doit recouvrir $\mathcal{V}$, c'est-à-dire $B_1 \cup ... \cup B_q = \mathcal{V}$, et les blocs doivent être mutuellement disjoints, c'est-à-dire que $B_\mu \cap B_\nu = \emptyset$ pour tout μ, ν tels que $\mu \neq \nu$. La taille de chaque bloc est notée $N_\mu \equiv \#B_\mu$, de telle sorte que $N = \sum_{\mu=1}^{q} N_\mu$. Pour associer un sommet à sa communauté, nous définissons la surjection $s : V \to \{1, ..., q\}$ de sorte que pour un sommet $i \in V$ pour lequel $s(i) = \mu$, , nous écrivons $i \in B_\mu$.

La partition $\mathscr{B}$ induit une partition $\mathscr{E}$ sur l'ensemble des arêtes $\mathcal{E}$. Plus explicitement, la partition des arêtes s'écrit

$$\mathscr{E} = (E_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu \leq \nu \leq q),$$

où $E_{\mu\nu} = \{e = (i, j) \in \mathcal{E} \mid i < j,\ \ i \in B_\mu,\ \ j \in B_\nu\}$ pour un graphe non dirigé sans boucle. Nous pouvons ainsi définir le nombre d'arêtes entre deux blocs comme $M_{\mu\nu} \equiv \#E_{\mu\nu}$ et le nombre d'arêtes maximum entre les blocs B_μ et B_ν est

$$M_{\mu\nu}^{\max} = \begin{cases} \binom{N_\mu}{2} & \text{si } \mu = \nu, \\ N_\mu N_\nu & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons qu'en partitionnant les sommets avec $\mathscr{B}$ puis en indiçant le graphe de sorte que $B_1 = \{1, ..., N_1\}, B_2 = \{N_1 + 1, N_1 + N_2\}$, etc., $E_{\mu\nu}$ définit des blocs dans la matrice d'adjacence, ce qui sera utile pour les prochains développements. Dans le même ordre d'idées, nous définissons l'observable structurelle $\ell_{\mu\nu} : A \mapsto M_{\mu\nu}$, soit la fonction qui compte les arêtes dans chaque module.

Exemple 7. Le graphe en étoile non dirigé [sous-section 1.1.2] avec N_f feuilles peut être partitionné en deux blocs de noeuds, $B_1 = \{1\}$ (le coeur) et $B_2 = \{2, ..., N\}$ (la périphérie). Ainsi, $\mathscr{B} = (B_1, B_2)$, $N_1 = 1$, $N_2 = N_f = \#B_2$ et les arêtes sont partitionnées en trois blocs E_{11}, E_{12} et E_{22} de sorte que $\mathscr{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{22})$. D'une part, pour $\mu = \nu$, nous avons $E_{11} = E_{22} = \varnothing$, car le coeur ne possède pas de boucle et les sommets en périphérie ne sont pas connectés entre eux. D'autre part, l'ensemble des arêtes entre le coeur et la périphérie

est $E_{12} = \{(1,2),(1,3),...,(1,N)\}$. La matrice d'adjacence est ainsi

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & ... & 1 \\ \hline 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & ... & 0 \end{array}\right),$$

où les lignes verticales et horizontales ont été insérées pour mieux identifier les blocs. Notons qu'il y a quatre blocs dans la matrice, mais les blocs 12 et 21 sont reliés par la transposition et donc trois blocs (11, 22 et 12) seulement contiennent l'information sur le réseau. De plus, nous avons que $M_{11} = M_{22} = 0$ et que $M_{12} = N_f = N_1 N_2 = M_{12}^{\max}$.

Comme mentionné à la section précédente 1.1.3, il est pertinent de considérer les graphes aléatoires pour modéliser un réseau dont les propriétés ne sont pas complètement connues. Il est ainsi intéressant de définir un ensemble de graphes dont la structure en communauté est connue, mais pas tous les détails au niveau local (des sommets). Dans cette perspective, à la prochaine sous-section, nous introduisons le modèle stochastique par blocs, un ensemble de graphes modulaires. Sans entrer dans les détails, il est intéressant de souligner que le modèle stochastique par blocs a fait ses preuves quant à son utilité en neurosciences [26, 153] et en sociologie [111], ce qui s'explique en partie par sa (quasi-)universalité [267].

Modèle stochastique par blocs

Soit l'ensemble $\mathcal{G}(N)$ de graphes simples, non dirigés et modulaires. Considérons de plus que la partition $\mathscr{B}$ (1.22) des sommets des graphes est connue dans $\mathcal{G}(N)$. Le *modèle stochastique par blocs*[14] est un ensemble maximalement entropique généralisant le modèle de Gilbert à des graphes modulaires [51]. Pour rendre l'ensemble maximalement entropique, le nombre d'arêtes *dans chaque communauté* d'un graphe dans l'ensemble doit être en moyenne le même qu'un certain graphe de référence de matrice d'adjacence a^*. Plus précisément, sachant que

$$\ell_{\mu\nu}(a^*) = \sum_{i<j} a^*_{ij} \delta_{\mu s(i)} \delta_{\nu s(j)}, \quad \mu, \nu \in \{1, ..., q\},$$

il y a q^2 contraintes souples définies par les équations

$$\mathbb{E}\left[\ell_{\mu\nu}(a)\right] = \sum_{a \in \Omega_A} \ell_{\mu\nu}(a) P(a) = \ell_{\mu\nu}(a^*).$$

Pour simplifier les calculs, nous considérerons également que $\mathbb{E}\left[\ell_{\mu\nu}(A)\right] = \mathbb{E}\left[\ell_{\nu\mu}(A)\right]$. Il y aura alors $\binom{q}{2}$ contraintes redondantes. Cette symétrie implique aussi que les multiplicateurs de Lagrange $\gamma_{\mu\nu}$ associés à chaque contrainte sont tels que $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$. Dans un tel cas, l'équation

14. Plus précisément, c'est le modèle stochastique par blocs *souple* qui est défini dans cette sous-section. Il y a en réalité plusieurs modèles stochastiques par blocs [267].

de la probabilité canonique (1.18) est

$$P(a) = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\gamma})} e^{\sum_{\mu,\nu=1}^{q} \gamma_{\mu\nu} \left(\sum_{i<j} a_{ij} \delta_{\mu s(i)} \delta_{\nu s(j)} \right)} = \frac{1}{Z(\boldsymbol{\gamma})} e^{\sum_{i<j} \gamma_{s(i)\, s(j)} a_{ij}},$$

où $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{\mu\nu} \,|\, 1 \leq \mu \leq \nu \leq q)$ et la fonction de partition (1.16) est

$$Z(\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{i<j} (1 + e^{\gamma_{s(i)\, s(j)}}). \tag{1.23}$$

La probabilité se simplifie alors à

$$\begin{aligned} P(a) &= \prod_{i<j} \left[\frac{e^{\gamma_{s(i)\, s(j)}}}{1 + e^{\gamma_{s(i)\, s(j)}}} \delta_{a_{ij},1} + \left(1 - \frac{e^{\gamma_{s(i)\, s(j)}}}{1 + e^{\gamma_{s(i)\, s(j)}}} \right) \delta_{a_{ij},0} \right] \\ &= \prod_{i<j} \left[p_{s(i)\, s(j)}\, \delta_{a_{ij},1} + \left(1 - p_{s(i)\, s(j)} \right) \delta_{a_{ij},0} \right] \\ &= \prod_{\mu \leq \nu} p_{\mu\nu}^{\ell_{\mu\nu}(a)} (1 - p_{\mu\nu})^{M_{\mu\nu}^{\max} - \ell_{\mu\nu}(a)}, \end{aligned}$$

où la quantité $p_{\mu\nu} = \frac{e^{\gamma_{\mu\nu}}}{1+e^{\gamma_{\mu\nu}}}$ a été posée. De façon analogue au modèle de Gilbert, $p_{\mu\nu}$ est compris entre 0 et 1 pour tout $\mu, \nu \in \{1, ..., q\}$. Ainsi, la quantité $p_{\mu\nu}$ peut-être interprétée comme la probabilité qu'un sommet $i \in B_\mu$ soit connecté à un sommet $j \in B_\nu$. Plus spécifiquement, si $\mu = \nu$, $p_{\mu\nu}$ est la probabilité qu'un sommet soit connecté à un autre sommet à l'intérieur de sa communauté B_μ et si $\mu \neq \nu$, $p_{\mu\nu}$ est la probabilité qu'un sommet soit connecté en dehors de sa communauté. Puisque $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$, alors $p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu}$. Le regroupement de ces probabilités dans l'ensemble ordonné

$$\mathscr{P} = \left(p_{\mu\nu} \in [0,1] \,\middle|\, 1 \leq \mu \leq \nu \leq q \right),$$

permet de définir le modèle stochastique par blocs de façon concise.

En effet, le modèle stochastique par blocs est caractérisé entièrement par une partition des sommets $\mathscr{B}$ et un ensemble de probabilités $\mathscr{P}$. Conséquemment, ce modèle est noté SBM($\mathscr{B}$, $\mathscr{P}$) où l'abréviation SBM est pour *Stochastic Block Model*. Par souci de concision, nous utiliserons l'abréviation SBM pour parler du modèle stochastique par blocs SBM($\mathscr{B}$, $\mathscr{P}$). Avec la fonction de partition (1.23), l'espérance du nombre d'arêtes des graphes dans l'ensemble répond à l'équation

$$\mathbb{E}\left[\ell(A)\right] = \frac{\partial \ln Z(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \sum_{\mu \leq \nu} M_{\mu\nu}^{\max} p_{\mu\nu}.$$

De plus, en prenant l'espérance de l'équation (1.5), il en découle une formule simple décrivant l'espérance du degré moyen des graphes dans l'ensemble [266], soit

$$\mathbb{E}\left[\langle k(A) \rangle\right] = \frac{2}{N-1} \sum_{\mu \leq \nu} M_{\mu\nu}^{\max} p_{\mu\nu}.$$

Soulignons que lorsque $q = 1$, nous retombons directement sur le modèle de Gilbert $\mathcal{G}(N, p)$ et ses propriétés. De plus, sans entrer dans les détails, le SBM possède des propriétés spectrales

très intéressantes qui seront abordées au chapitre 3. Notons aussi que Nadakuditi, Newman, Zhang et Peixoto ont publié une série impressionnante d'articles en 2012 [173], 2013 [174, 195], 2014 [268] et 2019 [180, 181] permettant de calculer la densité de valeurs propres pour le SBM, mais aussi pour d'autres modèles de graphes. Cela dit, soit A la matrice d'adjacence aléatoire associée au SBM. Celle-ci peut-être écrite comme [233]

$$A = \mathbb{E}[A] + (A - \mathbb{E}[A]) \equiv \mathbb{E}[A] + X,$$

où $\mathbb{E}[A]$ est une matrice symétrique $N \times N$ déterministe (non aléatoire) et $X \equiv A - \mathbb{E}[A]$ est une matrice symétrique $N \times N$ aléatoire de moyenne nulle [233]. La matrice $\mathbb{E}[A]$ sera appelée la matrice moyenne du SBM et nous la noterons $\langle A \rangle_{\text{SBM}}$. Puisque les éléments A_{ij} de la matrice d'adjacence aléatoire sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées [15], les éléments de $\langle A \rangle_{\text{SBM}}$ sont

$$\mathbb{E}[A_{ij}] = \sum_{a_{ij} \in \{0,1\}} a_{ij} p_{s(i)s(j)} = p_{s(i)s(j)},$$

où $p_{s(i)s(i)} = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, car les boucles ne sont pas admises dans le SBM défini précédemment. À moins d'avis contraire, pour simplifier les démarches, nous considérerons désormais un cas particulier du SBM où le nombre de communautés est $q = 2$. De plus, nous imposons que $p_{11} = p_{22} = p_{\text{in}}$ (« in » pour intra communauté) et $p_{12} = p_{21} = p_{\text{out}}$ (« out » pour extra communauté). La matrice moyenne s'écrit ainsi comme

$$\langle A \rangle_{\text{SBM}} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & p_{\text{in}} & \cdots & p_{\text{in}} & p_{\text{out}} & \cdots & \cdots & p_{\text{out}} \\ p_{\text{in}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{\text{in}} & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{\text{in}} & \cdots & p_{\text{in}} & 0 & p_{\text{out}} & \cdots & \cdots & p_{\text{out}} \\ \hline p_{\text{out}} & \cdots & \cdots & p_{\text{out}} & 0 & p_{\text{in}} & \cdots & p_{\text{in}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & p_{\text{in}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & p_{\text{in}} \\ p_{\text{out}} & \cdots & \cdots & p_{\text{out}} & p_{\text{in}} & \cdots & p_{\text{in}} & 0 \end{array}\right). \tag{1.24}$$

Il est intéressant de noter que la matrice moyenne définit complètement le SBM étant donné qu'elle spécifie la partition et les probabilités. Du chapitre 1 au chapitre 3, nous utiliserons la matrice moyenne du SBM pour étudier la synchronisation de dynamiques sur des graphes modulaires. Avant d'en arriver là, il faut désormais introduire le deuxième visage des systèmes complexes : la dynamique.

15. En effet, la probabilité d'avoir une arête particulière est indépendante de la probabilité d'avoir une autre arête.

1.2 Dynamique

Les systèmes complexes sont généralement des systèmes dynamiques. Les systèmes dynamiques possèdent quelque chose de très tangible intellectuellement, en ce sens que tous peuvent donner des exemples de ce que représentent de tels systèmes dont les composantes sont en mouvement dans le temps. En effet, nous avons tôt fait d'observer des *objets*[16] de toutes sortes dont la position évolue temporellement, comme une bille tombant au sol, la rotation d'une aiguille sur une horloge ou *Road Runner* qui file à toute vitesse au grand malheur de *Wile E. Coyote*. Avant d'aborder la dynamique d'un système complexe, nous introduisons les concepts fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques afin de bien établir la terminologie et les outils mathématiques que nous utiliserons dans cet ouvrage.

1.2.1 Définition mathématique

Pour décrire mathématiquement de tels mouvements, le paramètre de temps $t \in \mathscr{T}$ est d'abord défini où $\mathscr{T}$ est un intervalle de temps réel. Au concept de temps s'ajoute la notion d'*espace des états (ou des phases)* $\mathscr{X}$, soit l'espace dans lequel l'objet se déplace. Formellement, c'est une variété, c'est-à-dire un espace topologique[17] qui ressemble localement à un espace euclidien de dimension D. Deux exemples utilisés dans ce mémoire sont $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^D$ et $\mathscr{X} \subset \mathbb{C}^D$. Chaque état[18] $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ est alors représenté par D coordonnées dans cet espace et s'écrit $\boldsymbol{x} = (x^1\, x^2\, \ldots\, x^D)^T$. Étant donné l'importance de la notion de dimension aux chapitres 2 et 3, nous utiliserons souvent la notation $\mathscr{X}_D$ pour désigner l'espace des états de dimension D.

Afin de décrire l'évolution de l'objet dans l'espace et le temps, définissons la fonction lisse

$$\begin{aligned} \phi : \mathscr{T} \times \mathscr{X} &\to \mathscr{X} \\ (t, \boldsymbol{x}) &\mapsto \phi_t(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{1.25}$$

où la notation $\phi_t(\boldsymbol{x}) \equiv \phi(t, \boldsymbol{x})$ a été introduite. Cette fonction respecte deux propriétés :

$$\begin{aligned} &i.\ \phi_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}; \\ &ii.\ \phi_t \circ \phi_s(\boldsymbol{x}) = \phi_{t+s}(\boldsymbol{x}), \quad \forall s, t \in \mathscr{T} \text{ et } \boldsymbol{x} \in \mathscr{X}. \end{aligned}$$

Soit $(\mathscr{T}, +)$, un groupe commutatif (abélien) pour les temps t [ex. $(\mathbb{R}, +)$]. Alors, la fonction ϕ définie par l'équation (1.25) et les conditions *i.-ii.* est l'action du groupe $(\mathscr{T}, +)$ sur l'espace des phases $\mathscr{X}$. De plus, considérons $\mathscr{G}$, l'ensemble des fonctions ϕ_t. La structure en groupe commutatif du temps et les propriétés *i.-ii.* impliquent : (1) l'existence d'un élément neutre ϕ_0 tel que $\phi_0 \circ \phi_t = \phi_t$, (2) une fonction inverse ϕ_{-t} pour tout ϕ_t telle que $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0$, (3) la

16. Nous utiliserons fréquemment le terme générique *objet* pour désigner la chose en mouvement (ex. bille, aiguille, etc.) ou des quantités plus abstraites qui varient dans le temps (ex. la température moyenne planétaire, le potentiel électrique d'un neurone, les fluctuations du marché boursier, etc.).
17. Typiquement, l'espace topologique $(\mathscr{X}, \tau)$ est muni de la topologie métrique standard τ.
18. Nous utiliserons aussi les termes « position » et « point » pour parler d'un état $\boldsymbol{x}$.

fermeture, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \in \mathscr{G}$ puisque $t + s \in \mathcal{T}$ et (4) que la composition de fonctions $\circ$, en plus d'être associative, est une opération commutative, puisque $t+s = s+t$. Ainsi, l'ensemble des flots ϕ_t avec $t \in \mathbb{R}$ forme un groupe commutatif $\mathscr{G}$ avec la composition de fonctions comme loi de composition [197].

Cela dit, la façon qu'un objet se déplace dans l'espace des phases dépend généralement de certains *paramètres dynamiques* qui lui sont reliés. Soit Γ un ensemble de paramètres dynamiques associés au mouvement du système. Alors, il y aura un flot associé à chaque ensemble de paramètres, de sorte que pour être plus précis, nous écrirons parfois ϕ^Γ.

L'évolution temporelle d'un objet à partir d'un point $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{X}$ au temps $t = 0$ est appelée *trajectoire* sur $\mathscr{X}$ et est notée $\boldsymbol{y}$. Une trajectoire est régie par la fonction d'évolution ϕ_t de telle sorte que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} : \mathscr{T} &\to \mathscr{X} \\ t &\mapsto \boldsymbol{y}(t) \equiv \phi_t(\boldsymbol{x}_0). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}_0$ puisque ϕ_0 est l'élément neutre du groupe abélien $\mathscr{G}$. Notons ici que la trajectoire $\boldsymbol{y}$ est une fonction (et appartient donc à un espace de fonctions) contrairement au point $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ défini précédemment. De plus, pour $t \in \mathcal{T}$, l'ensemble de fonctions ϕ_t telles que $\phi_t(\boldsymbol{x}_0) = \phi(t, \boldsymbol{x}_0)$ s'appelle le *flot* [197].

Étant donné un flot $\phi_t(\boldsymbol{x}_0)$, il est intéressant de se demander quelle règle a régi le mouvement du système depuis la condition initiale $\boldsymbol{x}_0$. Le flot permet généralement de définir un champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ tel que

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \left.\frac{\mathrm{d}\phi(t, \boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \tag{1.26}$$

où $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ et la notation $\phi(t, \boldsymbol{x})$ est ici privilégiée pour expliciter la dépendance du flot par rapport au temps [197]. Le champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ attribue donc à chaque point de l'espace des phases $\mathscr{X}$ une direction selon laquelle la trajectoire $\boldsymbol{x}$ est soumise. Les deux dernières définitions peuvent être résumées par le diagramme de composition suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, "\boldsymbol{y}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{y}"'] & \mathscr{X} \arrow[d, "\boldsymbol{F}"] \\ & \mathbb{R}^D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto, "\boldsymbol{y}"] & \boldsymbol{x} \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{F}"] \\ & F(\boldsymbol{x}) \end{tikzcd}$$

La trajectoire $\boldsymbol{y}$ doit ainsi obéir à l'équation différentielle

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}), \tag{1.27}$$

et à la condition initiale

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{1.28}$$

Le système d'équations (1.27-1.28) est parfois appelé un *problème aux conditions initiales* [197] ou un problème de Cauchy. Dans ce mémoire, les systèmes étudiés sont *autonomes*, c'est-à-dire que $\boldsymbol{F}$ ne possède pas de dépendance explicite par rapport au temps. Par abus de langage, mais par souci de concision, nous appellerons le système d'équations différentielles (1.27) une *dynamique*. De plus, la *solution* au système d'équations différentielles (1.27) est notée $\boldsymbol{y}(t)$ et nous appellerons *courbe* ou *orbite* au travers de $\boldsymbol{x}_0$, l'ensemble des points dans le temps d'une solution $\boldsymbol{y}(t)$ [197], c'est-à-dire

$$\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0} = \{\ \boldsymbol{y}(t) \in \mathscr{X} \mid \boldsymbol{y}(t) = \phi_t(\boldsymbol{x}_0) \text{ et } t \in \mathscr{T}\ \}. \tag{1.29}$$

Nous noterons une trajectoire quelconque $\mathcal{O}$. La figure 1.10 schématise les quantités introduites ci-haut. Une trajectoire $\boldsymbol{y}$ sur $\mathscr{X}$ depuis $\boldsymbol{x}_0$ y est illustrée en (a) de même que le champ vectoriel contraignant (transportant) cette trajectoire $\boldsymbol{y}$ en (b). En somme, un *système dynamique* est un doublet $(\mathscr{X}, \phi)$ où le flot respecte les conditions mentionnées ci-dessus.

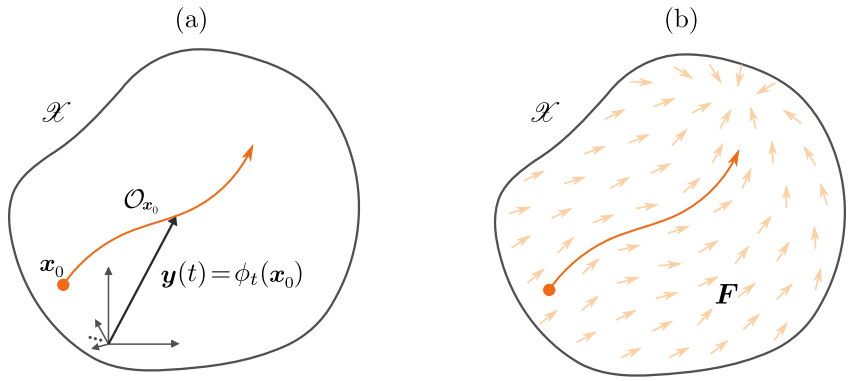


FIGURE 1.10 – Illustration de quelques notions reliées aux systèmes dynamiques. (a) Courbe $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0}$ sur $\mathscr{X}$ paramétrée par la trajectoire (fonction de paramétrage) $\boldsymbol{y}$. (b) Champ vectoriel $\boldsymbol{F} : \mathscr{X} \subset \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$.

Exemple 8. Pour mettre en place ces dernières définitions, il est utile de considérer le cas de l'*oscillateur harmonique*, qui modélise le mouvement d'une particule de masse m reliée par un ressort dans des conditions sans frottement. La particule est à la position $x(t) \in \mathbb{R}$ à un temps t et elle est soumise à une force conservative $\mathcal{F}(x) = -kx$ où k est une constante de rappel reliée au ressort. Autrement dit, $\mathcal{F}(x)$ est la force qui ramène la particule vers son point d'équilibre lorsque celle-ci est déplacée (et donc que le ressort est étiré ou compressé). De la deuxième loi de Newton, $\mathcal{F}(x) = m\ddot{x}$ et ainsi, une équation différentielle homogène du deuxième ordre est obtenue, soit $\ddot{x} = -\omega^2 x$ où $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la fréquence naturelle (ou la vitesse angulaire) de l'oscillateur. En posant $v = \dot{x}$, la dynamique s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\omega^2 x. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Ce système d'équations est donc de la forme (1.27) avec $\boldsymbol{y} = (x \quad v)^T$ et $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = (v \quad -\omega x)^T$. De plus, l'espace des états est $\mathscr{X} = \mathbb{R}^2$ et l'ensemble des paramètres dynamiques est $\Gamma = \{\omega\}$.

Finalement, la solution de la dynamique (1.30) est $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ où $\varphi \in \mathbb{R}$ est une phase.

Les définitions introduites précédemment sont reliées à la modélisation mathématique d'un problème dans lequel un objet est en mouvement. En effet, un système dynamique définit un *modèle mathématique* d'un système réel. Mais qu'en est-il des *expériences* réelles impliquant des mesures de l'état d'un objet dans le temps ? Est-ce que le modèle mathématique est valide pour décrire des cas réels ? La réponse à cette question est non triviale, car elle nécessite une comparaison idéalement quantitative du modèle avec l'expérience. L'objectif de ce mémoire ne sera pas de répondre à une telle question. Nous utiliserons des modèles connus qui ont déjà fait leurs preuves pour décrire des expériences réelles. Puisque nous analyserons mathématiquement les systèmes dynamiques, nous voulons tout de même comparer nos résultats avec une autre méthode pour valider nos analyses.

Pour ce faire, nous aurons parfois recours à des méthodes numériques. Entre autres, les intégrateurs numériques solutionnant l'équation (1.27) sont particulièrement utiles. [19] Ceux-ci permettent d'extraire des *séries temporelles* sur un certain domaine de temps, qui sont en fait les *solutions numériques* à l'équation (1.27). Plus précisément, une *série temporelle* est une séquence de valeurs temporelles $(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_T)$ telle que T est la longueur de la séquence et $\boldsymbol{x}_i$ est l'état mesuré au temps $i \in \{1, ..., T\}$. L'ensemble des points d'une série temporelle est donc l'analogue discret à l'orbite (1.29). Nous utiliserons les séries temporelles à plusieurs reprises pour valider nos résultats analytiques, surtout au chapitre 3.

1.2.2 Analyse dynamique

Il existe une grande variété de systèmes dynamiques *non linéaires*, c'est-à-dire dont le champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ qui leur est associé est une fonction non linéaire. Les dynamiques des oscillateurs anharmoniques, des pendules, des lasers, des neurones, des populations prédateurs-proies en sont quelques exemples. La non-linéarité de ces systèmes fait en sorte que la solution à l'équation différentielle (1.27) est généralement difficile (voire impossible) à obtenir analytiquement avec les méthodes standards de résolution d'équations différentielles. Malgré tout, il se trouve qu'une intuition profonde du comportement des trajectoires s'acquiert en analysant les propriétés de son champ vectoriel $\boldsymbol{F}$. C'est le cas, entre autres, des zéros $\boldsymbol{x}^*$ du champ vectoriel, appelés des *points d'équilibre*. En linéarisant $\boldsymbol{F}$ autour de chacun de ces points d'équilibre, il en résulte un système linéaire qui caractérise le comportement *local* du système dynamique. En identifiant le comportement local pour tous les points d'équilibre dans l'espace des phases du système dynamique, il est parfois possible de retracer son portrait global pour en dégager une description qualitative des trajectoires dans l'espace des états [230].

Plus explicitement, un point $\boldsymbol{x}^* \in \mathscr{X}$ est appelé *point d'équilibre* s'il correspond à un zéro du

19. Nous n'entrerons pas dans les détails de l'intégration numérique. Un livre d'introduction utile à ce sujet est la référence [178]. Voir aussi l'annexe A.

champ vectoriel :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = 0.$$

En linéarisant la dynamique, c'est-à-dire en développant au premier ordre le champ vectoriel $\boldsymbol{F}$ autour du point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$, nous dégageons l'approximation

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*),$$

où $\left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}$ est la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$. Nous noterons la matrice jacobienne $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ pour simplifier la notation. Soit $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}^*$, une trajectoire $\boldsymbol{\varepsilon}$ très près du point d'équilibre. La dynamique non linéaire initiale (1.27) s'écrit alors sous la forme du système linéaire

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)\, \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Cela explique en partie l'importance des systèmes linéaires : même les systèmes non linéaires se rapportent localement à des systèmes linéaires. [20] La solution à cette équation est [197]

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = e^{t\, J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)} \boldsymbol{\varepsilon}(0).$$

La *stabilité locale* des points d'équilibre nous permet de déterminer si une trajectoire est attirée (point d'équilibre stable) ou repoussée par le point d'équilibre (point d'équilibre instable). Intuitivement, la stabilité d'un point d'équilibre permet d'évaluer si les lignes de champ vectoriel pointent vers ou à l'encontre du point d'équilibre. Par exemple, à la figure 1.10 (b), il est facile de voir que la trajectoire tend vers un point d'équilibre stable en regardant les lignes de champ. Il est aussi possible qu'un point d'équilibre soit semi-stable, c'est-à-dire que certaines lignes de champ pointent vers le point alors que d'autres pointent à l'encontre de celui-ci. Dans le livre de Strogatz [230, Chap. 4, p.138], un schéma très utile catégorise la nature des points d'équilibre. Par ailleurs, les points d'équilibre dépendent des paramètres dynamiques de Γ. En changeant les paramètres dynamiques, la nature des points d'équilibre peut être modifiée, de sorte qu'une *bifurcation* se produit. Pour plus de détails sur les bifurcations, voir la Réf. [230]. En traçant les points d'équilibre selon un paramètre dynamique, il y a des branches dont la stabilité dépend de la stabilité des points d'équilibre qui les composent.

Pour analyser mathématiquement la stabilité locale des points d'équilibre dans un système dynamique non linéaire, il est parfois suffisant d'étudier les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice jacobienne $J_{\boldsymbol{F}}$. Si toutes les valeurs propres de $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ sont négatives, alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ est stable. Au contraire, si toutes les valeurs propres de $J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)$ sont positives, alors le point d'équilibre $\boldsymbol{x}^*$ est instable. Lorsqu'il y a des valeurs propres positives et négatives, le point d'équilibre est semi-stable. De plus, les valeurs propres peuvent être imaginaires, ce qui complexifie et enrichit encore davantage l'analyse dynamique. Le cas des systèmes dynamiques possédant des valeurs propres imaginaires est très spécial, puisque ces systèmes peuvent posséder des trajectoires qui *oscillent*.

20. Cela est une conséquence du théorème de Hartman-Grobman [98, 197].

1.2.3 Oscillateurs

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons principalement aux *oscillateurs*. Le pendule d'une horloge grand-père faisant un mouvement de va-et-vient est un exemple intuitif de ce qu'est un oscillateur. En neurosciences, le potentiel électrique d'un neurone peut osciller lorsque celui-ci est soumis à un courant électrique externe. Similairement, le potentiel électrique du coeur oscille, ce qui permet des battements répétés. En écologie, il y a des oscillations dans les populations de prédateurs et de proies. Les oscillations sont ainsi de diverses origines, mais s'étudient malgré tout avec des techniques similaires.

Mathématiquement, un objet est un oscillateur lorsqu'il existe une solution à l'équation différentielle (1.27) qui est périodique dans le temps. Autrement dit, la dynamique (1.27) est *oscillatoire* s'il existe une orbite périodique au système pour un certain ensemble Γ de paramètres dynamiques.[21] De plus, une solution est appelée *orbite périodique* ou *cycle* si et seulement si pour tout $t \in \mathscr{T}$,

$$\phi_{t+T}(\boldsymbol{x}_0) = \phi_t(\boldsymbol{x}_0), \tag{1.31}$$

pour un certain $T > 0$ [197]. La condition (1.31) s'écrit aussi comme $\boldsymbol{y}(t+T) = \boldsymbol{y}(t)$. La quantité T est la *période* de l'oscillation (de l'orbite) si c'est la plus petite valeur réelle positive telle que l'équation (1.31) est respectée [197].[22]

Comme mentionné à la sous-section précédente, il est possible de déterminer la nature d'un point d'équilibre à partir de la matrice jacobienne issue de la linéarisation de la dynamique. L'analyse linéaire permet de prouver ou de procurer une intuition sur l'existence de cycles à partir des valeurs propres de la matrice jacobienne. Dans ce qui suit, deux exemples de cycles sont donnés, soit les centres et les cycles limites.

Centre

Si les valeurs propres de la matrice jacobienne sont purement imaginaires, le point d'équilibre est un *centre linéaire*. Il faut toutefois être prudent lorsque la dynamique est non linéaire. Les valeurs propres purement imaginaires de la matrice jacobienne garantissent l'existence d'un centre linéaire, mais pas nécessairement d'un *centre non linéaire* [230, Chapter 6]. Nous nous contentons ici de donner un exemple simple de centre linéaire.

Exemple 9. La dynamique de l'oscillateur harmonique (1.30) est linéaire et l'analyse de stabilité linéaire sera ainsi exacte. Le seul point d'équilibre de la dynamique (1.30) est $\boldsymbol{x}^* =$

21. Effectivement, pour certains paramètres, il pourrait y avoir une solution périodique, alors que pour d'autres non. Tant qu'il existe des paramètres permettant l'émergence d'oscillations, nous appellerons l'objet un oscillateur.

22. En effet, si nous imaginons une bille oscillant autour d'un cercle à partir d'un point θ_0 et que T est le temps pour que la bille fasse un tour du cercle, alors il va de soi que $\phi_{t+T}(\theta_0) = \phi_t(\theta_0)$, mais aussi que pour un deuxième tour $\phi_{t+2T}(\theta_0) = \phi_t(\theta_0)$, ... Or, en définissant $T' \equiv 2T$, l'équation (1.31) est respectée, mais T' n'est pas la valeur minimale possible respectant (1.31) et donc T est plutôt la période.

$(0 \quad 0)^T$. La matrice jacobienne pour l'oscillateur harmonique évalué à ce point d'équilibre est donc

$$J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont simplement $\lambda_\pm = \pm i\omega$, la trace est $\mathrm{Tr}[J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)] = 0$ et le déterminant est $\mathrm{Det}[J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*)] = \omega^2$. Le point d'équilibre $\boldsymbol{x}^* = (0 \quad 0)^T$ est ainsi un centre. Un centre est un type bien particulier de cycle, dans lequel l'oscillateur repassera toujours à sa position initiale $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, v_0)$ après un temps T. Comme mentionné précédemment, la solution à l'équation est tout simplement

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{1.32}$$

Cette solution est illustrée à la figure 1.11 (a) et le centre de l'oscillateur harmonique dans l'espace des états $\mathscr{X}$ est montré à la figure 1.11 (b).

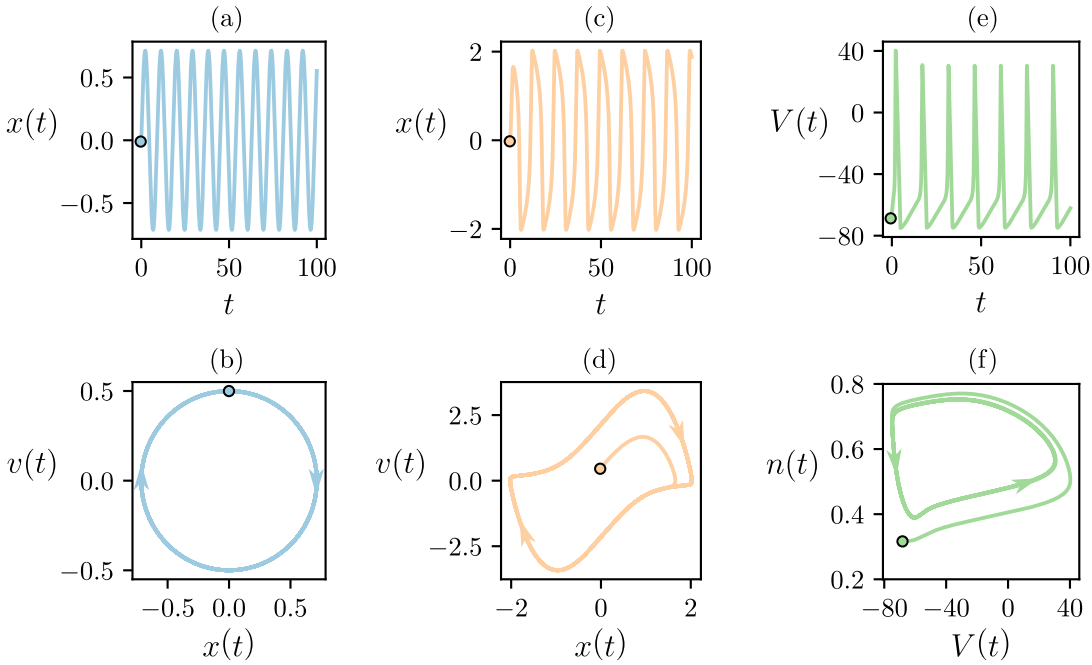


FIGURE 1.11 – (a) La solution $x(t)$ à la dynamique (1.30) de l'oscillateur harmonique pour $\omega = 0.7$ et le centre du système qui lui est associé en (b). (c) La solution $x(t)$ à la dynamique (1.35) du modèle de van der Pol pour $\omega = 0.7, \mu = 2$ et le cycle limite qui lui est associé en (d). (e) La solution en $V(t)$ à la dynamique (1.36) du modèle de Hodgkin-Huxley pour $I = 10\,\mu A/\mathrm{cm}^2, C = 1\,\mu F/\mathrm{cm}^2$ et le cycle limite qui lui est associé en (f). Les conditions initiales pour chaque modèle sont illustrées par les points au contour noir.

Cycle limite

Un autre type de cycle est le *cycle limite*. Pour définir ce type de cycle, nous introduisons tout d'abord les *points limites* et les *ensembles limites*. Un point $\boldsymbol{p} \in \mathscr{X}$ est un point ω-limite s'il existe une séquence $t_n \to \infty$ telle que le flot $\phi_{t_n}(\boldsymbol{x})$ tend vers $\boldsymbol{p}$ lorsque $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}.$$

L'ensemble de points ω-limites d'un orbite $\mathcal{O}$ est appelé l'ensemble ω-limite de $\mathcal{O}$ et est noté $\omega(\mathcal{O})$. De façon analogue, un point $\boldsymbol{q} \in \mathscr{X}$ est un point α-limite s'il existe une séquence $t_n \to -\infty$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}.$$

L'ensemble α-limite $\alpha(\mathcal{O})$ est l'ensemble des points α-limite de l'orbite $\mathcal{O}$. De plus, l'ensemble de tous les points limites de $\mathcal{O}$ est $\alpha(\mathcal{O}) \cup \omega(\mathcal{O})$ et est appelé l'*ensemble limite* de $\mathcal{O}$ [98, 197].

Un *cycle limite* $\mathcal{C}$ est alors défini comme l'ensemble α-limite ou ω-limite d'une certaine orbite de la dynamique (1.27). Le cycle limite est instable s'il est l'ensemble α-limite de chaque trajectoire dans un voisinage de $\mathcal{C}$. Au contraire, le cycle limite $\mathcal{C}$ est dit stable s'il est l'ensemble ω-limite de chaque trajectoire dans un voisinage de $\mathcal{C}$ du cycle [197]. Nous noterons $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ le voisinage de $\mathcal{C} \subset \mathscr{X}$ et plus spécifiquement, nous dirons que $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ est le *bassin d'attraction* de $\mathcal{C}$. Le bassin d'attraction est, intuitivement, l'ensemble des points $\boldsymbol{x}_0 \in \mathscr{X}$ (ou l'ensemble des conditions initiales) tels que la trajectoire converge vers $\mathcal{C}$ lorsque $t \to \infty$.[23]

Nous nous concentrerons sur le cas des cycles limites stables qui seront d'un intérêt particulier à la section 2.2. Nous noterons un cycle limite stable comme un ensemble

$$\mathcal{C} = \{\, \boldsymbol{y}^c(t) \in \mathscr{X} \mid \boldsymbol{y}^c(t) = \phi_t(\boldsymbol{x}_0^c),\ t \in [0, T) \,\}, \tag{1.33}$$

où $\boldsymbol{y}^c$ représente une trajectoire sur le cycle limite. De plus, la condition initiale $\boldsymbol{y}^c(0) = \boldsymbol{x}_0^c$ est sur le cycle limite, ce qui garantit, avec la condition de stabilité, que la trajectoire $\boldsymbol{y}^c$ reste sur le cycle pour tout t. Contrairement aux centres, les cycles limites sont *isolés*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de cycles dans le voisinage $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ du cycle limite. De plus, les cycles limites sont nécessairement issus d'une dynamique non linéaire [230].

Un cycle limite apparaît parfois dans une dynamique suite à une *bifurcation de Hopf supercritique*, dans laquelle les valeurs propres de la matrice jacobienne passent des réelles aux complexes ou vice-versa lors de la variation d'un certain paramètre dynamique. Les bifurcations de Hopf sont très fréquentes pour les dynamiques d'oscillateurs et seront d'un intérêt particulier dans ce mémoire. Les modèles définis dans les deux prochains exemples possèdent une bifurcation de Hopf supercritique et donc un cycle limite.

Exemple 10. Le modèle de van der Pol est un modèle d'oscillateur non linéaire. Celui-ci est intéressant pour illustrer l'effet de la non-linéarité de l'équation différentielle sur les oscillations. Cette non-linéarité est contrôlée par un paramètre $\mu \in \Gamma$. La dynamique de cet oscillateur est décrite par les équations

$$\dot{x} = v, \tag{1.34}$$

$$\dot{v} = -\omega^2 x + \mu(1 - x^2)v. \tag{1.35}$$

23. Pour des définitions plus complètes, voir les références [166, 197, 256].

L'oscillateur de van der Pol possède un cycle limite stable tel qu'illustré à la figure 1.11 (d) lorsque $\mu > 0$. Contrairement au centre de l'oscillateur harmonique (cas $\mu = 0$ du modèle de van der Pol), la forme du cycle n'est pas circulaire ce qui est la conséquence de la non-linéarité de la dynamique (1.35) ($\mu \neq 0$). À la figure 1.11 (c), nous observons aussi que les oscillations sont ne sont pas simplement sinusoïdales. Tout comme l'oscillateur harmonique, le modèle de van der Pol possède un unique point d'équilibre à $\boldsymbol{x}^* = (x, v) = (0, 0)$. La matrice jacobienne évaluée à $\boldsymbol{x}^*$ est

$$J_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & \mu \end{pmatrix},$$

et les valeurs propres sont $\lambda_\pm = \mu/2 \pm \sqrt{(\mu/2)^2 - \omega^2}$. Si $\mu > 0$, la partie réelle de ses valeurs propres est strictement positive ce qui implique que l'origine est instable [comme l'illustre le cas de la figure 1.11 (d)]. L'analyse linéaire ne permet toutefois pas de prouver l'existence du cycle limite, tâche qui est généralement très difficile à réaliser mathématiquement. Il est alors standard d'avoir recours aux méthodes numériques pour se convaincre de l'existence des cycles limites. Toutefois, dans le cas du modèle de van der Pol, le critère de Routh–Hurwitz procure des conditions nécessaires à l'existence d'une bifurcation de Hopf et les sections de Poincaré permettent de prouver l'existence du cycle limite [101, I.13 et I.16].

De plus, il est utile de noter que le modèle de van der Pol s'inscrit dans une classe de systèmes dynamiques appelées les systèmes de Liénard. Ceux-ci prennent la forme de

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Ils s'écrivent aussi en deux équations différentielles d'ordre 1 comme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -f(x)v - g(x), \end{aligned}$$

ou sous la forme

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + f(x)v + g(x) = 0,$$

qui représente un cas particulier de l'équation différentielle d'Abel de deuxième espèce [203]. Sous certains choix appropriés de fonctions $f(x)$ et $g(x)$ (comme $f(x) = -\mu(1 - x^2)$ et $g(x) = \omega^2$ pour van der Pol), le théorème de Liénard assure l'existence d'un unique cycle limite stable autour de l'origine [147, 230].

Les cycles limites existent aussi dans certaines dynamiques de dimensions $D > 2$. Entre autres, c'est le cas de plusieurs *dynamiques neuronales* qui, pour avoir des comportements oscillatoires réalistes, sont souvent construites de telle sorte que le nombre de dimensions est élevé et les équations différentielles sont hautement non linéaires. Une des dynamiques les plus connues est la dynamique du modèle de Hodgkin-Huxley [74, 109].

Exemple 11. Le modèle de Hodgkin-Huxley décrit l'évolution du potentiel membranaire $V : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ d'un neurone en considérant explicitement les courants d'entrée et de sortie d'ions dans la membrane [55, 74, 117].[24] Il y a en réalité une grande classe de modèles de type Hodgkin-Huxley dans lesquels diverses combinaisons de courants ioniques avec différents paramètres dynamiques Γ sont considérées. À cet effet, une base de données *modelDB* [106] contient une quantité impressionnante de modèles de type Hodgkin-Huxley.

Dans cet exemple, nous nous limitons au cas classique dans lequel il y a trois courants : un courant de potassium, de sodium et un courant de fuite (parfois relié aux ions de chlore Cl^-) [117]. La trajectoire $n : \mathscr{T} \to [0,1]$ décrit l'évolution de la fraction de canaux à potassium ouvert, la trajectoire $m : \mathscr{T} \to [0,1]$ décrit la fraction de canaux à sodium ouverts et la trajectoire $h : \mathscr{T} \to [0,1]$ décrit la fraction de canaux de sodium dont la barrière d'inactivation est activée. Les équations différentielles associées au modèle de Hodgkin-Huxley sont

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - \bar{g}_{\mathrm{K}} n^4 (V - E_{\mathrm{K}}) - \bar{g}_{\mathrm{Na}} m^3 h (V - E_{\mathrm{Na}}) - \bar{g}_{\mathrm{L}} (V - E_{\mathrm{L}}), \\ \dot{n} &= \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V) n, \\ \dot{m} &= \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V) m, \\ \dot{h} &= \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V) h, \end{aligned} \tag{1.36}$$

où C est la capacitance, I est un courant externe, E_X est le potentiel de Nernst de l'ion $\mathrm{X} \in \{\mathrm{K}, \mathrm{Na}, \mathrm{L}\}$ et $\bar{g}_{\mathrm{X}}$ est la conductance maximale de l'ion X. Également, les fonctions $\alpha_{\mathrm{x}}(V)$ et $\beta_{\mathrm{x}}(V)$ avec $\mathrm{x} \in \{n, m, h\}$ sont des fonctions qui décrivent l'influence du potentielles sur l'activation des canaux. Il est standard de définir ses fonctions d'activation comme

$$\alpha_n(V) = \frac{0.001(V+55)}{1-\exp(-(V+55)/10)}, \quad \beta_n(V) = 0.125\exp(-(V+65)/80), \tag{1.37}$$

$$\alpha_m(V) = \frac{0.1(V+40)}{1-\exp(-(V+40)/10)}, \quad \beta_m(V) = 4\exp(-(V+65)/18), \tag{1.38}$$

$$\alpha_h(V) = 0.07\exp(-(V+65)/20), \quad \beta_h(V) = \frac{1}{1+\exp(-(V+35)/10)}. \tag{1.39}$$

Les paramètres pour ce modèle ont été choisis par Hodgkin et Huxley pour bien représenter les résultats expérimentaux [74, 109]. L'inférence de ses paramètres à partir de séries temporelles est un sujet de recherche encore en évolution et particulièrement difficile.[25] De plus, le cardinal de l'ensemble de paramètres Γ devient de plus en plus élevé plus le modèle est raffiné pour y inclure des comportements biologiques réalistes (ce qui est un énorme défi en soi). Cela a pour conséquence que l'analyse dynamique du système (autant mathématique que numérique) est très ardue. Il est aussi dangereux de surparamétrer le modèle, ce qui pourrait mener à des comportements biologiquement impossibles et à une complexification inutile du modèle.

En faisant varier le courant externe I dans le modèle de Hodgkin-Huxley, une bifurcation de Hopf survient. En le choisissant suffisamment grand et indépendant du temps, il est ainsi possible de faire osciller les trajectoires infiniment. À la figure 1.11 (e), chaque pic dans la solution du potentiel $V(t)$ est appelé un *potentiel d'action* et ceux-ci possèdent une forme hautement non linéaire. À la figure 1.11 (f), le cycle limite de la dynamique de Hodgkin-Huxley est illustré dans une section de l'espace des états en $V(t)$ et $n(t)$.

1.3 Dynamiques sur des graphes

Dans les deux dernières sections, nous avons montré comment les interactions peuvent être modélisées par un graphe et le mouvement par un système dynamique. Au sein d'un système complexe, structure et dynamique sont cependant intimement reliées. Cela permet l'émergence de phénomènes tels que la synchronisation qui est issue d'un *mouvement collectif* causé par les *interactions* entre des oscillateurs. Il est ainsi fondamental de définir les dynamiques sur des graphes pour traquer ce type de phénomène émergent.

1.3.1 Définition mathématique

Considérons tout d'abord

1. N objets en interaction dont le mouvement est régi par le système dynamique $(\mathscr{X}_{DN}, \phi)$;
2. la matrice d'adjacence A associé au graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ modélisant les interactions ;
3. la trajectoire $\boldsymbol{y}_j = (y_j^1 \ y_j^2 \ \dots \ y_j^D)^T$ et l'état $\boldsymbol{x}_j = (x_j^1 \ x_j^2 \ \dots \ x_j^D)^T$ d'un seul sommet j appartenant à $\mathcal{V} = \{1, ..., N\}$.

Alors, les états du système sont notés $(\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \ \dots \ \boldsymbol{x}_N) \in \mathscr{X}_{DN}$ et le système dynamique est régi par le système à DN équations différentielles

$$\dot{\boldsymbol{y}}_j = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}_j) + \boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_N), \tag{1.40}$$

où $\boldsymbol{F}_j$ gouverne l'évolution temporelle du flot propre au sommet j et $\boldsymbol{P}_j$ est une fonction $\mathscr{X}_{DN} \ \rightarrow \ \mathbb{R}^D$ encodant la nature des interactions entre les éléments du système. Nous appellerons ainsi la fonction $\boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_N)$ une *perturbation* ou une *fonction d'interaction*. Par exemple, une perturbation peut prendre la forme d'une force mécanique externe ou un courant électrique externe [I comme dans le modèle de Hodgkin-Huxley (1.36)].

24. Il sera pris pour acquis que le lectorat possède d'emblée les connaissances en neurosciences nécessaires à la compréhension du modèle. Il est toutefois possible de comprendre le modèle sous la perspective dynamique, perspective qui nous intéresse davantage dans cet ouvrage.

25. Un article par Mohammed Badhine, Patrick Desrosiers et Simon Hardy est à venir sur ce sujet. L'information est aussi dans le mémoire de Mohammed Badhine [14].

En considérant des interactions par paires[26], la fonction d'interaction du j-ème sommet se simplifie à

$$\boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_N) = \sigma \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{G}_{jk}(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_k), \tag{1.41}$$

où σ est une constante de couplage permettant de jouer sur la grandeur de la perturbation. De plus, à la sous-section 1.1.1, il a été vu que les interactions peuvent être encodées dans la matrice d'adjacence A définie par l'équation (1.1) (ou plus généralement dans une matrice de poids). Nous rendons la fonction d'interaction plus spécifique encore en posant $\boldsymbol{G}_{jk} = A_{jk}\boldsymbol{G}$ pour tout $j, k \in \mathcal{V}$. Ainsi, si deux sommets j et k interagissent, alors $A_{jk} \neq 0$ et leur interaction prend nécessairement la forme de $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_k)$. Or,

$$\dot{\boldsymbol{y}}_j = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}_j) + \sigma \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_k). \tag{1.42}$$

Il sera parfois d'usage de redéfinir $\sigma \mapsto \sigma/N$ pour compenser l'influence de A_{jk} qui augmente lorsque N devient grand. En effet, si A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet simple, la limite $\lim_{N\to\infty}(\sum_{k=1}^{N} A_{jk})/N = 1$ ne diverge pas. Il existe plusieurs manières plus sophistiquées de compenser l'influence de la matrice d'adjacence quand le nombre de sommets grandi (ex. en utilisant les degrés) [11].

Cela dit, le flot du système dynamique dépend des paramètres de la dynamique Γ et de la structure en graphe $\mathcal{G}$. Cette dépendance est notée $\phi^{\Gamma,\mathcal{G}}$. Également, nous appellerons l'équation (1.42) une *dynamique sur un graphe*. Celle-ci s'analyse linéairement de la même manière qu'expliquée à la sous-section 1.2.2. Pour plus de détails, il est utile de se référer à la section sur les systèmes dynamiques sur des graphes de la Réf. [176, Chap. 18].

Exemple 12. Considérons N oscillateurs non identiques de van der Pol couplés par des amortisseurs et des ressorts. La dynamique à $2N$ dimensions s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= v_j, \\ \dot{v}_j &= -\omega_j^2 x_j + \mu(1 - x_j^2)v_j + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}[\sigma_{\mathrm{D}}(v_k - v_j) + \sigma_{\mathrm{R}}(x_k - x_j)], \end{aligned} \tag{1.43}$$

où $\sigma = 1/N$ alors que x_j et v_j représentent la position et la vitesse de l'oscillateur j respectivement. La correspondance avec les N trajectoires à l'équation (1.42) est $\boldsymbol{y}_j = (x_j \quad v_j)^T$.

26. Autrement dit, il ne doit pas y avoir de termes d'interaction dépendants des trajectoires de plus de deux sommets. Par exemple, un terme $\boldsymbol{y}_1 \circ \boldsymbol{y}_2 \circ \boldsymbol{y}_3$ n'est pas permis, car celui-ci représente une interaction triple.

De plus, les fonctions intrinsèques et d'interaction s'écrivent telles que

$$\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{y}_j) = \begin{pmatrix} v_j \\ -\omega_j^2 x_j + \mu(1-x_j^2)v_j \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ [\sigma_{\mathrm{D}}(v_k - v_j) + \sigma_{\mathrm{R}}(x_k - x_j)]/N \end{pmatrix},$$

où σ_{D} est une constante de couplage dit *diffusif* et σ_{R} est une constante de couplage dit *réactif*. Intuitivement, les termes d'interaction de l'équation (1.43) représentent respectivement des interactions par des amortisseurs et des interactions par des ressorts. Remarquons qu'il y a N fonctions $\boldsymbol{F}_j$ puisque nous avons associé à chaque oscillateur une différente fréquence naturelle ω_j. À la référence [15], ce système d'équations est étudié plus en détail. De façon générale, ce système est difficile à analyser et plusieurs approximations doivent être effectuées pour obtenir une intuition du comportement du système analytiquement. À l'annexe B, nous développons une méthode mathématique pour simplifier les équations (1.43).

Exemple 13. Considérons également la dynamique de Hodgkin-Huxley sur graphe

$$\begin{aligned} C\dot{V}_j &= I_j - \bar{g}_{\mathrm{K}} n^4 (V_j - E_{\mathrm{K}}) - \bar{g}_{\mathrm{Na}} m^3 h (V_j - E_{\mathrm{Na}}) - \bar{g}_{\mathrm{L}}(V_j - E_{\mathrm{L}}) + \frac{\bar{g}_{\mathrm{gap}}}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(V_k - V_j), \\ \dot{n}_j &= \alpha_n(V_j)(1-n_j) - \beta_n(V_j) n_j, \\ \dot{m}_j &= \alpha_m(V_j)(1-m_j) - \beta_m(V_j) m_j, \\ \dot{h}_j &= \alpha_h(V_j)(1-h_j) - \beta_h(V_j) h_j, \end{aligned} \tag{1.44}$$

où les fonctions α_x et β_x avec $x \in \{n, m, h\}$ sont données par les équations (1.37-1.39) et où un courant

$$I_{\mathrm{gap}} = \frac{\bar{g}_{\mathrm{gap}}}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(V_k - V_j),$$

a été ajouté. Ce courant représente un couplage de neurones par des jonctions communicantes (*gap junctions* en anglais). Le couplage est non réaliste puisque de façon générale les neurones interagissent également via des neurotransmetteurs (NMDA, AMPA, GABA, etc.) diffusant dans les synapses. Malgré tout, il est intéressant d'étudier ce système dynamique pour ses propriétés oscillatoires et sa capacité à se synchroniser. C'est ce que nous ferons à la prochaine sous-section pour expliquer comment extraire et mesurer la synchronisation de phase.

Prenons désormais un pas de recul sur toutes ces définitions afin d'y voir le portrait général. Nous avons accompli un de nos objectifs : les systèmes dynamiques sur des graphes $(\mathscr{X}_{DN}, \phi^{\Gamma,\mathcal{G}})$ régis par les équations (1.42) permettent de *modéliser* un système complexe. Notons toutefois l'accent que nous avons mis sur le mot « modéliser ». Les systèmes complexes sont si riches que les modèles décrivent généralement qu'une infime partie des fonctions pos-

sibles du système. Bien que nous puissions enrichir un modèle en ajoutant des équations et des paramètres pour capter plus de mécanismes réels, ces ajouts rendent souvent difficile l'interprétation de ses solutions et peuvent facilement mener à des incohérences avec le comportement du système réel. Si l'objectif est de comprendre l'origine de l'émergence d'un phénomène collectif, il vaut peut-être mieux viser un modèle plus simple, mais juste assez complexe pour y voir apparaître le phénomène d'intérêt.

Cependant, même les dynamiques sur des graphes les plus simples ne permettent pas directement de quantifier l'émergence d'un phénomène (ex. à quel point un système d'oscillateurs est synchronisé). Pour ce faire, il faut relever le défi de définir des *observables dynamiques*.

1.3.2 Observables dynamiques et phase

À la section 1.1, des observables $\mathcal{S}$ ont été définies pour caractériser la structure d'un système. De façon analogue, il est possible de définir des observables $\mathcal{D}$ qui caractérisent plutôt leur *dynamique*. Puisque nous voulons évaluer l'effet de la structure sur la dynamique, nous définissons les observables dynamiques dans le cadre plus général des dynamiques sur des graphes $(\mathscr{X}_{DN}, \phi^{\Gamma,\mathcal{G}})$ comme les fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{D}: \quad \mathscr{X}_{DN} \quad &\rightarrow \quad \mathscr{D}_{dn} \\ (\boldsymbol{x}_1 \quad ... \quad \boldsymbol{x}_N)^T &\mapsto \mathcal{D}(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N), \end{aligned} \tag{1.45}$$

où $n \leq N$ et $d \leq D$ sont des entiers positifs. Notons que la définition d'observable est généralisée au sens où la valeur de l'observable est vectorielle (dimension dn) plutôt que scalaire comme pour l'observable structurelle (1.2). L'observable dynamique le plus simple est l'identité $\mathcal{D}_I(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{x}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{x}_N)^T$ qui retourne simplement l'état dynamique. Dans un tel cas, $n = N$ et $d = D$. Un autre exemple d'observable dynamique simple est la moyenne sur les sommets $\langle \boldsymbol{x} \rangle_{\mathcal{V}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{x}_j$, qui est une fonction de $\mathscr{X}_{DN}$ vers $\mathscr{D}_d$ $(n = 1)$. Un dernier exemple important d'observable dynamique lors de l'analyse d'une série temporelle [27] est la *phase*.

En intégrant numériquement les équations différentielles d'oscillateurs couplés, les séries temporelles $(\boldsymbol{y}_j(1) \quad ... \quad \boldsymbol{y}_j(T))$ pour tout $j \in \{1, ..., N\}$ sur l'intervalle de temps $\mathcal{T} = [0, T]$ peuvent être calculées. Afin d'évaluer le niveau de synchronisation d'un système, il est utile d'extraire la phase de chaque oscillateur j pour tout $t \in \mathcal{T}$. Pour se donner une intuition du concept de phase, il est pertinent de considérer le cas de l'oscillateur harmonique. Comme mentionné précédemment, la solution de la dynamique de l'oscillateur harmonique (1.32) est $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. La phase de l'oscillateur est ainsi

$$\theta(t) = \omega t + \varphi, \tag{1.46}$$

27. ...ou d'un signal dans le langage de l'analyse des signaux...

ce qui est simplement l'argument de la fonction périodique cosinus. La phase indique donc à quelle vitesse angulaire ω l'oscillateur oscille. Le terme φ est la condition initiale de la phase, c'est-à-dire $\theta(0) = \varphi$. La figure 1.12 illustre cette dernière relation. Notons que nous aurions pu définir θ comme une fonction de t vers $\mathbb{R}$ modulo 2π à l'équation (1.46). Le graphique à la figure 1.12 de θ selon le temps aurait donc plutôt l'allure de dents de scie, car chaque fois que la droite atteint 2π, elle est envoyée à 0 puisque $0 \sim 2\pi$.

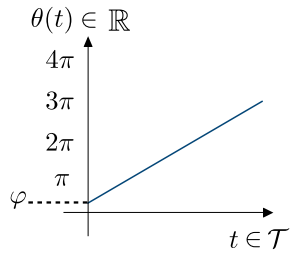


FIGURE 1.12 – La phase θ selon le temps t.

Puisque $v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$, nous vérifions aisément que

$$\theta(t) = -\arctan\left(\frac{v(t)}{\omega x(t)}\right), \tag{1.47}$$

ce qui signifie qu'il est possible d'exprimer la phase à partir de la solution $\boldsymbol{y}(t) = (x(t) \quad v(t))^T$. De façon générale, la solution $(x(t) \quad v(t))^T$ d'une certaine dynamique oscillatoire [ex. la dynamique de van der Pol (1.35)] permet toujours d'introduire une phase par le biais de l'équation [31, 186]

$$\theta(t) = -\arctan\left(\frac{v(t)}{x(t)}\right), \tag{1.48}$$

où nous avons simplement retiré la fréquence angulaire de l'équation (1.47).[28] Une autre méthode pratique pour mesurer la phase d'une série temporelle (un signal) est en utilisant les transformations intégrales [31, 87, 186, 191].

Exemple 14. Soit une série temporelle $\boldsymbol{y}_j(t) = (x_j(t) \quad z_j(t) \quad ... \,)^T$ pour tout $j \in \{1, ..., N\}$ d'une dynamique sur un graphe où la solution $x_j(t)$ oscille. Définissons N nombres complexes

$$\zeta_j(t) = x_j(t) + iH(x_j(t)) = A_j(t)e^{i\theta_j(t)},$$

où H est la transformée d'Hilbert de la fonction $x_j(t)$, c'est-à-dire

$$H(x_j(t)) = \frac{1}{\pi}\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_j(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

avec P.V. représentant la valeur principale de Cauchy. En procédant ainsi, une phase

$$\theta_j(t) = \arg \zeta_j(t), \tag{1.49}$$

est obtenue pour chaque oscillateur j du graphe. Numériquement, dans le langage de programmation *Python*, il suffit d'utiliser *scipy.fftpack.hilbert* pour évaluer la transformée d'Hilbert $H(x_j(t))$. En 1999 et en 2001, cette technique a été utilisée en neurosciences pour établir les liens entre les patrons de synchronisation d'ensembles de neurones et certaines tâches cognitives du cerveau comme la perception [136, 207, 212, 242].

Les équations (1.48) et (1.49) définissent ainsi deux observables pour la phase. En effet, en utilisant la définition (1.45), l'équation (1.48) définit l'observable

$$\Theta_2 : \mathscr{X} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \tag{1.50}$$

où $D = 2$, $N = 1$, $d = 1$ et $n = 1$, alors que l'équation (1.49) définit N observables de la forme

$$\Theta_1 : \mathscr{X} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tag{1.51}$$

où $D = 1$, $N = 1$, $d = 1$ et $n = 1$. À la section 2.2 du chapitre 2, nous définirons une autre observable dynamique permettant de définir une phase.

Dans ce mémoire, le concept de phase est essentiel, puisque si nous sommes en mesure de l'extraire correctement d'une série temporelle, nous sommes à un pas de pouvoir quantifier le niveau de *synchronisation* du système.

1.3.3 Synchronisation

Il est fascinant de constater l'émergence d'*ordre* dans la nature. Les lucioles s'illuminent à l'unisson. Les violonistes d'un orchestre jouent en harmonie. Les pendules d'horloges côte à côte finissent par osciller au même rythme. Les neurones s'activent collectivement en s'échangeant des neurotransmetteurs. Les membres d'une troupe de danse accomplissent des mouvements coordonnés avec la musique. La cohérence entre les photons émis dans une cavité permet la génération d'une impulsion laser. Des milliers de poissons s'orientent les uns par rapport aux autres pour éviter les prédateurs. Ces phénomènes coordonnés, bien que d'origines diverses, se regroupent sous un même thème, celui de synchronisation [229].

Le terme « synchronisation » provient du grec *σὺνχρόνοζ* signifiant « ensemble » et « temps » ou littéralement « survient en même temps » [31]. Il y a plusieurs mécanismes différents dans lesquels des événements surviennent simultanément et le concept de « synchronisation » est condamné à vouloir dire différentes choses dépendant du contexte. À l'aide de la physique et de la dynamique non linéaire, il est toutefois possible de définir différents types de synchronisation mathématiquement. Dans cette sous-section, nous définissons donc la synchronisation parfaite, la synchronisation en fréquence et la synchronisation de phase.

28. Pour un système dynamique $(\mathbb{C}, \phi)$ de trajectoire $w = x + iy$, l'argument de w est une phase $\theta = \arg w = \arctan2(y, x)$.

Synchronisation parfaite

La synchronisation parfaite est un phénomène qui émerge temporellement des interactions entre les oscillateurs dont les trajectoires tendent à devenir identiques. Plus formellement, s'il existe une solution $\boldsymbol{y}_j(t) = \boldsymbol{s}(t)$ de la dynamique sur un graphe (1.42) pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, alors les N orbites $\mathcal{O}_j = \{\boldsymbol{y}_j(t) \,|\, t \in \mathscr{T}\}$ sont *synchronisées parfaitement* [11]. [29]

Exemple 15. À la figure 1.13 (Gauche), les orbites (courbes) se rapprochent de plus en plus au fil du temps jusqu'à ce qu'elles se superposent. Autrement dit, les orbites se synchronisent. Pour mesurer la synchronisation, nous avons introduit l'observable dynamique $\exp(-\chi)$ où χ est la variance de la position des oscillateurs par rapport à la position moyenne $\langle x \rangle_{\mathcal{V}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$, c'est-à-dire

$$\chi \equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \langle x \rangle_{\mathcal{V}})^2.$$

Ainsi, lorsque la variance χ est élevée, les oscillateurs sont dispersés et $\exp(-\chi)$ tend vers 0. Cela signifie alors que les oscillateurs ne sont pas synchronisés. À l'inverse, si $\chi = 0$, alors $\exp(-\chi) = 1$ et les oscillateurs sont parfaitement synchronisés. Puisque $\exp(-\chi)$ quantifie le niveau de synchronisation, nous l'appelons une *observable de synchronisation*. À la figure 1.13 (Droite), l'émergence de la synchronisation dans le temps est illustrée à l'aide de l'observable de synchronisation $\exp(-\chi)$.

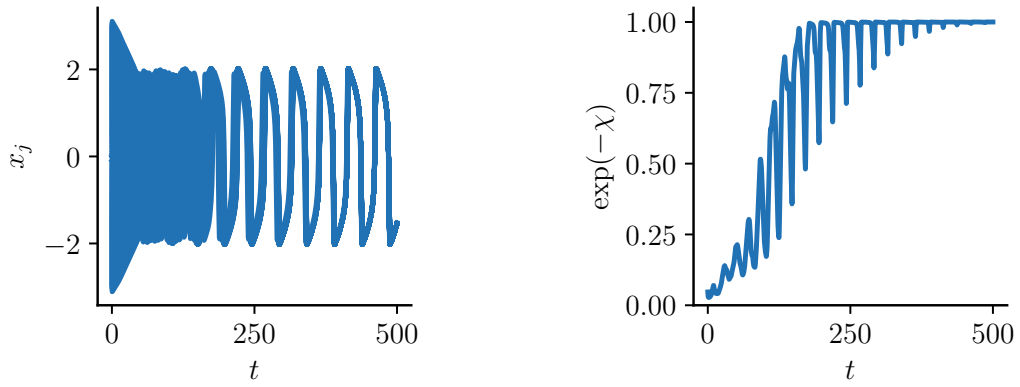


FIGURE 1.13 – Synchronisation des oscillateurs de van der Pol (1.43) sur un graphe tiré du modèle de Gilbert $\mathcal{G}(N, p)$ [section 1.1.3] où $N = 100$, $p = 0.1$, $\omega^2 = 0.1, \mu = 1$, $\sigma_{\mathrm{R}} = 0.1$ et $\sigma_{\mathrm{D}} = 2$. (Gauche) Solutions $x_j(t)$ à l'équation (1.43) pour $j \in \{1, ..., N\}$. (Droite) Émergence de la synchronisation entre les oscillateurs quantifiée avec $\exp(-\chi)$ par rapport au temps.

Il existe plusieurs autres méthodes pour mesurer la synchronisation parfaite. L'une des plus pratiques consiste à utiliser la fonction maîtresse de stabilité [11, 31, 46, 114, 194]. Il existe aussi un formalisme unificateur de la synchronisation, c'est-à-dire un formalisme qui réunit plusieurs définitions de la synchronisation en une seule définition [30, 31]. Cependant, dans

29. Par abus de langage, la terminologie *état synchronisé* est souvent utilisé plutôt que celle d'orbite synchronisée.

la suite de cette sous-section, nous nous concentrerons plutôt sur comment les phases de chaque trajectoire tendent à devenir identiques. Autrement dit, nous nous intéressons à la synchronisation de phase.

Synchronisation de phase

Pour mesurer le niveau de synchronisation de phase global, c'est-à-dire dans tout le graphe $\mathcal{G}$ du système dynamique $(\mathscr{X}, \phi^{\Gamma,\mathcal{G}})$, nous introduisons la fonction

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}\right|, \tag{1.52}$$

où $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \quad \dots \quad \theta_N)^T$ est une fonction de $\mathscr{T}$ vers $\mathbb{R}^N$. La fonction R est une observable de synchronisation souvent appelée le paramètre d'ordre de Kuramoto [211].

Bien que cette observable de synchronisation de phase ne soit pas universelle pour une dynamique sur un graphe, il est utile de bien le comprendre avant d'introduire des mesures plus raffinées comme au chapitre 3.[30] Pour éviter toute confusion dans la notation, définissons les fonctions $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{z}$, R et Z à l'aide de diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T} \arrow[r, "\boldsymbol{\theta}"] \arrow[dr, "R\circ\boldsymbol{\theta}"'] & \mathbb{R}^N \arrow[r, "\boldsymbol{z}"] \arrow[d, "R"] & \mathbb{T}^N \arrow[dl, "|\cdot|\circ Z"] \\
& {[0,1]} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
t \arrow[r, mapsto, "\boldsymbol{\theta}"] \arrow[dr, mapsto, "R\circ\boldsymbol{\theta}"'] & (\vartheta_1 \dots \vartheta_N)^T \arrow[r, "\boldsymbol{z}"] \arrow[d, mapsto, "R"] & (e^{\vartheta_1} \dots e^{i\vartheta_N})^T \arrow[dl, mapsto, "|\cdot|\circ Z"] \\
& r &
\end{tikzcd} \tag{1.53}$$

où $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ est la fonction du module d'un nombre complexe. Intuitivement, la fonction $\boldsymbol{\theta}$ est la trajectoire des N oscillateurs dans les réels et la fonction $\boldsymbol{z}$ est une surjection qui envoie la phase de chaque oscillateur vers une position sur le cercle unité, aussi nommé tore unidimensionnel $\mathbb{T}^1$. Il sera commode de noter la position d'un oscillateur par la variable $\vartheta \in \mathbb{R}$ et d'illustrer cette position sur le cercle unité. Cette représentation est présentée à la figure 1.14.

Ajoutons aussi que la fonction R prend N phases et renvoie un réel entre 0 et 1, alors que la fonction composée $R \circ \boldsymbol{\theta}$ est la trajectoire de l'observable de synchronisation confinée entre 0 et 1. Il y a d'ailleurs une interprétation très intuitive à l'observable de synchronisation (1.52) : elle représente le module du centre de masse des oscillateurs situé dans $\mathbb{D}^1$, soit le disque unité [229].[31] En effet, de l'équation (1.52) et du diagramme (1.53), nous déduisons que

$$R = |Z|,$$

30. À ce propos, un article intéressant sur les mesures de synchronisations de phase introduit un paramètre d'ordre dit universel [223]. Au chapitre 3, nous utiliserons une observable de synchronisation dans laquelle les poids attribués à chaque oscillateur dépendront de leur importance dans la structure en graphe.

31. Le site *Complexity Explorables* présente une excellente simulation du comportement de la mesure de synchronisation de phase pour le modèle de Kuramoto [sous-section 2.2.2] : https://www.complexity-explorables.org/explorables/ride-my-kuramotocycle/

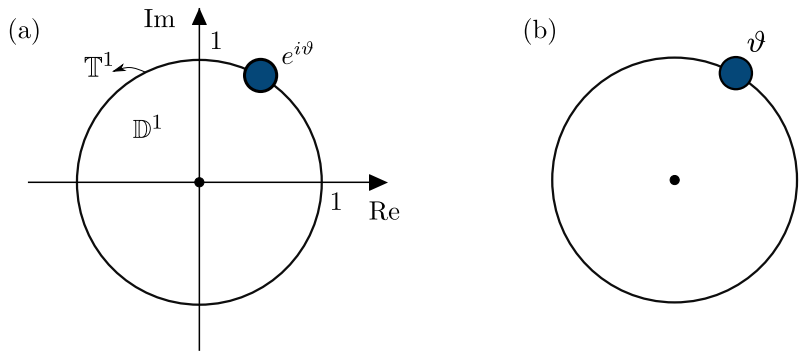


FIGURE 1.14 – (a) Schématisation de la position $e^{i\vartheta}$ d'un oscillateur sur le tore unidimensionnel $\mathbb{T}^1$ dans le plan complexe et sa simplification en (b).

où

$$Z = Re^{i\Phi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j = \langle z \rangle_{\mathcal{V}}, \tag{1.54}$$

est une fonction de $\mathbb{T}^N$ vers $\mathbb{D}^1$ et $\Phi = \arg(Z)$ est une fonction de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ retournant la phase collective des oscillateurs. La figure 1.15 illustre cette interprétation.

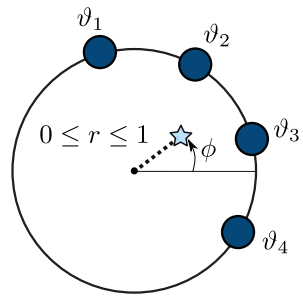


FIGURE 1.15 – Illustration intuitive de l'observable de synchronisation $R(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) = r \in [0, 1]$ dans le plan complexe. De plus, la phase $\Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4) = \phi$, de sorte que la position du centre de masse illustrée par l'étoile bleue dans $\mathbb{D}^1$ est $re^{i\phi} = (e^{i\vartheta_1} + e^{i\vartheta_2} + e^{i\vartheta_3} + e^{i\vartheta_4})/4$.

Cette interprétation intuitive de l'observable (1.52) nous indique la *proximité* des oscillateurs sur le tore [32], mais qu'est-ce qu'elle nous renseigne sur la synchronisation ? À la figure 1.16, nous illustrons intuitivement la synchronisation d'oscillateurs sur le tore pour un moment précis de la trajectoire du système lorsque t est grand. Les orbites d'un système de N oscillateurs sont

1. *synchronisés en fréquence* [33] *partiellement* lorsque les vitesses angulaires de $n < N$ oscillateurs tendent vers une vitesse angulaire commune lorsque $t \to \infty$;
2. *synchronisés en fréquence parfaitement* lorsque les vitesses angulaires des N oscillateurs tendent vers une vitesse angulaire commune lorsque $t \to \infty$ [66] ;

32. Autrement dit, l'observable mesure le degré d'alignement des vecteurs unités donnant la position de chaque objet sur le cercle unité. C'est donc une mesure de *polarisation* et celle-ci est grandement utilisé dans l'étude des mouvements collectifs [245].

33. En anglais, nous voyons fréquemment les termes « frequency synchronization » ou « phase-locking » pour parler de synchronisation en fréquence.

3. *synchronisés en phase* si les solutions $\theta_j(t)$ des N oscillateurs j sont identiques lorsque $t \to \infty$ [66]. [34]

La synchronisation en phase implique la synchronisation en fréquence parfaite. De plus, grossièrement, si aucun mouvement collectif clair ne survient, nous dirons que les orbites sont *incohérentes* ou *non synchronisées*. Dans plusieurs contextes, cela se traduit par une petite valeur de l'observable de synchronisation $R(\boldsymbol{\theta})$ où la valeur minimale de l'observable dépend généralement du nombre d'oscillateurs. Il faut toutefois faire attention à certains cas particuliers, dont celui de l'*état écarté* (« splay state »). Cet « état » est en fait une solution pour laquelle les orbites sont synchronisées en fréquence parfaitement, mais les oscillateurs sont distribués uniformément sur le tore. Par conséquent, la valeur de l'observable de synchronisation est $r = 0$ [66]. Or, lorsque $r \in [0, 1)$, il est difficile, voire impossible, de connaître le mouvement collectif sous-jacent seulement à partir de l'observable de synchronisation $R(\boldsymbol{\theta})$.

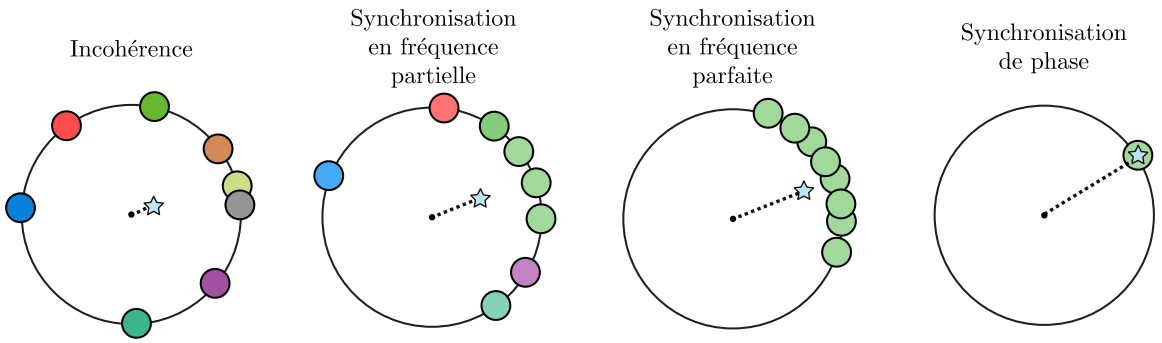


FIGURE 1.16 – Illustration intuitive de la synchronisation en fréquence et en phase. Les différentes couleurs des oscillateurs représentent différentes vitesses angulaires. La vitesse angulaire commune est illustrée par le vert pâle.

La dernière discussion ne rend toutefois pas l'observable inintéressante, puisqu'elle permet tout de même connaître la proximité des oscillateurs sur le cercle unité et s'ils sont synchronisés en phase. En effet, à la figure 1.16, nous observons qu'il y a synchronisation de phase lorsque $r = 1$, ce que nous démontrons dans le prochain exemple.

Exemple 16. Les oscillateurs se synchronisent en phase ($r = 1$) si et seulement si $\vartheta_j = \vartheta_k \mod 2\pi$ pour tout $j, k \in \{1, ..., N\}$. Tout d'abord, notons que $|Z(\boldsymbol{z})|^2 = Z(\boldsymbol{z})\overline{Z(\boldsymbol{z})} = R^2$. Ainsi, l'équation (1.52) et le diagramme (1.53) impliquent que

$$r^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k=1}^{N} e^{i(\vartheta_j - \vartheta_k)} = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{j=k=1}^{N} 1 + \sum_{j \neq k} \cos(\vartheta_j - \vartheta_k) + i \sum_{j \neq k} \sin(\vartheta_j - \vartheta_k) \right],$$

où l'on a utilisé la formule d'Euler $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \sin\vartheta$. Puisque le sinus de la différence entre ϑ_j et ϑ_k est une fonction antisymétrique, les termes $\sin(\vartheta_j - \vartheta_k)$ et $\sin(\vartheta_k - \vartheta_j)$ s'annulent

34. Notons que notre définition de la synchronisation de phase est similaire à notre définition de synchronisation parfaite, mais pour des trajectoires sur le tore unidimensionnel.

et la somme tombe à 0. De plus, puisque la fonction cosinus est paire,

$$r^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{j<k} \cos(\vartheta_j - \vartheta_k).$$

La valeur maximale du cosinus étant 1, nous en dégageons l'inégalité

$$r^2 \leq \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \left(\frac{N(N-1)}{2} \right) = 1.$$

Ainsi, $r^2 \leq 1 \iff |r| \leq 1 \iff r \leq 1$, car $r \geq 0$. En se concentrant sur le cas de l'égalité $r = 1$, nous déduisons le résultat attendu, soit

$$\begin{aligned} r = 1 &\iff r^2 = 1 \\ &\iff \sum_{j,k=1}^{N} e^{i(\vartheta_j - \vartheta_k)} = N^2 \\ &\iff \vartheta_j - \vartheta_k = 2\pi l, \;\; l \in \mathbb{Z}, \;\; \forall j,k \in \{1, ..., N\} \\ &\iff \vartheta_j = \vartheta_k \mod 2\pi, \;\; \forall j,k \in \{1, ..., N\}. \end{aligned}$$

CQFD

Plutôt que de s'intéresser à comment la synchronisation émerge dans le temps, nous nous intéressons souvent à comment le système se synchronise dépendant des paramètres dynamiques Γ et des observables structurelles $\mathcal{S}$. Pour éliminer l'influence du temps sur la synchronisation, il suffit d'intégrer $R(\boldsymbol{\theta}(t))$ selon le temps :

$$\langle R \rangle_t \equiv \frac{1}{t_1' - t_0'} \int_{\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}} R(\boldsymbol{\theta}(t)) \, \mathrm{d}t, \tag{1.55}$$

où $\langle \cdot \rangle_t$ a été privilégiée aux dépens de $\langle \cdot \rangle_{\mathscr{T}'}$ pour alléger la notation. De plus, le sous-intervalle de temps $\mathscr{T}' = [t_0', t_1']$ est typiquement choisi comme la fin de l'intervalle $\mathscr{T}$. La raison de ce choix est que nous voulons savoir, pour des paramètres structurels et dynamiques donnés, quel niveau de synchronisation est atteint par le système lorsque les variations de l'observable deviennent faibles, voire nulles. Dans les systèmes dynamiques que nous étudierons, les trajectoires $R(\boldsymbol{\theta})$ ne convergent généralement pas vers un point d'équilibre. Effectivement, après un certain temps, elles fluctuent plutôt autour d'une certaine valeur que nous mesurerons avec la moyenne $\langle R \rangle_t$. Notons que si la période des oscillations de l'observable est grande pour tout t, il est important que les intervalles $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ soient choisis suffisamment grands. Nous avons généralement utilisé la méthode brute d'observer les séries temporelles pour plusieurs paramètres de la dynamique pour choisir les intervalles de temps.

Exemple 17. En moyennant temporellement la courbe de la figure 1.13 (b), nous avons $\langle \exp(-\chi) \rangle_t = 1$ avec $\mathscr{T}' = [490, 500]$. Ainsi, il est possible de dire que pour $N = 100$, $p = 0.1$, $\omega^2 = 0.1, \mu = 1$, $\sigma_{\mathrm{R}} = 0.1$ et $\sigma_{\mathrm{D}} = 2$, les trajectoires de la dynamique de van der Pol sur $\mathcal{G}(N, p)$ se synchronisent parfaitement. Si $\mathscr{T}' = [0, 250]$, alors $\langle \exp(-\chi) \rangle_t$ est plutôt

autour de 0.5, ce qui n'est pas vraiment d'intérêt.

L'équivalent pour des intervalles discrets de temps $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ de l'équation (1.55) est

$$\langle R \rangle_t = \frac{1}{N \# \mathscr{T}'} \left| \sum_{j=1}^{N} \sum_{t \in \mathscr{T}'} e^{i\theta_j(t)} \right|. \tag{1.56}$$

Cette mesure est utilisée numériquement et expérimentalement sur les séries temporelles. D'ailleurs, lorsque la moyenne est effectuée sur tout l'intervalle temporel ($\mathscr{T}' = \mathscr{T}$), cette mesure est appelée en neurosciences la mesure MPS pour *multivariate phase synchrony* [118].

Nous pouvons également définir des observables de synchronisation mésoscopiques, c'est-à-dire des mesures qui indiquent à quel point les oscillateurs de chaque module d'un graphe modulaire sont synchronisés, soit

$$R_\mu(\boldsymbol{\theta}_\mu) = \frac{1}{N_\mu} \left| \sum_{j \in B_\mu} e^{i\theta_j} \right|, \tag{1.57}$$

où $\mu \in \{1, ..., q\}$ et $\boldsymbol{\theta}_\mu = (\theta_j)_{j \in B_\mu}$. En moyennant par rapport au temps, nous obtenons

$$\langle R_\mu \rangle_t = \frac{1}{N_\mu \# \mathscr{T}'} \left| \sum_{j \in B_\mu} \sum_{t \in \mathscr{T}'} e^{i\theta_j(t)} \right|. \tag{1.58}$$

La mesure de la synchronisation au niveau des communautés permet d'étudier des phénomènes qui n'apparaissent pas toujours avec des mesures globales, comme les chimères caractérisées par la coexistence de trajectoires $R_\mu(\boldsymbol{\theta}_\mu)$ parfaitement synchronisées et partiellement synchronisées [chapitre (3)]. L'étude de la synchronisation au niveau mésoscopique permet même de détecter les communautés d'un graphe [105, 262]. Dans ce mémoire, nous utiliserons les observables de synchronisation mésoscopique afin d'étudier l'impact de la structure en communautés d'un graphe sur la synchronisation, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 18. En intégrant numériquement la dynamique du modèle de Hodgkin-Huxley (1.44) sur le SBM moyen (1.24) à 2 blocs, nous extrayons la phase de chaque oscillateur numériquement à l'aide de la méthode de la transformée d'Hilbert (exemple 14). Nous mesurons ensuite la synchronisation de phase pour plusieurs valeurs de couplage $\bar{g}_{\text{gap}}$ entre les neurones avec l'observable de synchronisation globale $\langle R \rangle_t$ (1.56) et mésoscopique $\langle R_\mu \rangle_t$ (1.58) où $\mathscr{T}' = \mathscr{T} = (0, 0.02, ..., 200)$.

À la figure 1.17, deux comportements collectifs différents sont observés. À la figure (1.17) (Gauche), les courbes des transitions vers la synchronisation au niveau des communautés ($\langle R_1 \rangle_t$ et $\langle R_2 \rangle_t$) sont presque identiques. Cela s'explique par le fait que les communautés sont de tailles identiques ($N_1 = N_2 = 50$) et qu'elles interagissent très peu ($p_{\text{out}} = 0.01$). Les communautés se synchronisent ainsi de plus en plus en augmentant $\bar{g}_{\text{gap}}$, alors que la synchronisation au niveau global reste plutôt faible (de l'ordre de $\langle R \rangle_t = 0.4$). À la figure (1.17)

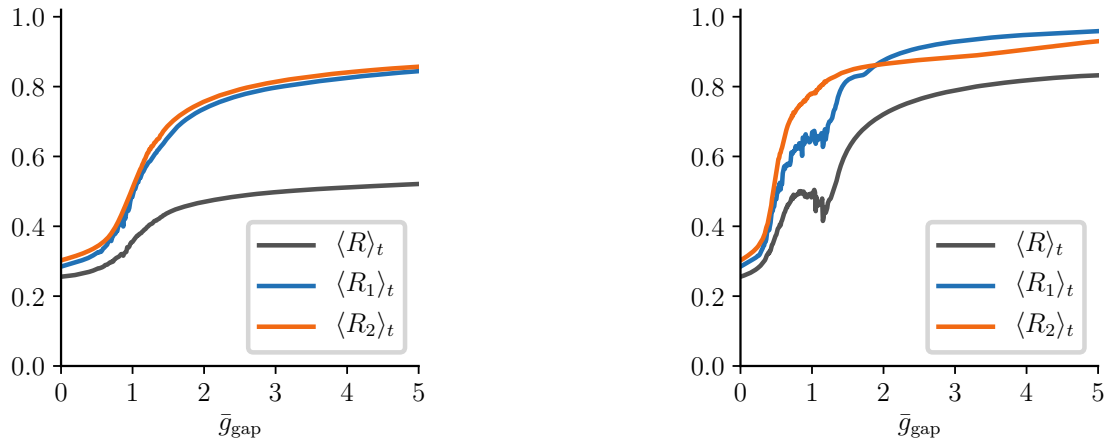


FIGURE 1.17 – Courbes de synchronisation en phase globale (courbe grise foncée) et mésoscopique (courbes en bleu et en orange) de la dynamique de Hodgkin-Huxley sur le SBM moyen par rapport au couplage $\bar{g}_{\text{gap}}$. (Gauche) $p_{\text{in}} = 0.4$ et $p_{\text{out}} = 0.01$. (Droite) Cas plus dense au sein des communautés et entre les communautés où $p_{\text{in}} = 0.8$ et $p_{\text{out}} = 0.3$. Paramètres : $N = 100$, $N_1 = N_2 = 50$, $\boldsymbol{I} = (I_j)_{N\times 1} \approx (10.0 \quad 10.4 \quad ... \quad 50.0)^T$, $B_1 = \{1, ..., 50\}$, $B_2 = \{51, ..., 100\}$.

(Droite), les premières transitions vers la synchronisation sont plus abruptes et surviennent (qualitativement) avant celles de la figure de gauche. Cela s'explique par le fait que le graphe est plus dense à droite qu'à gauche.

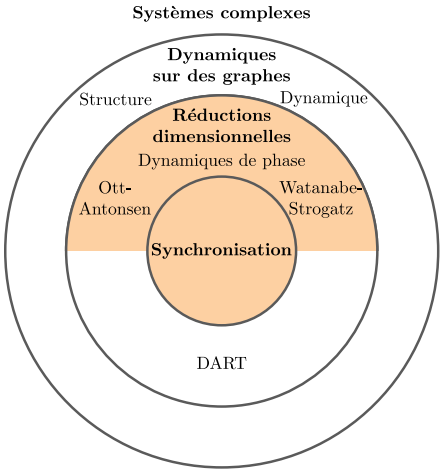
Autrement dit, les neurones sont couplés plus fortement à droite ce qui permet l'atteinte d'un état plus synchronisé ($\langle R \rangle_t \approx 0.8$) à un $\bar{g}_{\text{gap}}$ plus faible (autour de ~ 0.5 plutôt que ~ 1 à gauche). Un fait intéressant à remarquer dans la figure de droite est que la première communauté semble subir une double (et même triple) transition de phase, ce qui induit aussi une double transition de phase dans la courbe de synchronisation globale. Les neurones de la deuxième communauté, recevant des courants plus élevés que les neurones de la première communauté, semblent se synchroniser au détriment de la première communauté. Il y a ensuite une inversion, les neurones de la première communauté sont légèrement plus synchronisés que celles de la deuxième communauté à partir de $\bar{g}_{\text{gap}} \approx 2$.

La méthode d'extraction de la phase utilisée dans le dernier exemple est particulièrement utile dans un cadre expérimental ou dans des dynamiques sur des graphes dont le traitement analytique est ardu. Avec cette méthode, il est cependant difficile d'extraire les mécanismes importants du système expliquant l'émergence de la synchronisation. Pour élucider l'apparition de la synchronisation, il est ainsi pertinent d'envisager une *simplification* des systèmes dynamiques sur des graphes. Une manière de procéder est en réduisant la dimension DN de ses systèmes, ce qui est l'objet des prochains chapitres.

Chapitre 2

Réduction dimensionnelle et dynamiques de phase

Les systèmes complexes sont plus tangibles lorsque décortiqués minutieusement en leurs composantes dynamiques et structurelles importantes. Ce travail de décortication est toutefois délicat : les propriétés dynamiques et structurelles essentielles à l'apparition d'un phénomène émergent ne se manifestent pas nécessairement dans les équations différentielles d'une dynamique sur un graphe. En effet, un jeu subtil entre la structure et la dynamique peut mener à des régimes inattendus et une simplification naïve du système peut faire disparaître ces régimes.



Un exemple de simplification qui nécessite de la prudence est la réduction de la *dimension* d'un système dynamique sur un graphe. Comme introduit au chapitre 1, nous considérons les dynamiques à DN dimensions sur des graphes où N est le nombre de sommets des graphes et D est la dimension de la dynamique de chaque sommet. Pour une dynamique sur un graphe utilisée comme modèle d'un système complexe, la dimension est typiquement *élevée* et *finie*, c'est-à-dire $1 \ll DN < \infty$, ce qui complexifie grandement la tâche de réduction.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire des méthodes de réduction dimensionnelle pour les dynamiques de grande dimension. Comme il existe une quantité importante de ces méthodes, nous nous concentrerons sur celles qui s'appliquent aux dynamiques de phase. Après avoir discuté des enjeux principaux de la réduction dimensionnelle, nous présenterons comment transformer une dynamique d'oscillateurs à DN dimensions en une dynamique de phase à N dimensions. Cela nous permettra ensuite de définir le fameux modèle de Kuramoto sur lequel nous appliquons deux méthodes efficaces de réduction dimensionnelle.

2.1 Notions préliminaires

Par réduction dimensionnelle, nous entendons une *méthode* qui réduit le nombre de dimensions DN d'une dynamique sur un graphe. Un système dynamique $(\mathscr{D}_{dn}, \psi)$ est dit *réduit* par rapport au système dynamique $(\mathscr{X}_{DN}, \phi)$ si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X}_{DN} \arrow[r, "\phi_t"] \arrow[d, "\boldsymbol{\mathcal{D}}"'] & \mathscr{X}_{DN} \arrow[d, "\boldsymbol{\mathcal{D}}"] \\ \mathscr{D}_{dn} \arrow[r, "\psi_t"'] & \mathscr{D}_{dn} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\boldsymbol{y}_1(0) \ ... \ \boldsymbol{y}_N(0))^T \arrow[r, mapsto, "\phi_t"] \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{\mathcal{D}}"'] & (\boldsymbol{y}_1(t) \ ... \ \boldsymbol{y}_N(t))^T \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{\mathcal{D}}"] \\ (\boldsymbol{d}_1(0) \ ... \ \boldsymbol{d}_n(0)) \arrow[r, mapsto, "\psi_t"'] & (\boldsymbol{d}_1(t) \ ... \ \boldsymbol{d}_n(t))^T \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

où $dn < DN$, $\mathscr{D}_{dn}$ est l'espace des états réduit et ψ_t est le flot réduit. De plus, la dynamique de $(\mathscr{D}_{dn}, \psi_t)$ est

$$\dot{\boldsymbol{d}}_\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_N)\right] = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{d}_1, ..., \boldsymbol{d}_n), \quad \mu \in \{1, ..., n\}, \tag{2.2}$$

où $\boldsymbol{H} : \mathscr{D}_{dn} \to \mathbb{R}^{dn}$ est le champ vectoriel réduit du système. Nous dirons que la dynamique en $\boldsymbol{y}_j$ de $(\mathscr{X}_{DN}, \phi)$ est la *dynamique complète* et que la dynamique $(\mathscr{D}_{dn}, \psi)$ est la *dynamique réduite*.

Il y a deux défis majeurs qui rendent difficile l'obtention d'une dynamique réduite (2.2) :

1. Trouver une observable dynamique $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ significative ;
2. Fermer la dynamique par rapport à cette observable $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

En effet, le défi 1 est de trouver une mesure du phénomène d'intérêt. Par exemple, pour mesurer la synchronisation, les observables de synchronisation $\exp(-\chi)$ et R [chapitre 1] pourrait être utilisées. Cependant, comme nous le verrons dans ce chapitre, au chapitre 3 et à l'annexe B, il n'est pas toujours aisé de trouver ces observables.

De plus, il n'est pas garanti que la dynamique soit fermée pour l'observable d'intérêt (défi 2). Par dynamique fermée, nous entendons une dynamique qui ne dépend plus explicitement des DN trajectoires de la dynamique complète, ce qui est le cas s'il est possible de trouver la deuxième égalité de l'équation (2.2). Intuitivement, la fermeture de la dynamique réduite signifie qu'il est possible de décrire un mouvement collectif (régis par les dn observables) indépendamment du mouvement de chaque sommet (régis par les DN trajectoires). Ainsi, il est important que l'observable dynamique choisie constitue une transformation astucieuse des trajectoires de la dynamique complète.

Exemple 19. Soit N oscillateurs harmoniques découplés et de vitesse angulaire ω. La dynamique complète est simplement $\dot{x}_j = v_j,\ \dot{v}_j = -\omega^2 x_j$ de sorte que $DN = 2N$. La position

moyenne et la vitesse moyenne des oscillateurs, soit

$$X(x_1, ..., x_N) \equiv \langle x \rangle_{\mathcal{V}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j \quad \text{et} \quad V(v_1, ..., v_N) \equiv \langle \boldsymbol{v} \rangle_{\mathcal{V}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} v_j, \tag{2.3}$$

définissent une observable dynamique $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (X \quad V)^T$. La dérivation par rapport au temps de X et V nous procure une dynamique réduite de dimension 2 :

$$\dot{X} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \dot{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} v_j = V,$$
$$\dot{V} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \dot{v}_j = -\frac{\omega^2}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j = -\omega^2 X,$$

où nous avons utilisé les équations différentielles de la dynamique complète à la deuxième égalité et la définition des moyennes (2.3) à la troisième égalité. Ces manipulations sont au coeur de la démarche de fermeture.

Comme le démontre le prochain exemple, il n'est toutefois pas toujours possible de fermer les équations différentielles.

Exemple 20. Considérons cette fois-ci que chaque oscillateur harmonique j possède une vitesse angulaire ω_j, de sorte que la dynamique complète est $\dot{x}_j = v_j$, $\dot{v}_j = -\omega_j^2 x_j$. Nous obtenons toujours $\dot{X} = V$, mais

$$\dot{V} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 x_j,$$

ce qui ne permet pas d'exprimer V en fonction de la position moyenne X. Toutefois, si les vitesses angulaires sont approximativement égales (distribuées autour d'une valeur très localisée), alors $\omega_j \approx \langle \omega \rangle_{\mathcal{V}}$ pour chaque oscillateur $j \in \mathcal{V}$. L'équation différentielle de la vitesse est ainsi

$$\dot{V} \approx -\langle \omega \rangle_{\mathcal{V}}^2 X.$$

La réduction dimensionnelle de l'exemple 19 est dite *exacte* et la celle de l'exemple 20 est dite *approximative*. Il est malheureusement plutôt rare de trouver des réductions dimensionnelles exactes. À la prochaine section, une réduction dimensionnelle approximative permettant d'obtenir une *dynamique de phase* est introduite.

2.2 Réduction dimensionnelle en une dynamique de phase

Il est généralement difficile de comprendre les mécanismes issus d'une dynamique sur un graphe engendrant la synchronisation. Les dépendances non linéaires entre les différentes trajectoires $y_j^1, y_j^2, ...$ dans les systèmes dynamiques de dimension D élevée contribuent grandement à la complexité du problème (ex. le modèle de Hodgkin-Huxley). Il est ainsi naturel de se de-

mander s'il est possible de réduire la dimension D de la dynamique à DN dimensions pour parvenir à une nouvelle dynamique de dimension plus faible, plus facile à analyser et héritant des propriétés dynamiques d'intérêt de la première. Il se trouve que lorsque les oscillateurs sont faiblement couplés, l'amplitude des oscillations de leur trajectoire joue un rôle mineur dans l'émergence de la synchronisation [202]. En éliminant l'influence de l'amplitude et en considérant le cas des couplages faibles, il ne reste que l'influence des phases.

2.2.1 Explication de l'approche

L'objectif de cette sous-section est de présenter quelques réflexions nécessaires à l'obtention d'une *dynamique de phase* à partir d'une dynamique sur un graphe. L'idée derrière la réduction est de profiter du fait que les trajectoires des oscillateurs restent près de leur cycle limite stable pour leur associer une phase. Selon les déviations des trajectoires par rapport aux cycles limites, nous voulons trouver comment les déviations perturbent la phase de chaque oscillateur. Ainsi, il est possible de complètement décrire le comportement des oscillateurs près de leur cycle limite en termes des phases et de comment elles sont perturbées.

Étant donné que les techniques pour déduire des dynamiques de phase sont abondantes, avancées mathématiquement et toujours en développement [49, 145, 199, 257], cette section se voudra plus concise et descriptive. En effet, la réduction de l'équation (1.42) en une dynamique de phase est plutôt corsée : il faut oeuvrer en DN dimensions. Il est donc plus aisé de réduire en phase l'équation $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ pour ensuite généraliser aux dynamiques sur des graphes.

Soit un oscillateur possédant un cycle limite $\mathcal{C}$ stable dans $\mathscr{X}_D \subset \mathbb{R}^D$. Considérons de plus les trajectoires $\boldsymbol{y}^c$ sur le cycle limite paramétrant les courbes $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0^c}$ [figure 2.1].

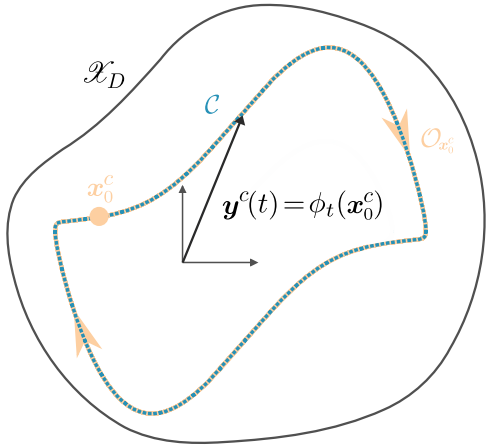


FIGURE 2.1 – Paramétrage d'une courbe $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0^c}$ (orange) sur le cycle limite $\mathcal{C}$ (bleu) dans l'espace des états $\mathscr{X}$ par la trajectoire $\boldsymbol{y}^c$.

Puisque le cycle limite $\mathcal{C}$ est une variété unidimensionnelle de $\mathbb{R}^D$, il est possible de paramétrer

le cycle par une trajectoire sur $\mathbb{R}$ [199]. Définissons cette trajectoire comme une fonction de phase $\theta : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ associée à un flot $\psi : \mathscr{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sur l'espace des phases $\mathbb{R}$. Nous visons ainsi à obtenir un nouveau système dynamique $(\mathbb{R}, \psi)$ unidimensionnel à partir d'un système dynamique $(\mathscr{X}_D, \phi)$.

Il est d'abord commode de définir la fonction lisse bijective

$$\begin{aligned} \Theta^c : \mathcal{C} &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x}^c &\mapsto \vartheta, \end{aligned} \tag{2.4}$$

et de la mettre en relation avec les autres quantités introduites précédemment dans les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, "\boldsymbol{y}^c"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{C} \arrow[dl, "\Theta^c"] \arrow[d] \\ \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{T}^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto, "\boldsymbol{y}^c"] \arrow[d, mapsto, "\theta"'] & \boldsymbol{x}^c \arrow[dl, mapsto, "\Theta^c"] \arrow[d, mapsto] \\ \vartheta \arrow[r, mapsto] & e^{i\vartheta} \end{tikzcd}$$

où nous avons seulement spécifié les fonctions d'intérêt pour la démarche. Connaissant la période T à laquelle l'oscillateur effectue un cycle sur $\mathcal{C}$, la vitesse angulaire sur $\mathcal{C}$ est donné par $\omega = 2\pi/T$. La vitesse angulaire sur le 1-tore est la même que celle sur $\mathcal{C}$ et donc

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta^c(\boldsymbol{y}^c)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta^c(\boldsymbol{y}^c) \cdot \dot{\boldsymbol{y}}^c = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta^c(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^c), \tag{2.5}$$

où nous avons utilisé la définition de Θ^c (2.4) et la dérivation en chaîne à la deuxième égalité [202]. De plus, $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta^c(\boldsymbol{y}^c)$ est le gradient de la fonction $\Theta^c \circ \boldsymbol{y}^c$ par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\cdot$ est un produit scalaire. L'équation (2.5) définit une première dynamique de phase $\dot{\theta} = \omega$. À partir d'un point de référence donnée, l'oscillateur parcourt tout simplement le cercle à une vitesse angulaire ω pour tout $t \in \mathscr{T}$.

Qu'arrive-t-il cependant si l'oscillateur est perturbé ? Puisque nous voulons dégager une dynamique de phase pour un graphe d'oscillateurs régi par l'équation (1.42), il est essentiel de se demander quel est l'effet d'une perturbation externe sur un oscillateur. Soit une perturbation de l'oscillateur

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} : \mathscr{T} &\to \mathbb{R}^D \\ t &\mapsto \boldsymbol{p}(t). \end{aligned}$$

Si la perturbation est additive, alors la dynamique perturbée est

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{p}. \tag{2.6}$$

Comme vu précédemment, lorsque le système n'est soumis à aucune perturbation, les points $\boldsymbol{x}^c$ du cycle limite se paramètrent directement par un angle ϑ_c. Cependant, une perturbation $\boldsymbol{p}$

peut faire dévier la trajectoire du cycle limite et la fonction Θ^c ne permet donc plus d'assigner un angle à une trajectoire $\boldsymbol{y}$ perturbée en dehors du cycle limite.

Il est ainsi fondamental d'étendre la notion de phase au bassin d'attraction $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ du cycle limite $\mathcal{C}$, ce qui sera possible si la perturbation $\boldsymbol{p}$ est faible [199, 202]. Il est sous-entendu dans toutes les dynamiques de phase utilisées dans ce mémoire que cette extension est possible. Pour définir une phase lorsque l'oscillateur est perturbé, il est commode d'introduire la *fonction de phase asymptotique*

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{B}(\mathcal{C}) &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \Theta(\boldsymbol{x}) = \vartheta, \end{aligned}$$

où la quantité ϑ est appelée la *phase asymptotique* [199], mais par soucis de concision, nous abandonnerons presque toujours l'adjectif *asymptotique*. Les dernières quantités mathématiques introduites se résument comme suit :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, "\boldsymbol{y}"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{B}(\mathcal{C}) \arrow[dl, "\Theta"] \arrow[d] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "z"'] & \mathbb{T}^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto, "\boldsymbol{y}"] \arrow[d, mapsto, "\theta"'] & \boldsymbol{x} \arrow[dl, "\Theta"] \arrow[d, mapsto] \\ \vartheta \arrow[r, mapsto, "z"'] & e^{i\vartheta} \end{tikzcd}$$

Contrairement à Θ^c, la fonction Θ n'est pas bijective. En effet, des points en dehors du cycle limite (mais dans le bassin d'attraction) pourront être associés à une même valeur de phase par Θ. Il en découle ainsi le concept d'*isochrone* [202]. Un isochrone est un ensemble de points $\boldsymbol{x}$ du bassin d'attraction $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ qui ont la même phase asymptotique $\Theta(\boldsymbol{x}) = \vartheta$, soit

$$\mathcal{I}(\vartheta) = \{\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}) \mid \Theta(\boldsymbol{x}) = \vartheta\ \}. \tag{2.7}$$

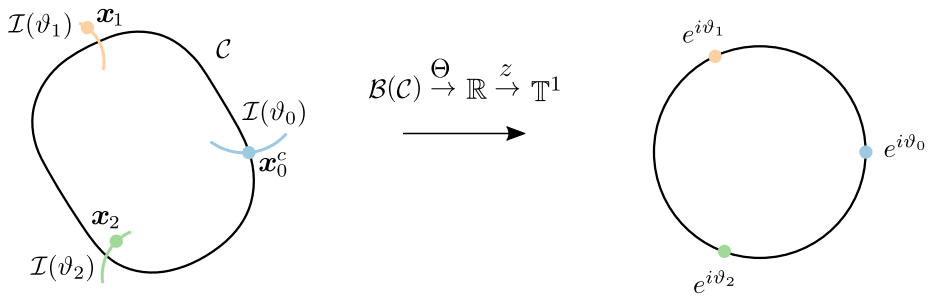


FIGURE 2.2 – Schématisation de la transformation des coordonnées $\boldsymbol{x}$ dans le bassin d'attraction du cycle limite $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ à la coordonnée ϑ sur le 1-tore $\mathscr{T}^1$. Les isochrones $\mathcal{I}(\vartheta)$ (2.7) sont illustrées pour trois points dans $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ dont un directement sur le cycle limite, soit $\boldsymbol{x}_0^c$. Notons que les états $\boldsymbol{x}_j$ et les phases ϑ_j représentent différentes positions d'un même oscillateur et non plusieurs oscillateurs comme dans les figures 1.16-1.15 de la section 1.3.3. Cette figure est inspirée de la Réf. [199].

Ceci étant dit, la dynamique de phase s'obtient par dérivation en chaîne :

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta(\boldsymbol{y})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta(\boldsymbol{y}) \cdot \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta(\boldsymbol{y}) \cdot [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{p}]\,. \tag{2.8}$$

En considérant que la perturbation $\boldsymbol{p}$ est faible, la trajectoire perturbée est environ égale à la trajectoire sur le cycle limite, c'est-à-dire que $\boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{y}^c$. Autrement dit, la perturbation est suffisamment faible pour garder la trajectoire dans le bassin d'attraction du cycle limite. Cela nous permet d'utiliser l'équation de la vitesse angulaire (2.5) pour effectuer l'approximation

$$\dot{\theta} \approx \omega + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta(\boldsymbol{y}^c) \cdot \boldsymbol{p}. \tag{2.9}$$

Pour mieux voir la dépendance en θ du deuxième terme du côté droit de l'équation (2.9), il est utile de réaliser certaines manipulations. Tout d'abord, sans perte de généralité, un point de référence $\boldsymbol{x}^c_{\text{ref}}$ est défini sur le cycle limite telle que $\Theta^c(\boldsymbol{x}^c_{\text{ref}}) = 0$ (la phase 0). La solution à la dynamique de phase non perturbée (2.5) est alors simplement $\theta(t) = \omega t + \Theta^c(\boldsymbol{x}^c_{\text{ref}}) = \omega t$. L'inversion de cette dernière relation implique que $t(\theta) = \theta/\omega$. Cette inversion permet de définir $\boldsymbol{S}(\theta) \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\Theta(\boldsymbol{y}^c(t(\theta)))$ et de conclure que

$$\dot{\theta} = \omega + \boldsymbol{S}(\theta) \cdot \boldsymbol{p}, \tag{2.10}$$

où $\dot{\theta}$ est redéfinie comme la dérivée de la phase de l'oscillateur perturbé afin d'abandonner le symbole d'approximation. La fonction $\boldsymbol{S}(\theta)$ définie précédemment s'appelle la *fonction de sensibilité en phase.*[1] De façon intuitive, cette fonction quantifie la réponse de l'oscillateur à une perturbation externe. Cette réponse dépend de la position $\boldsymbol{y}^c(t(\theta))$ sur le cycle limite.

Bien que nous ayons déduit une forme générale pour la dynamique de phase, soit l'équation (2.10), il reste toujours à savoir s'il est possible d'extraire une expression pour la fonction de sensibilité $\boldsymbol{S}(\theta)$ lorsque la grandeur de la perturbation $\boldsymbol{p}$ tend vers 0. Il est généralement très difficile de l'obtenir analytiquement. Heureusement, il est possible de le faire pour la réduction en phase de la *forme normale de Hopf* d'ordre 2 [199].

Exemple 21. La forme normale de Hopf d'ordre 2 ou l'équation de Stuart-Landau [133, Chap. 2] s'exprime comme

$$\dot{w} = c_1 w - c_2 |w|^2 w, \tag{2.11}$$

où $c_1 = a_1 + ib_1 \in \mathbb{C}$, $c_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, et w est une trajectoire complexe $\mathcal{T} \mapsto \mathbb{C}$. De plus, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle complexe (2.11) est associée à un système dynamique $(\mathbb{C}, \phi')$ qui se transformant en un système $(\mathbb{R}^2, \phi)$ de dynamique

$$\dot{r} = \frac{1}{2r}(\dot{w}\bar{w} + w\dot{\bar{w}}) = r(a_1 - a_2 r^2), \tag{2.12}$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2ir^2}(\dot{w}\bar{w} - w\dot{\bar{w}}) = b_1 - b_2 r^2, \tag{2.13}$$

où $\bar{w}$ est le complexe conjugué de w. En posant $\dot{r} = 0$ et sachant que $r \geq 0$, nous trouvons que $r^* = 0$ ou $r^*_c = +\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$. Il se trouve que ce système dynamique possède un cycle limite stable et circulaire de rayon r^*_c. Lorsque les trajectoires $\boldsymbol{y} = (r \quad \theta)^T$ atteignent le cycle limite,

1. Cette fonction est intimement reliée à la « Phase Response Curve » (PRC) [117, 199].

l'équation (2.13) devient

$$\dot{\theta} = b_1 - b_2(r_c^*)^2 = b_1 - \frac{b_2 a_1}{a_2} \equiv \omega,$$

où ω est une constante correspondant à la vitesse angulaire. ω dépend ainsi des paramètres de la dynamique initiale. Le cycle limite s'écrit alors explicitement comme

$$\mathcal{C} = \left\{ w^c(t) = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} e^{i\omega t} \,\middle|\, t \in [0, T) \right\},$$

ce qui est rarement réalisable pour un système dynamique quelconque [199]. Nous trouvons de plus la fonction de phase asymptotique

$$\Theta(r, \theta) = \theta - \frac{b_1}{a_1} \ln \left| \frac{r}{r_c^*} \right|,$$

qui satisfait $\dot{\theta} = \omega$. En appliquant le gradient en coordonnées polaires, la fonction de sensibilité en phase s'écrit

$$\boldsymbol{S}(\theta) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} \Theta(r, \theta) = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left[-\frac{b_1}{a_1} \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta \right].$$

En coordonnées cartésiennes, $\boldsymbol{S}(\theta)$ s'écrit

$$\boldsymbol{S}(\theta) = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left[\left(-\frac{b_1}{a_1} \cos\theta - \sin\theta \right) \boldsymbol{i} + \left(\cos\theta - \frac{b_1}{a_1} \sin\theta \right) \boldsymbol{j} \right].$$

Pour dégager une expression explicite de la dynamique de phase, il faut poser une perturbation $\boldsymbol{p}$. Considérons que celle-ci prend la forme $\boldsymbol{p} = \sigma \boldsymbol{i}$ où σ est une constante. De l'équation (2.10), la dynamique de phase est ainsi

$$\dot{\theta} = \underbrace{b_1 - \frac{b_2 a_1}{a_2}}_{\omega} - \sigma \frac{b_1}{a_1} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left[\cos\theta + \sin\theta \right].$$

La dynamique de phase dépend ainsi uniquement des paramètres de la dynamique (2.12-2.13) initiale et du paramètre associé à la perturbation. [2]

Il est maintenant plus commode d'imaginer la généralisation pour une dynamique d'oscillateurs sur graphe. Considérons que les oscillateurs répondent aux deux critères suivants :

1. Ils possèdent des cycles limites de différentes périodes T_j, $j \in \{1, ..., N\}$, et donc de différentes vitesses angulaires ω_j ;
2. Ils sont perturbés uniquement par les interactions avec les autres oscillateurs.

2. La technique utilisée dans cet exemple est l'une des plus simples méthodes de réduction. Celle-ci a été introduite par Arthur Winfree [199], l'un des pères fondateurs de la modélisation mathématique d'oscillateurs couplés en biologie [229].

Nous pouvons alors définir, en suivant la logique de la section 1.3, une perturbation

$$\boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_N) = \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_k),$$

où les interactions entre les oscillateurs sont par paires et identiques. La correspondance avec la perturbation $\boldsymbol{p}$ sur la dynamique d'un oscillateur est $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{P}_j(\boldsymbol{y}_1(t), ..., \boldsymbol{y}_N(t))$. La dynamique de phase est ainsi

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{jk} g(\theta_j, \theta_k), \tag{2.14}$$

où $g(\theta_j, \theta_k) \equiv \boldsymbol{S}(\theta_j) \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}_j^c(t(\theta_j)), \boldsymbol{y}_k^c(t(\theta_k)))$ est une fonction d'interaction entre les phases reliée à la fonction de sensibilité $\boldsymbol{S}$ et la fonction d'interaction entre les trajectoires des oscillateurs dans la dynamique complète $\boldsymbol{G}$. En reprenant la forme du diagramme (2.1), la réduction dimensionnelle de $(\mathscr{X}_{DN}, \phi)$ à une dynamique de phase $(\mathbb{R}^N, \psi)$ se résume comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(\mathcal{C}) \subset \mathscr{X}_{DN} \arrow[r, "\phi_t"] \arrow[d, "\boldsymbol{\Theta}"'] & \mathcal{B}(\mathcal{C}) \subset \mathscr{X}_{DN} \arrow[d, "\boldsymbol{\Theta}"] \\
\mathbb{R}^N \arrow[r, "\psi_t"'] & \mathbb{R}^N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\boldsymbol{y}_1(0) \ ... \ \boldsymbol{y}_N(0))^T \arrow[r, mapsto, "\phi_t"] \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{\Theta}"'] & (\boldsymbol{y}_1(t) \ ... \ \boldsymbol{y}_N(t))^T \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{\Theta}"] \\
(\theta_1(0) \ ... \ \theta_N(0))^T \arrow[r, mapsto, "\psi_t"'] & (\theta_1(t) \ ... \ \theta_N(t))^T
\end{tikzcd}$$

À l'exemple 21, nous avons montré qu'il était possible de trouver explicitement la fonction de sensibilité pour la forme normale de Hopf. Il se trouve que plusieurs dynamiques d'oscillateurs subissent une bifurcation de Hopf sous le changement de leurs paramètres. Si tel est le cas, ces dynamiques se transforment potentiellement sous la forme normale de Hopf. Cette remarque est importante : pour une dynamique non linéaire de haute dimension, il est parfois possible de trouver une dynamique de phase en l'exprimant sous une forme normale [199]. Les dynamiques de phase issues de ce traitement possèdent parfois d'étonnantes similarités. En effet, certaines dynamiques de phase sont en quelque sorte *universelles* et permettent de mieux comprendre la synchronisation d'oscillateurs. C'est le cas du paradigmatique modèle de Kuramoto.

2.2.2 Modèle de Kuramoto

La dynamique (2.14) ne permet pas d'avoir directement une intuition quant à la synchronisation puisque la fonction g n'est pas connue. Bien qu'il soit possible de la déduire analytiquement dans des cas spécifiques [exemple 21], il n'est pas garanti d'obtenir une dynamique de phase dans laquelle les oscillateurs se synchronisent. Plus généralement, il n'est pas aisé de définir un système dans lequel un mouvement collectif organisé survient [229]. En 1975, Yoshiki Kuramoto a réussi à déduire un modèle à l'apparence simple, mais extrêmement riche, permettant de percer plusieurs mystères reliés à l'émergence de la synchronisation.

Reprenons désormais la dernière sous-section là où nous l'avons laissée. La dynamique de phase (2.14) peut-être simplifiée davantage en moyennant l'équation par rapport au temps.

Plusieurs ouvrages traitent de cette technique qui requiert l'usage du *théorème de la moyenne* expliqué entre autres dans la Réf. [98, Chap. 4]. [3] En appliquant cette technique, la dynamique de phase devient

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{jk} H(\theta_k - \theta_j), \tag{2.15}$$

où H est une fonction d'interaction dépendant de la différence de phase $\Delta\theta = \theta_k - \theta_j$. [4] En considérant que la fonction d'interaction est périodique, celle-ci se développe en série de Fourier :

$$H(\Delta\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \cos(\ell\Delta\theta) + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \sin(\ell\Delta\theta),$$

où a_ℓ et b_ℓ sont les coefficients de Fourier s'exprimant comme

$$a_\ell = \int_0^{2\pi} H(\Delta\theta) \cos(\ell\Delta\theta)\, \mathrm{d}(\Delta\theta),$$
$$b_\ell = \int_0^{2\pi} H(\Delta\theta) \sin(\ell\Delta\theta)\, \mathrm{d}(\Delta\theta).$$

En considérant que $H(\Delta\theta)$ est une fonction impaire, nous déduisons que $a_\ell = 0$, pour tout $\ell \geq 0$. De plus, en conservant seulement le premier terme $\ell = 1$ de la série [5], nous avons que $H(\Delta\theta) = \pi \sin(\Delta\theta)$. Il en découle ainsi le *modèle de Kuramoto* [132] décrit par les équations différentielles

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^{N} A_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j), \tag{2.16}$$

où nous avons absorbé la constante π dans la constante de couplage σ. Notons que le modèle original ne tient pas compte d'une structure en graphe, mais plutôt un champ moyen par lequel tous les oscillateurs interagissent entre eux ($A_{jk} = 1$ pour tout $j, k \in \{1, ..., N\}$) [132]. Soulignons aussi qu'il existe désormais plusieurs généralisations du modèle de Kuramoto [201]. Parmi ces généralisations, nous rapportons l'ajout d'inertie [20, 138, 232], l'ajout de plus de dimensions [41, 42, 269], l'extension matricielle [35], non abélienne [148] et quantique [149, 150].

Comme mentionné précédemment, le modèle paraît fort simple : des oscillateurs tournent sur un cercle et interagissent au travers d'une fonction sinusoïdale. Pourtant, c'est loin d'être le cas. Nul besoin d'argumenter ici, nous laissons le lectorat s'en convaincre avec la suite de ce mémoire. Cela dit, la suite de cette sous-section est séparée en deux parties. D'une part, nous montrons comment le modèle apparaît dans divers domaines et d'autre part, nous effectuons les premiers pas dans l'analyse dynamique de la synchronisation avec le modèle de Kuramoto.

3. Nous n'aborderons pas le sujet dans cet ouvrage pour ne pas allonger une démarche qui est déjà longue. Le livre de S. Strogatz [230, Chap. 7], le livre de S. Gupta [99, Chap. 1] et les références [199, 202] valent également la peine d'être regardés pour des approches plus intuitives.

4. Notons qu'un changement de notation pour chaque trajectoire θ_j serait nécessaire ici en raison de la technique de moyennage. Nous conservons θ_j pour simplifier la notation.

5. Il est intéressant de noter que pour représenter des dynamiques d'oscillateurs plus complexes avec une dynamique de phase, d'autres modes sont nécessaires [104].

Un modèle canonique

Pour montrer le caractère général du modèle de Kuramoto, il est pertinent d'introduire un modèle similaire, mais avec plus de paramètres, soit le *modèle de Kuramoto-Sakaguchi* [217]. Celui-ci est défini par les équations différentielles

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{jk} A_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j - \alpha_{jk}), \tag{2.17}$$

où $\sigma_{jk} \in \mathbb{R}$ et $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$ sont respectivement le couplage et le déphasage entre la paire d'oscillateurs (j, k). Dans un tel cas, il y a plutôt une famille de N^2 fonctions d'interaction H_{jk} qui dépendent de la matrice de poids et du déphasage. Dans ce qui suit, nous montrons la généralité de ce dernier modèle en introduisant une suite d'exemples.

Exemple 22. Le modèle de Ginzburg-Landau est un modèle général d'oscillateurs non linéaires utilisé pour décrire divers phénomènes en physique (transitions de phases, supraconductivité, condensation de Bose-Einstein, ...) [10, 145], en chimie (réactions de Belousov-Zhabotinsky) et même en neurosciences (oscillations neuronales, avalanches neuronales, criticité, synchronisation, ...) [60, 145, 225]. Les équations différentielles du modèle de Ginzburg-Landau sont

$$\dot{w}_j = w_j - (1 + ic_2)\,|w_j|^2\, w_j + \sigma(1 + ic_1)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} w_k - w_j\right), \tag{2.18}$$

où w_j est la trajectoire complexe de l'oscillateur j, c_1 est une constante de couplage réactif et c_2 est une constante de « non isochronicité » [145]. Les équations (2.18) sont souvent appelées les *complex Ginzburg-Landau equations* (CGLE) [10, 145, 225]. Notons aussi que les CGLE sont fréquemment exprimées dans leur version continue [202]. Comme montré dans le livre de Kuramoto [133, Chap. 2], les équations de Ginzburg-Landau s'obtiennent à partir d'un système à réaction-diffusion.

Ce n'est pas un hasard que l'équation (2.18) ressemble à la forme normale de la bifurcation de Hopf (2.11). En effet, le modèle est valide sous l'hypothèse que des oscillateurs régis par un système à réaction-diffusion sont près de subir une bifurcation de Hopf [24, 231]. Le modèle de Ginzburg-Landau se rapporte au modèle de Kuramoto-Sakaguchi (2.17) avec les techniques de réduction en phase et les paramètres du tableau 2.1.

Exemple 23. Les systèmes nanoélectromécaniques (NEMS) sont des assemblages d'appareils électroniques et mécaniques pouvant agir à l'échelle nanoscopique [61, Chap.16]. À partir de tels systèmes, un graphe d'oscillateurs non linéaires couplés peut être réalisé expérimentalement [162]. De plus, en ajustant les paramètres du NEMS influençant le couplage des oscillateurs, il est possible de mesurer la synchronisation avec une précision suffisante pour être comparée quantitativement avec les théories existantes [162].

Dans la Réf. [161], les oscillateurs nanoélectromécaniques sont décrits par les équations

$$\dot{w}_j = \frac{w_j}{2}\left(|w_j|^{-1} - 1\right) + i\Delta_j w_j + i\delta\,|w_j|^2\,w_j - i\varepsilon w_j + \frac{i\varepsilon}{2}\left(w_{j-1} + w_{j+1}\right), \tag{2.19}$$

où w_j est la trajectoire complexe de l'oscillateur j, Δ_j est la fréquence naturelle de l'oscillateur j, $\delta \in \mathbb{R}$ contrôle la non-linéarité de l'équation et $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est le couplage entre les plus proches voisins. En imposant la condition périodique $j = j + N$, l'équation (2.19) régit l'évolution temporelle d'oscillateurs sur un graphe en cycle. Dans un tel cas, le modèle se réduit au modèle de Kuramoto-Sakaguchi (2.17) avec les paramètres du tableau 2.1. [6]

Exemple 24. Les jonctions de Josephson sont caractérisées par une paire de matériaux supraconducteurs séparés par un isolant électrique. La particularité de ses jonctions est qu'un courant peut se propager entre les deux supraconducteurs même s'il n'y a pas de différence de potentiel entre ceux-ci. Cela est dû à l'effet tunnel, explication qui valut un prix Nobel à Brian Josephson en 1973 [230, Chap. 4]. Les jonctions de Josephson permettent la génération d'oscillations dans le potentiel à hautes fréquences, ce qui a permis des avancées technologiques significatives (amélioration de détecteurs, d'amplificateurs, etc.).

Il se trouve donc qu'une jonction est un oscillateur. D'ailleurs, la dynamique d'une jonction est exactement analogue à un pendule amorti et forcé [230, Chap. 4]. Un système d'oscillateurs est réalisable expérimentalement avec un circuit électrique RLC (résistance, inductance et capacité respectivement) doté de N jonctions de Josephson identiques couplées en série [249, 255]. Les équations décrivant le circuit sont alors

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2er}\dot{\phi}_j + I\sin\phi_j + \dot{Q} &= I_B, \\ L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q &= \frac{\hbar}{2e}\sum_{k=1}^{N}\dot{\phi}_k. \end{aligned} \tag{2.20}$$

où ϕ_j est la différence entre les phases des fonctions d'ondes reliées aux deux supraconducteurs de la jonction j, r est la résistance de chacune des jonctions, I est le courant critique de chacune des jonctions, Q est la charge du condensateur, I_B est le courant de biais, $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π et e est la charge électrique [255]. Notons que le fait que l'équation (2.20) ne fait pas intervenir une matrice d'adjacence provient de l'analyse du circuit et non d'une approximation en champ moyen [255].

Les équations du système de jonctions de Josephson (2.20) se réduisent aux équations du modèle de Kuramoto-Sakaguchi (2.17) avec les paramètres du tableau 2.1. En bref, les jonc-

6. Notons que dans les articles [28, 161], la fonction d'interaction prend plutôt la forme de $H(\phi) = \sin(\phi) + \gamma(1 - \cos\phi)$ où γ représente la « non isochronicité » des oscillations [28] ou plutôt une mesure du déphasage [161]. Pour avoir une forme standard des équations de Kuramoto-Sakaguchi, il suffit de faire le changement de variable $\gamma = \tan\alpha$, de mettre en évidence $1/\cos\alpha$ et d'utiliser l'identité trigonométrique appropriée [192].

tions de Josephson couplées forment un autre système qui se réalise expérimentalement et dont la synchronisation s'étudie avec le modèle de Kuramoto [255].

Exemple 25. Le modèle de Wilson-Cowan est un modèle décrivant l'activité au sein de N populations de neurones excitateurs et N populations de neurones inhibiteurs [59, 258]. Le système dynamique de dimension $2N$ est décrit par les équations différentielles [7]

$$\begin{aligned} \dot{E}_j &= -E_j + S_E\left[a_E\left(C_{EE}E_j - C_{IE}I_j - \Theta_E + P_j + \frac{\sigma}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}E_k\right)\right], \\ \dot{I}_j &= -I_j + S_I\left[a_I(C_{EI}E_j - C_{II}I_j - \Theta_I)\right], \end{aligned} \tag{2.21}$$

où les fonctions S_X avec $X \in \{E, I\}$ sont des fonctions sigmoïdes (logistiques)

$$S_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

d'inclinaison a_X et de seuil Θ_X. De plus, les quantités C_{XY} avec $X, Y \in \{E, I\}$ sont des constantes de couplage reliées aux interactions à l'intérieur et à l'extérieur des populations excitatrices et inhibitrices. Finalement, la quantité P_j est une perturbation externe spécifique à la j-ième population excitatrice et celle-ci agit à titre de paramètre de contrôle pour une bifurcation de Hopf supercritique. Soit P_H, la valeur à laquelle chaque population subit une bifurcation de Hopf. La distance μ_j de la perturbation P_j par rapport à P_H est approximativement la même pour tout j, c'est-à-dire

$$\mu \approx \mu_j = P_j - P_H,$$

lorsque $P_j - P_H \ll 1,\ \forall j \in \{1, ..., N\}$. En appliquant la réduction en phase, en moyennant la dynamique dans le temps et avec d'autres approximations mentionnées dans la référence [199], le modèle de Wilson-Cowan (2.21) se réduit au modèle de Kuramoto-Sakaguchi (2.17) avec les paramètres du tableau 2.1. Dans le tableau, nous faisons référence aux deux paramètres suivants :

$$S'_{E_j} = a_E S'[a_E(C_{EE}E_j^*(\mu) - C_{IE}I_j^*(\mu) - \Theta_E + \mu)], \tag{2.22}$$

$$S'_{I_j} = a_I S'[a_I(C_{EI}E_j^*(\mu) - C_{II}I_j^*(\mu) - \Theta_I)], \tag{2.23}$$

où $S'[x^*] = \frac{\mathrm{d}S'(x^*)}{\mathrm{d}x}$ est la dérivée première de la fonction sigmoïde évaluée au point x^* et $(E_j^*(\mu), I_j^*(\mu))$ est le point d'équilibre relié à la bifurcation de Hopf.

7. Remarquons que la dynamique n'a pas tout à fait la même forme que l'équation (1.42) en raison de la fonction sigmoïde. Elle est plutôt de la forme plus générale de l'équation (1.40). Cependant, par changement de variables, nous pouvons transformer la dynamique sous la forme des équations (1.42) [107].

Tableau 2.1 – Paramètres du modèle de Kuramoto-Sakaguchi issus d'une réduction en phase pour différents modèles d'oscillateurs.

Modèle	**Paramètres du modèle de Kuramoto-Sakaguchi** (2.17)
Ginzburg-Landau (2.18)	$\omega_j = -c_2$ $\sigma_{jk} = \sigma, \quad \forall j,k$ $A_{jk} = 1, \quad \forall j,k$ $\cos\alpha = 1 + c_1 c_2$
Oscillateurs nanoélectromécaniques (2.19)	$\omega_j = \Delta_j + \delta - \varepsilon$ $\sigma = -\dfrac{2\delta\varepsilon}{\cos\alpha}$ $A_{jk} = 1$ si $k \in \{j-1, j+1\}$ $A_{1N} = A_{N1} = 1$ $\tan\alpha = (4\delta)^{-1}$
Jonctions de Josephson (2.20)	$\omega = \dfrac{2er}{\hbar}(I_B^2 - I^2)^{1/2}$ $\sigma = \dfrac{Nr\omega(2erI_B/\hbar - \omega)}{[(L\omega^2 - 1/C)^2 + \omega^2(R+Nr)^2]^{1/2}}$ $A_{jk} = 1, \quad \forall j,k$ $\cos\alpha = \dfrac{L\omega^2 - 1/C}{[(L\omega^2 - 1/C)^2 + \omega^2(R+Nr)^2]^{1/2}}$
Wilson-Cowan (2.21)	$\omega_j = \left[S'_{E_j}S'_{I_j}C_{IE}C_{EI} - \dfrac{1}{4}(S'_{E_j}C_{EE} + S'_{I_j}C_{II})^2\right]^{1/2}$ $\sigma_{jk} = \dfrac{S'_{E_j}R_k}{2R_j}\left[1 - \left(\dfrac{S'_{E_j}C_{EE} + S'_{I_j}C_{II}}{\omega_j}\right)^2\right]^{1/2}$ $\tan\alpha_{jk} = \dfrac{S'_{E_j}C_{EE} + S'_{I_j}C_{II}}{\omega_j}$

Un modèle pour étudier la synchronisation

La nature canonique du modèle de Kuramoto est particulièrement étonnante. Ce qui est peut-être encore plus frappant est la richesse dynamique du modèle malgré son apparente simplicité et comment celui-ci permet de mieux comprendre la synchronisation. Dans cette deuxième partie, nous manipulons le modèle de Kuramoto mathématiquement pour en dégager des résultats simples sur l'émergence de la synchronisation dans le modèle. [8]

Le cas le plus simple est lorsque tous les oscillateurs j du graphe ont la même fréquence naturelle. Sans perte de généralité, les phases dans le référentiel du centre de masse sont $\varphi_j = \theta_j - \omega t$. La dynamique de Kuramoto avec fréquences identiques dans ce référentiel s'écrit alors

$$\dot{\varphi}_j = \sum_{k=1}^{N} A_{jk} \sin(\varphi_k - \varphi_j). \tag{2.24}$$

Rappelons que l'observable de synchronisation (1.52) s'écrit $R(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j}\right|$. De plus, à l'exemple 16, nous avons démontré que la valeur de l'observable $R(\boldsymbol{\varphi})$ est $r = 1$ si et seulement si tous les oscillateurs ont la même phase. Il est désormais possible de tirer nos premières conclusions sur la synchronisation pour le modèle de Kuramoto.

Pour toutes paires d'oscillateurs (j, k), les phases $\vartheta_j^* - \vartheta_k^* = \ell\pi$ où ℓ est un entier sont toujours des points d'équilibre des équations (2.24). En effet, dans un tel cas,

$$\sum_{k=1}^{N} A_{jk} \sin(\vartheta_k^* - \vartheta_j^*) = 0.$$

En particulier, le résultat signifie qu'il existe toujours un régime de synchronisation parfaite, puisque pour un entier pair ℓ, le lemme de l'exemple 16 implique que $r = 1$.

L'émergence de la synchronisation des oscillateurs dans le dernier exemple est plutôt prévisible. En effet, les oscillateurs oscillent tous à la même fréquence et sont couplés de manière à se rapprocher en phase les uns des autres. Ils peuvent ainsi se synchroniser parfaitement. L'analyse dynamique du modèle Kuramoto devient plus complexe lorsque les oscillateurs ont des fréquences naturelles différentes. Le cas le plus simple est lorsque $N = 2$. Les références [31, Chap. 2] et [230, Chap. 4 et 8] complémentent bien l'analyse effectuée dans l'exemple ci-bas.

Exemple 26. Les équations du modèle de Kuramoto pour $N = 2$ sont

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \frac{\sigma}{2} A_{12} \sin(\theta_2 - \theta_1),$$
$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + \frac{\sigma}{2} A_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

Remarquons que les boucles dans le graphe (des termes $A_{jj} = 1$ pour certains sommets j)

8. Pour plus de résultats analytiques, il vaut la peine de consulter les références [3, 66, 202, 211].

n'ont pas d'influence dans le modèle de Kuramoto en raison du couplage diffusif sinusoïdal. L'émergence de la synchronisation devrait ainsi dépendre des paramètres restant, soit les interactions entre les différents oscillateurs (σ, A_{12} et A_{21}) et les fréquences naturelles (ω_1 et ω_2).

En introduisant la différence de phase $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ et les nouveaux paramètres

$$\tau = \frac{\sigma}{2}(A_{21} + A_{12})t, \qquad \mu = \frac{2(\omega_2 - \omega_1)}{\sigma(A_{21} + A_{12})},$$

le système d'équations se simplifie à une équation d'un seul paramètre dynamique

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \mu - \sin\varphi = f(\varphi). \tag{2.25}$$

Cette équation est appelée l'*équation d'Adler* d'après Robert Adler qui a découvert l'utilité de l'équation en 1946 pour étudier les circuits LC [31].

Notons que nous avons fait une réduction dimensionnelle bien simple en introduisant la différence de phase [$N = 2$ à $n = 1$ pour l'équation (2.25)]. La possibilité de faire cette réduction est due au fait que nous pouvons fermer (point 2 de la section 2.1) le système d'équations en raison des différences de phase apparaissant dans les sinus. Bien que cela puisse paraître banal, une dimension de moins peut faire toute la différence pour effectuer une analyse dynamique. Nous réutiliserons cette technique maintes fois au chapitre 3.

Pour trouver les points d'équilibre, nous posons l'équation (2.25) égale à 0. Entre 0 et 2π, nous déduisons les points d'équilibre

$$\varphi_1^* = \arcsin(\mu), \tag{2.26}$$

$$\varphi_2^* = -\arcsin(\mu) + \pi. \tag{2.27}$$

Pour connaître leur stabilité, nous effectuons l'analyse linéaire de l'équation (2.25) [section 1.2.2]. La dérivée de f par rapport à ϕ est

$$f'(\varphi) = -\cos(\varphi).$$

En évaluant cette dérivée en φ_1^* et φ_2^*, nous avons que $f'(\varphi_1^*) = -\sqrt{1-\mu^2}$ et $f'(\varphi_2^*) = \sqrt{1-\mu^2}$. Pour $|\mu| < 1$, le point d'équilibre φ_1^* est stable, puisque $f'(\varphi_1^*)$ est négatif. De plus, le point d'équilibre φ_2^* est instable, car $f'(\varphi_2^*)$ est positif. Lorsque $|\mu| > 1$, les points d'équilibre s'annihilent et une bifurcation point-selle survient. La bifurcation survient à

$$\sigma_c = \frac{2\,|\omega_2 - \omega_1|}{A_{12} + A_{21}}, \tag{2.28}$$

soit la valeur du couplage critique à partir de laquelle les oscillateurs se synchronisent en fréquence parfaitement [section 1.3.3]. En effet, lorsque la différence de fréquences naturelles

entre les oscillateurs est plus petite que le couplage moyen $(A_{12} + A_{21})/2$ entre ceux-ci, alors les oscillateurs se synchronisent. Au contraire, si la différence de fréquences naturelles est plus grande que le couplage moyen, alors les oscillateurs n'interagissent pas suffisamment entre eux pour compenser leurs différences dynamiques.

Pour illustrer l'émergence de la synchronisation dans ce problème, nous utilisons le paramètre d'ordre $R(\boldsymbol{\theta})$ introduit à la section 1.3.3. En particulier, lorsque $N = 2$,

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\left|e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right|}{2} = \frac{\left|1 + e^{i\varphi}\right|}{2}. \tag{2.29}$$

L'évaluation de cette dernière équation au point d'équilibre stable φ_1^* (2.26) implique que

$$R^* = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}{2}}. \tag{2.30}$$

La figure 2.3 résume cet exemple.

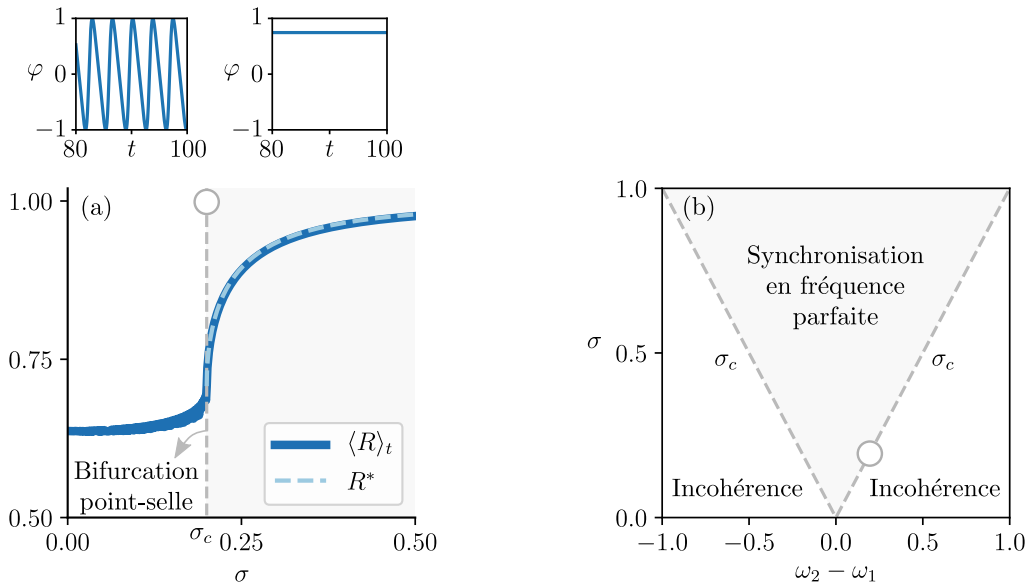


FIGURE 2.3 – (a) Émergence de la synchronisation en fréquence dans le modèle de Kuramoto avec $N = 2$ oscillateurs (diagramme de bifurcation). La courbe bleue foncée est l'observable de synchronisation moyennée dans le temps (1.56) obtenue en intégrant numériquement l'équation (2.25). La courbe bleu pâle traitillée est la solution analytique (2.30). La ligne verticale grise pointillée est la valeur critique σ_c (2.28) pour laquelle la bifurcation point-selle survient. Les graphiques du dessus montrent une solution où les oscillateurs sont incohérents (gauche) et une solution où les oscillateurs sont synchronisés parfaitement en fréquence (droite), ce qui se traduit par une différence de phase φ constante. Paramètres : $A_{12} = A_{21} = 1$, $\omega_1 = -0.1$ et $\omega_2 = 0.1$. (b) Diagramme des phases pour $A_{12} = A_{21} = 1$. Le point blanc au contour gris représente la position de la valeur de couplage critique en (a). La région grise est appelée une langue de Arnold [31].

Au dernier exemple, nous avons choisi les fréquences naturelles de manière à ce que $\sum_{j=1}^{N} \omega_j = 0$. Bien que ce ne soit pas essentiel de l'imposer, cette condition est utile puisqu'elle est nécessaire (mais non suffisante) pour l'existence d'un point d'équilibre pour chaque phase θ_j.

En effet, pour un nombre d'oscillateurs N quelconque, un point d'équilibre pour chaque phase θ_j existe dans le modèle de Kuramoto (2.16) si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{N} \dot{\theta}_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} \omega_j + \sum_{j,k=1}^{N} A_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \omega_j, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que la fonction sinus est impaire à la dernière égalité.

Cela dit, le cas du modèle de Kuramoto avec $N = 2$ est complètement connu. Dès que N est plus grand ou égal à 3, l'analyse dynamique devient plus corsée. Il est ainsi nécessaire de recourir à des méthodes plus raffinées pour dégager des résultats analytiques [31, 65, 201]. Lorsque la contribution du graphe dans l'équation (2.16) est négligée ou que le nombre d'oscillateurs est grand ($N \to \infty$), il est possible de réduire la dimension N de la dynamique de phase considérablement. À la prochaine section, nous présentons deux méthodes qui permettent de réaliser une telle réduction.

2.3 Réductions dimensionnelles d'une dynamique de phase

À la dernière section, nous avons présenté une réduction dimensionnelle bien particulière : celle qui permet d'obtenir une dynamique de phase. Dans ce cas, nous passions d'un système dynamique à DN dimensions à un système dynamique à N dimensions décrivant l'évolution temporelle de la phase de chaque oscillateur dans le graphe. Bien qu'il soit plus aisé d'analyser le système avec ce nouveau système dynamique, il demeure généralement ardu de dégager des résultats mathématiques donnant une intuition de la synchronisation du système quand $N \gg 1$.

Les deux méthodes de réduction dimensionnelle présentées dans cette section datent de 2008 et 1994 respectivement, mais sont encore pleinement d'actualité [27, 201]. Dans la dernière décennie, de multiples progrès dans la compréhension de ces approches et leurs liens ont été accomplis. À l'aide de ces récents progrès, il nous sera possible de faire une présentation originale et concise de ces méthodes de réduction tout en référant aux articles importants dans la littérature.

Considérons d'abord la classe des dynamiques de phase telles que

$$\dot{\theta}_j = g_j(\boldsymbol{\theta}) + f_j(\boldsymbol{\theta}) e^{i\theta_j} + \overline{f_j(\boldsymbol{\theta})} e^{-i\theta_j}, \quad j \in \{1, ..., N\}, \tag{2.31}$$

où $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \quad \dots \quad \theta_N)^T$ et les fonctions lisses $f_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ et $g_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sont 2π-périodiques selon chaque argument. De plus, $\overline{f_j(\boldsymbol{\theta})}$ désigne le conjugué complexe de $f_j(\boldsymbol{\theta})$. Tous les modèles utilisés au chapitre 3 respectent cette équation, soit les modèles de Winfree, Kuramoto et thêta.

Exemple 27. Le modèle de Kuramoto (2.16) est de la forme de l'équation (2.31). En effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned} g_j(\boldsymbol{\theta}(t)) &= \omega_j, \ \forall t \in \mathcal{T}, \\ f_j(\boldsymbol{\theta}(t)) &= -\frac{\sigma}{2iN} \sum_{k=1}^{N} A_{jk} e^{-i\theta_k(t)}. \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que les fonctions f et g sont les mêmes pour tout j, nous déduisons que

$$\dot{\theta}_j = g(\boldsymbol{\theta}) + f(\boldsymbol{\theta}) e^{i\theta_j} + \overline{f(\boldsymbol{\theta})} e^{-i\theta_j}, \tag{2.32}$$

ce qui correspond à une dynamique d'oscillateurs identiques. Dans la littérature, l'équation (2.32) apparaît sous plusieurs formes [44, 95, 249]. En particulier, remarquons que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= h_1(\boldsymbol{\theta}) + h_2(\boldsymbol{\theta}) \cos\theta_j + h_3(\boldsymbol{\theta}) \sin\theta_j \\ &= h_1(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2}[h_2(\boldsymbol{\theta}) - ih_3(\boldsymbol{\theta})] e^{i\theta_j} + \frac{1}{2}[h_2(\boldsymbol{\theta}) + ih_3(\boldsymbol{\theta})] e^{-i\theta_j} \\ &= g(\boldsymbol{\theta}) + f(\boldsymbol{\theta}) e^{i\theta_j} + \bar{f}(\boldsymbol{\theta}) e^{-i\theta_j}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

où $g(\boldsymbol{\theta}) = h_1(\boldsymbol{\theta})$, $f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}[h_2(\boldsymbol{\theta}) - ih_3(\boldsymbol{\theta})]$ et h_1, h_2, h_3 sont des fonctions à valeurs réelles. De plus, nous observons souvent la forme plus concise

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \omega + \mathrm{Im}\left[H(\boldsymbol{\theta}) e^{-i\theta_j}\right] \\ &= \omega + \mathrm{Im}\left[(\mathrm{Re}[H(\boldsymbol{\theta})] + i\mathrm{Im}[H(\boldsymbol{\theta})])\,(\cos\theta_j - i\sin\theta_j)\right] \\ &= \omega + \mathrm{Im}[H(\boldsymbol{\theta})] \cos\theta_j - \mathrm{Re}[H(\boldsymbol{\theta})] \sin\theta_j \\ &= h_1(\boldsymbol{\theta}) + h_2(\boldsymbol{\theta}) \cos\theta_j + h_3(\boldsymbol{\theta}) \sin\theta_j, \end{aligned} \tag{2.34}$$

où H est une fonction à valeurs complexes et

$$\begin{aligned} h_1(\boldsymbol{\theta}) &= \omega, \\ h_2(\boldsymbol{\theta}) &= \mathrm{Im}[H(\boldsymbol{\theta})], \\ h_3(\boldsymbol{\theta}) &= -\mathrm{Re}[H(\boldsymbol{\theta})]. \end{aligned}$$

Dans les prochaines sous-sections, nous réduisons la dimension de ces dernières dynamiques de phases générales avec les approches les plus connues. Notons que les approches présentées ne s'inscrivent pas directement dans le schéma de réduction (2.1), mais les défis restent les mêmes : trouver les observables et fermer les équations.

2.3.1 Réduction de Ott-Antonsen

L'Ansatz de Ott et Antonsen (OA) a été introduit en 2008 afin de réduire un système d'oscillateurs de taille infini ($N \to \infty$) en un système de basse dimension [187]. Cette découverte majeure a non seulement permis d'effectuer des analyses mathématiques plus poussées, mais à aussi permis l'approfondissement de nos connaissances sur la synchronisation [1, 27, 92, 201].

Pour les équations différentielles (2.31) avec $g_j(\boldsymbol{\theta}(t)) = \omega_j \in \mathbb{R}$ et des fonctions f_j et $\bar{f}_j$ identiques pour tout $j \in \mathcal{V}$, la méthode de réduction va comme suit. En prenant la limite $N \to \infty$, nous supposons qu'il y a une densité de probabilité de fréquences naturelles $\Omega(\omega)$, où $\omega \in \mathbb{R}$, directement reliée à la distribution discrète des ω_j. De plus, nous définissons un processus stochastique $\{\Theta_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ où la variable aléatoire Θ_t à un certain temps t prend des valeurs ϑ dans l'intervalle $[0, 2\pi)$. Afin de décrire l'état du système d'oscillateurs au temps t, nous introduisons la densité de probabilité conditionnelle $\rho_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega)$, soit une fonction qui dépend explicitement du temps, de la phase et d'une fréquence connue tirée de $\Omega(\omega)$.[9] Cette densité de probabilité est normalisée selon l'équation

$$\int_0^{2\pi} \rho_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega)\, \mathrm{d}\vartheta = 1, \tag{2.35}$$

ce qui est valide pour tout temps t et pour toute fréquence ω. L'évolution de la densité de probabilité respecte l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho_{\Theta_t}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(v_{\Theta_t}\, \rho_{\Theta_t}) = 0, \tag{2.36}$$

où, avec les équations (2.31), la vitesse de dérive s'écrit

$$v_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega) = \omega + F(t)e^{i\vartheta} + \bar{F}(t)e^{-i\vartheta}, \tag{2.37}$$

$$F(t) = \lim_{N\to\infty} f(\boldsymbol{\theta}(t)). \tag{2.38}$$

Le passage à l'équation de continuité (2.36) est loin d'être évident. Dans la littérature, l'argument intuitif, mais insuffisant, pour introduire l'équation de continuité est d'évoquer la conservation du nombre d'oscillateurs [187, 193]. Plus formellement, il est possible d'utiliser la limite de Vlasov [27, 139] ou de suivre l'approche élaborée dans l'article [71]. Dans ce mémoire, nous ne développerons pas plus le sujet afin d'éviter les notions plus techniques reliées à la théorie de la mesure, la topologie, etc. La discussion et les références dans le livre [31, Chap. 4] sont particulièrement intéressantes par rapport à ce sujet.

Cela dit, l'équation de continuité (2.36) se simplifie en décomposant la densité de probabilité $\rho_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega)$ en série de Fourier :

$$\rho_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{Z}_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\mathcal{Z}_m(\omega, t)e^{-im\vartheta} + \text{c.c.}\right)\right], \tag{2.39}$$

9. Contrairement à la majorité des auteurs, nous choisissons une notation un peu plus lourde pour éviter le plus possible les ambiguïtés mathématiques pouvant survenir dans la démarche.

où c.c. signifie que la suite de l'équation dans la parenthèse est le complexe conjugué du terme précédent. Il est particulièrement utile d'utiliser cette abréviation pour alléger la démarche. De plus, les coefficients de Fourier sont

$$\mathcal{Z}_m(\omega, t) = \int_0^{2\pi} \rho_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega) e^{-im\vartheta} \, \mathrm{d}\vartheta, \tag{2.40}$$

où nous remarquons que pour $m = 0$, $\mathcal{Z}_0 = 1$ puisque $\rho_{\Theta_t}(\vartheta \,|\, \omega)$ respecte l'équation de normalisation (2.35). En substituant la densité de probabilité (2.39) dans l'équation de continuité (2.36) et en regroupant les termes, nous avons que

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\dot{\mathcal{Z}}_m e^{-im\vartheta} - im\omega \mathcal{Z}_m e^{-im\vartheta} - i(m-1) F \mathcal{Z}_m e^{-i(m-1)\vartheta} - i(m+1) \bar{F} \mathcal{Z}_m e^{-i(m+1)\vartheta} \Big) \\ - i\bar{F} e^{i\vartheta} + \text{c.c.}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

où c.c. est le complexe conjugué de tous les termes qui le précède. Pour le troisième terme de la parenthèse dans l'équation (2.41), nous effectuons le changement d'indice $\ell = m - 1$, ce qui implique que

$$\sum_{m=1}^{\infty} i(m-1) F \mathcal{Z}_m e^{-i(m-1)\vartheta} = \sum_{\ell=1}^{\infty} i\ell F \mathcal{Z}_{\ell+1} e^{-i\ell\vartheta},$$

où la somme sur ℓ commence à $\ell = 1$, car le terme de la somme pour $\ell = 0$ est nul. En ce qui concerne le quatrième terme de la parenthèse et le dernier terme hors de la somme dans l'équation (2.41), le changement d'indice $s = m + 1$ permet de déduire que

$$\begin{aligned} -i\bar{F} e^{i\vartheta} - \sum_{m=1}^{\infty} i(m+1) \bar{F} \mathcal{Z}_m e^{-i(m+1)\vartheta} &= i\bar{F} e^{i\vartheta} + \sum_{s=2}^{\infty} is\bar{F} \mathcal{Z}_{s-1} e^{-is\vartheta} \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} is\bar{F} \mathcal{Z}_{s-1} e^{-is\vartheta}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathcal{Z}_0 = 1$ à la dernière égalité. En redéfinissant les indices ℓ et s comme m, l'équation (2.41) s'écrit

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\dot{\mathcal{Z}}_m - im\omega \mathcal{Z}_m - imF \mathcal{Z}_{m+1} - im\bar{F} \mathcal{Z}_{m-1} \right) e^{-im\vartheta} + \text{c.c.},$$

ce qui est vrai si et seulement si les équations de récurrence

$$\dot{\mathcal{Z}}_m = im \left(\omega \mathcal{Z}_m + F \mathcal{Z}_{m+1} + \bar{F} \mathcal{Z}_{m-1} \right), \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{2.42}$$

sont vérifiées, de même que le complexe conjugué de ces équations.

Il semble que nous ne soyons pas plus avancés puisque nous nous retrouvons avec une infinité d'équations (2.42) pour des coefficients de Fourier $\mathcal{Z}_m(\omega, t)$. Autrement dit, le système d'équations n'est pas fermé : chaque équation différentielle dépend d'une observable d'ordre inférieur et supérieur. Cependant, en effectuant l'Ansatz

$$\mathcal{Z}_m = (\mathcal{Z}_1)^m \equiv \mathcal{Z}^m, \tag{2.43}$$

et en substituant l'Ansatz dans les équations de récurrence (2.42), le système d'équations infini se réduit en une seule équation différentielle complexe, soit

$$\dot{\mathcal{Z}} = i\left(F\mathcal{Z}^2 + \omega\mathcal{Z} + \bar{F}\right). \tag{2.44}$$

L'équation (2.43) est appelée l'*Ansatz de Ott-Antonsen* (Ansatz OA) d'après l'article de Ott et Antonsen en 2008 [187].

Pour mieux comprendre l'Ansatz OA, il est pertinent de l'appliquer à l'équation (2.39). En effet, il se trouve que l'ensemble de fonctions du type

$$\rho_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left[\mathcal{Z}(\omega,t)e^{-i\vartheta}\right]^m + \text{c.c.}\right)\right], \tag{2.45}$$

définit une sous-variété $\mathcal{M}_{\text{OA}}$ de l'espace infini $\mathcal{M}$ des densités conditionnelles ρ_{Θ_t} (2.39) [187]. Celle-ci est communément appelée la *variété de Ott-Antonsen* ou la *sous-variété de Poisson*. Une particularité importante de la sous-variété est qu'elle est *invariante*, c'est-à-dire que toute densité appartenant à $\mathcal{M}_{\text{OA}}$ (de la forme (2.45)) au temps $t = 0$ restera dans $\mathcal{M}_{\text{OA}}$ pour tout $t > 0$ [160, 187]. Plusieurs auteurs, dont Ott et Antonsen en 2009, argumentent même que la sous-variété est attractive, c'est-à-dire, grossièrement, que même des densités n'appartenant pas à $\mathcal{M}_{\text{OA}}$ convergent vers des densités appartenant à $\mathcal{M}_{\text{OA}}$ lorsque $t \to \infty$ [27, 188, 190]. Cependant, il se trouve que c'est généralement faux, comme démontré dans les récents travaux de Mirollo [71, 168]. L'attractivité dépend de la densité de probabilité des fréquences et des conditions initiales [168, 190].

En mots, l'Ansatz OA impose que les observables complexes d'ordre supérieur $\mathcal{Z}_m$ soient égales aux puissances de l'observable complexe d'ordre 1. De l'équation (2.40), l'observable complexe d'ordre 1 s'écrit

$$\mathcal{Z}(\omega,t) = \int_0^{2\pi} \rho_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega)e^{i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta. \tag{2.46}$$

Pour avoir une observable indépendante des fréquences, il suffit d'intégrer par rapport ω :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\omega)\mathcal{Z}(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \Omega(\omega)\rho_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega)e^{-i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{2.47}$$

où nous avons utilisé la définition des coefficients de Fourier (2.40) à la deuxième égalité. En observant attentivement cette dernière équation, nous remarquons qu'elle représente la version continue de l'observable complexe (1.54) introduite au chapitre 1. Similairement, les observables

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\omega)\mathcal{Z}_m(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} \Omega(\omega)\rho_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega)e^{-im\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\omega,\end{aligned} \tag{2.48}$$

sont analogues aux fonctions

$$Z_m(\boldsymbol{\theta}) = R_m(\boldsymbol{\theta})e^{i\Phi_m(\boldsymbol{\theta})} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{im\theta_j}, \tag{2.49}$$

soit les *observables de Kuramoto-Daido* [54], une généralisation de l'observable de Kuramoto.

Cela a pour conséquence que le module de l'observable (2.47) représente une observable de synchronisation [section (1.3.3)]. De plus, s'il est possible d'évaluer l'intégrale selon les fréquences à l'équation (2.47), il s'ensuit que la dynamique réduite (2.44) régit l'évolution de l'observable complexe de synchronisation, ce qui la rend particulièrement informative sur l'émergence de la synchronisation dans le système d'oscillateurs.

La possibilité de résoudre l'intégrale à l'équation (2.47) dépend toutefois de la densité de probabilité $\Omega(\omega)$. Le choix de densité de fréquences à un impact majeur sur les courbes de synchronisation [185]. Malgré tout, il est standard d'utiliser une distribution de Cauchy [10] dont la densité est

$$\Omega(\omega) = \frac{\gamma}{\pi\left[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2\right]}, \tag{2.50}$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ fait varier la largeur de la densité et $\omega_0 \in \mathbb{R}$ permet d'effectuer des translations horizontales de la densité. Même si ses moments ne sont pas définis, la distribution de Cauchy est utile puisqu'elle possède des pôles à $\omega = \omega_0 \pm i\gamma$. Cette caractéristique permet d'intégrer l'équation (2.47) dans le plan complexe [187, 201]. Le choix le plus simple est toutefois le cas des fréquences identiques pour lequel la densité de probabilité des fréquences est une fonction delta de Dirac $\delta(\omega-\omega')$ où $\omega' \in \mathbb{R}$ est la fréquence des oscillateurs. L'équation (2.48) devient alors simplement $Z_m(t) = \mathcal{Z}_m(\omega', t)$.

Dans le prochain exemple, nous montrons que la méthode de réduction OA s'applique pour la dynamique de Kuramoto-Sakaguchi sur des graphes modulaires dont les oscillateurs dans chaque communauté ont des fréquences identiques.

Exemple 28. Soit le modèle de Kuramoto-Sakaguchi (2.17) avec $\sigma_{jk} = \sigma$ et $\alpha_{jk} = \alpha$ pour toutes paires d'oscillateurs $(j,k) \in \mathcal{V}\times\mathcal{V}$. Considérons que la structure du graphe est modulaire et décrite par le SBM à n modules [sous-section 1.1.4]. Lorsque le SBM est dense [267], c'est-à-dire que $\langle k(A)\rangle_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(N)$, nous pouvons faire l'approximation qu'une réalisation a de l'ensemble est approximativement égale à la matrice moyenne $\langle A\rangle_{\text{SBM}} \equiv \langle A\rangle$ (1.24). Or, le modèle est décrit par les équations différentielles

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_j &= \omega_j + f_j(\boldsymbol{\theta})e^{i\theta_j} + \overline{f_j(\boldsymbol{\theta})}e^{-i\theta_j}\\ &= \omega_j + \frac{\sigma}{N}\sum_{k=1}^{N}\langle A\rangle_{jk}\sin(\theta_k-\theta_j-\alpha),\end{aligned} \tag{2.51}$$

10. Dans la littérature de la synchronisation, il est plus standard d'utiliser la terminologie « Lorentzian distribution ».

où les fonctions f_j sont telles que

$$f_j(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\sigma}{2iN}\sum_{k=1}^{N}\langle A\rangle_{jk}e^{-i(\theta_k-\alpha)}. \tag{2.52}$$

Des équations similaires ont été utilisées dans plusieurs articles [1, 128, 157, 200] et elles se sont avérées utiles dans l'étude des chimères [chapitre 3]. En considérant des oscillateurs identiques au sein des communautés, c'est-à-dire $\omega_j = \omega_{s(j)}$ pour tout $j \in \mathcal{V}$ où $h: \mathcal{V} \to \{1, ..., n\}$, l'équation (2.51) implique que

$$\dot{\theta}_j = \omega_{s(j)} + \frac{\sigma}{N}\sum_{\nu=1}^{n} p_{s(j)\nu}\sum_{k\in B_\nu}\sin(\theta_k - \theta_{s(j)} - \alpha). \tag{2.53}$$

De plus, nous introduisons les n observables complexes mésoscopiques

$$Z_\mu(\boldsymbol{\theta}) = R_\mu(\boldsymbol{\theta})e^{i\Phi_\mu(\boldsymbol{\theta})} = \frac{1}{N_\mu}\sum_{k\in B_\mu} e^{i\theta_k}, \tag{2.54}$$

où $R_\mu(\boldsymbol{\theta})$ est le μ-ième observable de synchronisation mésoscopique (1.57) et $\Phi_\mu(\boldsymbol{\theta})$ est le μ-ième observable de phase mésoscopique, ce qui permet de réécrire l'équation (2.52) comme

$$f_j(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\sigma}{2iN}\sum_{\nu=1}^{n} N_\nu p_{s(j)\nu}\bar{Z}_\nu(\boldsymbol{\theta})e^{i\alpha}. \tag{2.55}$$

Dans la limite $N \to \infty$, nous supposons qu'il existe n densités de probabilité $\rho^\mu_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega_\mu)$ pour tout $\mu \in \{1, ..., n\}$. Celles-ci doivent respecter les n équations de continuité

$$\frac{\partial\rho^\mu_{\Theta_t}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\vartheta_\mu}\left[\rho^\mu_{\Theta_t}\left(\omega_\mu + F_\mu(t)e^{i\vartheta} + \bar{F}_\mu(t)e^{-i\vartheta}\right)\right] = 0, \tag{2.56}$$

où, sachant que $\Omega(\omega) = \delta(\omega - \omega_\mu)$,

$$\begin{aligned} F_\mu(t) &= -\frac{\sigma}{2i}\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu p_{\mu\nu}\bar{\tilde{Z}}_\nu(t)e^{i\alpha}, \\ r_\mu &= \lim_{N\to\infty}\frac{N_\mu}{N} \in (0,1), \\ \tilde{Z}_\mu(t) &= \int_0^{2\pi}\rho^\mu_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega_\mu)e^{-i\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta. \end{aligned}$$

Les fonctions F_μ et $\tilde{Z}_\mu$ sont les versions continues de $f_j(\boldsymbol{\theta})$ (2.55) et $Z_\mu(\boldsymbol{\theta})$ (2.54) respectivement. Les n densités de probabilité se décomposent en série de Fourier :

$$\rho^\mu_{\Theta_t}(\vartheta\,|\,\omega_\mu) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left[\tilde{Z}_\mu(t)e^{-i\vartheta}\right]^m + \text{c.c.}\right)\right],$$

où nous avons appliqué l'Ansatz OA,

$$[\tilde{Z}_m]_\mu = [\tilde{Z}_\mu]^m,$$

aux coefficients de Fourier pour chaque communauté. En substituant les densités de probabilité dans les équations de continuité (2.56), nous en tirons la dynamique réduite à n dimensions

$$\dot{\tilde{Z}}_\mu = \omega_\mu + \frac{\sigma}{2}\sum_{\nu=1}^{q} r_\nu p_{\mu\nu}[\tilde{Z}_\nu e^{-i\alpha} - \bar{\tilde{Z}}_\nu \tilde{Z}_\mu^2 e^{i\alpha}]. \tag{2.57}$$

En posant $\tilde{Z}_\mu = \tilde{R}_\mu e^{\tilde{\Phi}_\mu}$, nous déduisons les $2n$ équations réelles [11]

$$\dot{\tilde{R}}_\mu = \sigma\left(\frac{1-\tilde{R}_\mu^2}{2}\right)\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu p_{\mu\nu}\tilde{R}_\nu \cos(\tilde{\Phi}_\nu - \tilde{\Phi}_\mu - \alpha), \tag{2.58}$$

$$\dot{\tilde{\Phi}}_\mu = \omega_\mu + \sigma\left(\frac{1+\tilde{R}_\mu^2}{2\tilde{R}_\mu}\right)\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu p_{\mu\nu}\tilde{R}_\nu \sin(\tilde{\Phi}_\nu - \tilde{\Phi}_\mu - \alpha). \tag{2.59}$$

Il se trouve que la dynamique (2.53) avec $N < \infty$ du dernier exemple se réduit exactement à une dynamique à $3n$ dimensions avec la *réduction de Watanabe-Strogatz*, ce qui est l'objet de la prochaine sous-section.

2.3.2 Réduction de Watanabe-Strogatz

En 1994, Watanabe et Strogatz ont constaté que la dynamique d'oscillateurs identiques (2.32) est en fait un système partiellement intégrable et qu'il existe donc une représentation de petite dimension de la dynamique [248, 249]. Une de leurs contributions majeures a été de trouver une transformation qui permet de résoudre exactement les équations du type (2.32). Ce n'est que 15 ans plus tard que les raisons précises de l'efficacité de la transformation ont été révélées par Marvel, Mirollo et Strogatz [150, 160].

Tout d'abord, transformons la dynamique de phase (2.32) en effectuant le changement de variable $\theta_j \longmapsto z_j = e^{i\theta_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$. La dérivée de z_j par rapport au temps est

$$\dot{z}_j = i\left[F z_j^2 + G z_j + \bar{F}\right], \tag{2.60}$$

où $F : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ et $G : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions du temps. Dans les cas considérés, les fonctions F et G pourront toujours être déduites à partir des fonctions f et g, qui sont 2π-périodiques. Sous cette forme, la nature du système (2.32) devient plus claire, c'est un système d'équations différentielles de N équations de Ricatti [150, 160]. Cette remarque est cruciale, puisque les équations de Ricatti possèdent des solutions sous la forme de fonctions rationnelles linéaires [209]. Avec cette idée en tête, il suffit ainsi de trouver une transformation rationnelle linéaire applicable à l'équation (2.60).

11. Voir les équations pratiques (3.72) du chapitre 3 pour obtenir les équations différentielles pour le module et la phase d'une équation différentielle complexe.

Soit l'ensemble des transformations rationnelles linéaires (de Möbius)

$$\mathscr{G} = \left\{ L : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;\middle|\; L(\mathcal{W}) = \frac{a\mathcal{W} + b}{c\mathcal{W} + d} \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}.$$

Alors, il est possible de démontrer que le doublet $(\mathscr{G}, \circ)$ forme un groupe avec la loi de composition $\circ$, soit la composition de fonctions. Ce groupe est nommé le *groupe de Möbius*. De plus, soit le sous-groupe $\mathscr{H} \leq \mathscr{G}$ tel que

$$\mathscr{H} = \left\{ D : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \;\middle|\; D \text{ est bijective et analytique sur } \mathbb{D} \right.$$
$$\left. \text{et } D(\mathcal{W}) = \frac{e^{i\varphi}\mathcal{W} + \mathcal{Z}}{1 + e^{i\varphi}\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}} \text{ où } \varphi \in \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{Z} \in \mathbb{D} \right\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes analytiques [12] sur le disque unité

$$\mathbb{D} = \left\{ \mathcal{W} \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathcal{W}| \leq 1 \right\}.$$

Nous démontrons aisément que la transformation

$$D^{-1}(\mathcal{W}) = e^{-i\varphi} \frac{\mathcal{W} - \mathcal{Z}}{1 - \bar{\mathcal{Z}}\mathcal{W}}. \tag{2.61}$$

est la transformation inverse de D, c'est-à-dire que $D^{-1}(D(\mathcal{W})) = D(D^{-1}(\mathcal{W})) = \mathcal{W}$.

La découverte de Watanabe et Strogatz est d'avoir remarqué que la fonction $D_t \in \mathscr{H}$ [13] décrit l'évolution temporelle des oscillateurs régie par le système dynamique $(\mathbb{T}^N, D)$. Plus précisément, la solution aux équations (2.60) s'écrit

$$z_j(t) = D_t(w_j) = \frac{e^{i\varphi(t)} w_j + \mathcal{Z}(t)}{1 + e^{i\varphi(t)} \bar{\mathcal{Z}}(t) w_j}, \tag{2.62}$$

où les fonctions $w_j = e^{i\psi_j} \in \mathbb{T}^1$ sont indépendantes du temps. Nous remarquons toutefois que les paramètres du sous-groupe, $\mathcal{Z}(t)$ et $\varphi(t)$, sont indéterminés. Nous trouvons leur équation différentielle en dérivant les équations (2.62) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{z}_j &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{e^{i\varphi} w_j + \mathcal{Z}}{1 + e^{i\varphi} \bar{\mathcal{Z}} w_j} \right] \\ &= \frac{\dot{\mathcal{Z}} + i \left[(1 - |\mathcal{Z}|^2)\dot{\varphi} - i(\bar{\mathcal{Z}}\dot{\mathcal{Z}} - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}\mathcal{Z}) \right] e^{i\varphi} w_j - \dot{\bar{\mathcal{Z}}} e^{2i\varphi} w_j^2}{(1 + \bar{\mathcal{Z}} e^{i\varphi} w_j)^2}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

12. Notons que nous avons paramétré la fonction D de manière non conventionnelle. Typiquement, $D(\mathcal{W}) = e^{\varphi'} \frac{\beta - \mathcal{W}}{1 - \beta\mathcal{W}}$. Notons aussi que $\mathscr{H}$ forme un groupe de Lie tridimensionnel de paramètres réels φ, $\mathrm{Re}[\mathcal{Z}]$, $\mathrm{Im}[\mathcal{Z}]$.

13. Rappelons l'abus de notation $D_t(\mathcal{W}) = D(t, \mathcal{W})$. De plus, notons que dans l'article [249], la transformation prend une forme différente, mais équivalente [160, Sec. IV. A.].

Les équations (2.61-2.62) impliquent que

$$e^{i\varphi} w_j = e^{i\varphi} D^{-1}(z_j) = \frac{z_j - \mathcal{Z}}{1 - \bar{\mathcal{Z}} z_j}. \tag{2.64}$$

En substituant cette relation dans les équations (2.63), celles-ci se réarrangent sous la forme des équations de Ricatti (2.60) :

$$\dot{z}_j = i \left\{ \left[\frac{i\dot{\bar{\mathcal{Z}}} - \bar{\mathcal{Z}}\dot{\varphi}}{1 - |\mathcal{Z}|^2} \right] z_j^2 + \left[\frac{i(\bar{\mathcal{Z}}\dot{\mathcal{Z}} - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}\mathcal{Z}) + (1 - |\mathcal{Z}|^2)\dot{\varphi}}{1 - |\mathcal{Z}|^2} \right] z_j + \left[\frac{-i\dot{\bar{\mathcal{Z}}} - \mathcal{Z}\dot{\varphi}}{1 - |\mathcal{Z}|^2} \right] \right\}. \tag{2.65}$$

Par comparaison avec l'équation (2.60), nous obtenons le système d'équations

$$F = \frac{i\dot{\bar{\mathcal{Z}}} - \bar{\mathcal{Z}}\dot{\varphi}}{1 - |\mathcal{Z}|^2}, \qquad G = \frac{\dot{\varphi} + i\bar{\mathcal{Z}}\dot{\mathcal{Z}}}{1 - |\mathcal{Z}|^2} - F\mathcal{Z}.$$

En solutionnant ce dernier système pour $\dot{Z}$ et $\dot{\varphi}$, nous concluons que la dynamique réduite s'écrit

$$\dot{\mathcal{Z}} = i\left(F\mathcal{Z}^2 + G\mathcal{Z} + \bar{F}\right), \tag{2.66}$$

$$\dot{\varphi} = G + F\mathcal{Z} + \bar{F}\bar{\mathcal{Z}}, \tag{2.67}$$

soit une équation de Ricatti pour $\mathcal{Z}$ tout comme les équations de départ (2.60) et une équation pour φ de la même forme que les équations (2.32). [14] L'observable $\mathcal{Z}$ ne doit pas être confondue avec les observables complexes $Z(\boldsymbol{\theta})$ (1.54), $\mathcal{Z}$ (2.46) ou $\tilde{Z}$ (2.47). L'équation (2.62) implique toutefois que l'observable $Z(\boldsymbol{\theta})$ est reliée à $\mathcal{Z}$, φ et w_j :

$$Z(\boldsymbol{\theta}(t)) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{e^{i\varphi(t)} w_j + \mathcal{Z}(t)}{1 + e^{i\varphi(t)}\bar{\mathcal{Z}}(t) w_j}. \tag{2.68}$$

À partir des variables de la dynamique réduite, il est ainsi possible de mesurer la synchronisation en prenant le module de l'équation (2.68).

Cela dit, en définissant $\mathcal{Z} = \rho e^{i\Psi}$, nous déduisons le système d'équations réelles

$$\dot{\rho} = \frac{i}{2}(G - \bar{G}) + \left(\frac{1 - \rho^2}{2i}\right)\left[F e^{i\Psi} - \bar{F} e^{-i\Psi}\right], \tag{2.69}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{2}(G + \bar{G}) + \left(\frac{1 + \rho^2}{2\rho}\right)\left[F e^{i\Psi} + \bar{F} e^{-i\Psi}\right], \tag{2.70}$$

$$\dot{\varphi} = G + \rho\left[\bar{F} e^{-i\Psi} + \bar{F} e^{-i\Psi}\right]. \tag{2.71}$$

Afin d'intégrer les équations (2.69-2.71) et pour évaluer l'observable complexe $Z(\boldsymbol{\theta})$, il est nécessaire de connaître les constantes w_j. Puisque ces constantes sont indépendantes du temps,

14. Pour avoir une meilleure intuition physique de $\mathcal{Z}$ et φ, voir les références [27, 91, 160, 249].

celles-ci sont déterminées par les conditions initiales de la dynamique complète $z_j(0) = e^{i\theta_j(0)}$ à partir de la relation

$$w_j = e^{i\psi_j} = e^{-i\varphi(0)} \frac{e^{i\theta_j(0)} - \rho(0) e^{i\Psi(0)}}{1 - \rho(0)\, e^{i[\theta_j(0) - \Psi(0)]}}, \tag{2.72}$$

où nous avons utilisé l'équation (2.64). Les constantes w_j (ou ψ_j) sont également dépendantes des conditions initiales de la dynamique réduite $\rho(0)$, $\Psi(0)$ et $\varphi(0)$. Il y a alors $N+3$ contraintes à respecter pour trouver les constantes w_j, c'est-à-dire les N contraintes (2.72) et trois contraintes à déterminer pour $\rho(0)$, $\Psi(0)$ et $\varphi(0)$. Le choix le plus simple est d'imposer $\rho(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$ et $\varphi(0) = 0$, de sorte que $\psi_j = \theta_j(0)$ pour tout $j \in \{1, ..., N\}$ [249]. [15]

Il se trouve que les constantes w_j sont des *constantes du mouvement*. Par constantes du mouvement, nous entendons des fonctions des variables z_j (ou θ_j) de l'espace des états qui sont invariantes sous l'action de D_t. Comme démontré dans la Réf. [160, Sec. V. A.] à l'aide des résultats de la Réf. [249], les constantes du mouvement s'expriment comme des birapports (*cross-ratio* en anglais), soit des fonctions

$$(z_i, z_j\ ; z_k, z_\ell) = \frac{(z_k - z_i)(z_\ell - z_j)}{(z_k - z_j)(z_\ell - z_i)}, \tag{2.73}$$

où $i, j, k, \ell \in \{1, ..., N\}$. Les birapports sont invariants sous les transformations linéaires [150] de telle sorte que

$$(D_t(z_i), D_t(z_j)\ ; D_t(z_k), D_t(z_\ell)) = (z_i, z_j; z_k, z_\ell). \tag{2.74}$$

Les différentes permutations d'indices à l'équation (2.73) donnent d'autres constantes du mouvement dont $N-3$ d'entre elles sont indépendantes [160]. En utilisant les références [160, Sec. V. A.] et [249, Appendix B.5], il est possible de démontrer que les birapports sont directement reliés aux constantes w_j.

En bref, les équations (2.69-2.71) et $N-3$ constantes du mouvement décrivent entièrement le système d'oscillateurs identiques lorsque $N > 3$. Dans le prochain exemple, nous réduisons la dimension de la dynamique de Kuramoto-Sakaguchi sur le SBM moyen en une dynamique réduite exacte.

Exemple 29. Reprenons les équations (2.53) de l'exemple 28 où nous avions appliqué la méthode de Ott-Antonsen. Puisque le système est composé de n communautés d'oscillateurs identiques, la méthode de Watanabe-Strogatz s'applique à chacune des communautés [200]. La transformation $\theta_j \mapsto z_j = e^{i\theta_j}$ permet d'écrire les équations (2.53) comme

$$\dot{z}_j = i\left[F_{s(j)}\, z_j^2 + G_{s(j)}\, z_j + \bar{F}_{s(j)}\right], \tag{2.75}$$

15. Dans un tel cas, le flot $D_t(w_j)$ change selon les différentes conditions initiales $\theta_j(0)$ choisies. Cela n'est pas l'approche à privilégier pour étudier la dynamique réduite [249]. En effet, il est plus standard d'avoir différentes solutions aux équations (2.69-2.71) à partir de différentes conditions initiales dans l'espace des états et surtout, régies par un même flot $D_t(w_j)$. Cela nécessite donc de contraindre les constantes w_j plutôt que les variables réduites ρ, Ψ, φ. Trouver ces contraintes n'est toutefois pas trivial et nous dirigeons ainsi le lectorat vers la section 4.2 de l'article original [249] pour les détails.

où s est la surjection qui envoie un sommet vers l'indice de sa communauté et

$$G_{s(j)}(t) = \omega_{s(j)}, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \tag{2.76}$$

$$F_{s(j)}(t) = -\frac{\sigma}{2iN} \sum_{\nu=1}^{n} N_\nu \; p_{s(j)\nu} \; \bar{\zeta}_\nu(\rho_\nu(t), \Psi_\nu(t), \varphi_\nu(t)) \; e^{i\alpha}. \tag{2.77}$$

Dans la dernière équation, nous avons utilisé la fonction

$$\zeta_\mu(\rho_\mu, \Psi_\mu, \varphi_\mu) \equiv Z_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_\mu} \sum_{\ell \in B_\mu} \frac{e^{i\varphi_\mu} w_\ell + \rho_\mu e^{i\Psi_\mu}}{1 + \rho_\mu e^{i(\varphi_\mu - \Psi_\mu)} \, w_\ell} \tag{2.78}$$

afin de montrer explicitement la dépendance en termes des variables réduites. La généralisation des équations (2.69-2.71) aux équations pour plusieurs communautés est directe : les équations réduites ont la même forme pour chaque communauté [200]. Il suffit donc d'ajouter des indices $\mu \in \{1, ..., n\}$ pour les termes qui dépendent des communautés dans les équations (2.69-2.71). En y substituant les fonctions (2.76-2.77), il en résulte les $3n$ équations différentielles

$$\dot{\rho}_\mu = \sigma \left(\frac{1 - \rho_\mu^2}{2N} \right) \sum_{\nu=1}^{n} N_\nu p_{\mu\nu} \mathrm{Re} \left[\zeta_\nu(\rho_\nu, \Psi_\nu, \varphi_\nu) e^{-i(\Psi_\mu + \alpha)} \right], \tag{2.79}$$

$$\dot{\Psi}_\mu = \omega_\mu + \sigma \left(\frac{1 + \rho_\mu^2}{2N\rho_\mu} \right) \sum_{\nu=1}^{n} N_\nu p_{\mu\nu} \mathrm{Im} \left[\zeta_\nu(\rho_\nu, \Psi_\nu, \varphi_\nu) e^{-i(\Psi_\mu + \alpha)} \right], \tag{2.80}$$

$$\dot{\varphi}_\mu = \omega_\mu + \sigma \frac{\rho_\mu}{N} \sum_{\nu=1}^{n} N_\nu p_{\mu\nu} \mathrm{Im} \left[\zeta_\nu(\rho_\nu, \Psi_\nu, \varphi_\nu) e^{-i(\Psi_\mu + \alpha)} \right], \tag{2.81}$$

qui décrivent exactement la dynamique complète avec $N - 3n$ constantes du mouvement. Il est intéressant de noter qu'en prenant la limite $N \to \infty$ et en choisissant une distribution uniforme de constantes du mouvement, nous retrouvons exactement la dynamique réduite (2.58-2.59) obtenue avec la réduction de Ott-Antonsen [200]. En ce sens, la méthode de Watanabe-Strogatz généralise la méthode de Ott-Antonsen.

2.3.3 Résumé des approches

Les méthodes de Ott-Antonsen et Watanabe-Strogatz réduisent astucieusement la dimension des dynamiques de phase de la forme de l'équation (2.32). Malgré tout, celles-ci ne permettent pas toujours de s'attaquer à la réduction de dynamiques d'oscillateurs plus générales avec des distributions de fréquences spéciales, du bruit, des fonctions de couplage plus complexes, etc. Pour cette raison, les méthodes ont été adaptées dans différents contextes et d'autres approches ont été proposées.

Dans le tableau 2.2, nous exposons quelques approches mathématiques prometteuses de la

littérature avec certaines de leurs particularités :

- $N < \infty$: Limite des graphes finis.
- **Graphe** : Dynamique sur des graphes avec une structure autre qu'un graphe complet.
- **Fréq.** : Oscillateurs de fréquences non identiques.
- **Couplage** : Fonction de couplage entre θ_j et θ_k non limitée au premier harmonique.
- **Bruit** : Dynamique bruitée.

Un crochet dans le tableau signifie qu'il existe un ou plusieurs articles dans lesquelles la méthode de réduction dimensionnelle considère la caractéristique. L'absence de crochet signifie qu'à la connaissance de l'auteur, la méthode ne s'applique pas ou n'a pas encore été adaptée à la caractéristique en question. Le nombre de crochets d'une méthode n'indique en rien la généralité ou l'efficacité de la méthode. Les références du tableau sont les articles originaux, des articles qui adaptent la méthode et des articles jugés utiles pour la compréhension de la méthode

De plus, le tableau n'est évidemment pas exhaustif, mais suivre les références du tableau et les références de ces références devrait donner une vision d'ensemble amplement satisfaisante. Notons aussi que nous nous restreignons aux méthodes *mathématiques* de réductions dimensionnelles de *dynamiques de phase*. Ils existent plusieurs méthodes numériques (*equation-free method*) intéressantes dans la littérature [36, 89, 90, 135, 171, 208].

Tableau 2.2 – Réductions dimensionnelles mathématiques de dynamiques de phase.

Méthode	$N < \infty$	**Graphe**	**Fréq.**	**Couplage**	**Bruit**
Gottwald [96, 97, 103, 124]	√	√	√		√
Ott-Antonsen [17, 34, 151, 187, 200]		√	√		√
Paramètre d'ordre [45, 85]	√	√	√	√	
Watanabe-Strogatz [34, 95, 150, 160, 200, 249]	√			√	√
Cumulants [91, 92, 93, 239]			√		√

Contrairement à ce que nous pourrions croire en observant ce dernier tableau, la possibilité de réduire une dynamique de phase est encore limitée. En effet, pour des dynamiques de phase sur un réseau complexe et avec une distribution arbitraire de fréquences, il est difficile de réduire sa dimension [224]. Une des difficultés majeures à réaliser la réduction d'une telle dynamique est la conservation de l'hétérogénéité dans les paramètres dynamiques *et* dans les propriétés structurelles lorsque les graphes sont de taille finie. Au prochain chapitre, nous introduisons donc une méthode de réduction dimensionnelle s'attaquant à ces difficultés.

Chapitre 3

DART : une réduction dimensionnelle ciblée pour les dynamiques sur des graphes

Threefold way to the dimension reduction of dynamics on networks : an application to synchronization

Vincent Thibeault[1,2], Guillaume St-Onge[1,2], L.J. Dubé,[1,2] et Patrick Desrosiers[1,2,3]

[1] Département de physique, de génie physique et d'optique,
Université Laval, Québec (Québec), Canada G1V 0A6

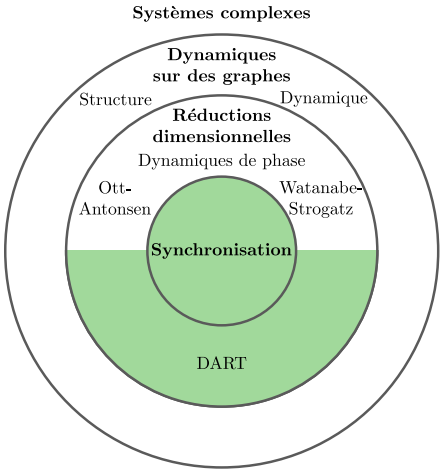
[2] Centre interdisciplinaire en modélisation mathématique,
Université Laval, Québec (Québec), Canada G1V 0A6

[3] Centre de recherche CERVO, Québec (Québec), Canada G1J 2G3

Accepté dans *Physical Review Research*

Référence arXiv : 2005.10922 (2020)

Les deux derniers chapitres témoignent d'un aspect fondamental des systèmes complexes : derrière le flou causé par leur dynamique non linéaire de grande dimension et leur organisation hiérarchique, se cachent des mécanismes essentiels expliquant l'émergence de la synchronisation. Ce chapitre vise à dévoiler ces mécanismes en proposant une nouvelle méthode, nommée DART (*Dynamics Approximate Reduction Technique*), qui fournit des représentations à basse dimension de dynamiques sur des graphes.



Le contenu du chapitre est à l'intersection de deux avenues de recherche. D'une part, des articles récents ont abordé le problème de la réduction dimensionnelle dans le contexte de l'écologie, de l'épidémiologie et des neurosciences [84, 121, 142, 189]. Malgré le progrès considérable, de nombreuses questions sur les mathématiques des réductions dimensionnelles sont restées sans réponse et les méthodes développées dans ces articles n'ont pas été adaptées pour prédire la synchronisation d'oscillateurs couplés. D'autre part, il existe des techniques fréquemment utilisées pour réduire la dimension des graphes d'oscillateurs, comme les méthodes de Ott-Antonsen [187] et Watanabe-Strogatz [249] présentés au chapitre 2. Cependant, ceux-ci sont limités aux dynamiques de phase et peu d'attention a été accordée à la réduction dimensionnelle de ces dynamiques sur des graphes avec des propriétés plus hétérogènes.

DART précise et généralise plusieurs approches de la littérature. La technique, élaborée à la section 3.5, fournit une base mathématique solide pour la réduction dimensionnelle qui révèle une trichotomie difficilement contournable : il faut privilégier la conservation des paramètres dynamiques, des degrés ou de la matrice d'adjacence. Nous validerons notre approche en réduisant la dimension de trois dynamiques de phase sur des graphes modulaires. Cela nous permettra de prédire l'émergence de la synchronisation, d'obtenir des résultats analytiques pour des régimes de synchronisation exotiques et de trouver un nouveau type de chimère [section 3.6].

Ce chapitre est ainsi l'aboutissement des deux derniers chapitres et la concrétisation des objectifs de ce mémoire.

3.1 Résumé

Divers systèmes complexes se modélisent par de grands réseaux dans lesquels les interactions régissent l'évolution temporelle de l'état des sommets, formant un système dynamique non linéaire de haute dimension. L'un des principaux défis de la science des réseaux consiste à prédire l'impact de la structure et de la dynamique des systèmes complexes sur l'évolution des états et sur l'émergence de phénomènes collectifs, comme la synchronisation. Nous traitons ce problème en proposant une technique de réduction approximative des dynamiques (DART) qui transforme une dynamique de haute dimension (complète) en une dynamique de basse dimension (réduite) tout en préservant les caractéristiques les plus essentielles de la structure et de la dynamique du système d'origine. DART généralise des approches récentes de réduction dimensionnelle en permettant le traitement des variables dynamiques à valeurs complexes, des hétérogénéités dans les propriétés intrinsèques des sommets ainsi que des réseaux modulaires avec des communautés fortement connectées. De plus, nous identifions trois procédures de réduction dont l'efficacité dépend de l'importance relative de l'évolution des états de la dynamique intrinsèque, la séquence de degrés ou la matrice d'adjacence. Nous utilisons la synchronisation de phase des réseaux d'oscillateurs comme banc d'essai pour notre méthode. Nous prédisons avec succès les courbes de synchronisation pour trois dynamiques de phase (Winfree, Kuramoto, thêta) sur le SBM. De plus, nous obtenons les bifurcations du modèle de Kuramoto-Sakaguchi sur le SBM moyen avec des communautés de différentes tailles et nous montrons numériquement l'existence de chimères en périphérie de la double étoile. Cela nous permet de mettre en évidence le rôle critique de l'asymétrie de la taille des communautés sur l'existence des chimères. Enfin, nous obtenons multiples résultats analytiques de la littérature sur la synchronisation explosive en utilisant DART pour le modèle de Kuramoto-Sakaguchi sur l'étoile. Nos travaux fournissent un cadre unificateur pour l'étude d'une vaste classe de systèmes dynamiques sur les réseaux.

3.2 Abstract

Several complex systems can be modeled as large networks in which the state of the nodes continuously evolves through interactions among neighboring nodes, forming a high-dimensional nonlinear dynamical system. One of the main challenges of Network Science consists in predicting the impact of network topology and dynamics on the evolution of the states and, especially, on the emergence of collective phenomena, such as synchronization. We address this problem by proposing a Dynamics Approximate Reduction Technique (DART) that maps high-dimensional (complete) dynamics unto low-dimensional (reduced) dynamics while preserving the most salient features, both topological and dynamical, of the original system. DART generalizes recent approaches for dimension reduction by allowing the treatment of complex-valued dynamical variables, heterogeneities in the intrinsic properties of the nodes as well as modular networks with strongly interacting communities. Most importantly, we

identify three major reduction procedures whose relative accuracy depends on whether the evolution of the states is mainly determined by the intrinsic dynamics, the degree sequence, or the adjacency matrix. We use phase synchronization of oscillator networks as a benchmark for our threefold method. We successfully predict the synchronization curves for three phase dynamics (Winfree, Kuramoto, theta) on the stochastic block model. Moreover, we obtain the bifurcations of the Kuramoto-Sakaguchi model on the mean stochastic block model with asymmetric blocks and we show numerically the existence of periphery chimera state on the two-star graph. This allows us to highlight the critical role played by the asymmetry of community sizes on the existence of chimera states. Finally, we systematically recover well-known analytical results on explosive synchronization by using DART for the Kuramoto-Sakaguchi model on the star graph. Our work provides a unifying framework for studying a vast class of dynamical systems on networks.

3.3 Introduction

Complex systems are characterized by the emergence of macroscopic phenomena that cannot be explained by the properties of its constituents taken independently [43, 169]. Synchronization is an archetypal example where collective movements emerge from the interactions between the oscillators of a system [31, 202]. The relationship between the interactions in a complex system and its capacity to synchronize was found to be rich and subtle in many fields of applications, including physics [229, 238], neurosciences [60, 76, 117, 143, 153], and ecology [52, 57, 205, 244, 245]. Phase dynamics on networks give insights on this complex relationship : they model the oscillations in a simple way and networks encode the underlying structure of the systems [176].

However, the large number of dimensions $N \gg 1$ of the system, the non-linearity of phase dynamics, and the lack of symmetries in complex networks often prevent any thorough mathematical exploration of the coupled differential equations. Moreover, it is often more desirable to describe the emergent behavior of the system with a certain observable rather than the microscopic states. For these reasons, it is often more practical and intuitive to find a dynamical system with a reduced number of dimensions $n \ll N$ that describes the temporal evolution of the synchronization observable of the system. By doing so, the mathematical analysis, the computational cost, and the interpretation of the behavior of the complex system are simplified.

Multiple attempts have been made to obtain such lower-dimensional descriptions. In 1994, Watanabe and Strogatz successfully transformed a N-dimensional Kuramoto dynamics with identical oscillators and all-to-all coupling into an exact 3-dimensional reduced dynamics with $N-3$ constant of motions [249]. In 2008, Ott and Antonsen introduced an Ansatz which allowed them to write a reduced dynamics in the limit $N \to \infty$ for the original Kuramoto

model and some of its extensions (e.g., with external driving, communities of oscillators, and time-delayed coupling) [187]. It was later shown that the Ott-Antonsen Ansatz can be applied to other phase dynamics, such as the theta model [27, 152], and extended, with a circular cumulant method, to noisy phase dynamics [239].

Despite these advances, reducing the number of dimensions of a dynamical system while preserving its network's structural properties remains a very challenging task. Real complex networks are finite and it is known that finite-size effects shape synchronization transitions [211]. Moreover, their properties, such as the degree of their nodes, are often heterogeneously distributed. Therefore, all-to-all couplings are not suited to describe the rich behavior of synchronization dynamics on complex networks.

Attempts have been made to reduce the dimensions of dynamical systems by considering only structural features such as degrees [84, 121], symmetries [46], and spectrum [121, 142]. However, they generally do not consider variations in the intrinsic dynamics of the nodes or they are only suited for dynamics with specific coupling functions. There are also multiple approaches to coarse-grain synchronization dynamics involving the Laplacian matrix [89, 90, 171, 208]. However, the methods (equation-free) are not mathematically systematic in general, i.e., they use computer algorithms to get reduced graphs instead of getting a reduced dynamical system. Besides, the whole field of model order reduction or reduced order models is very mature. Yet, this field mainly focus on engineering and linear control problems, the dynamics generally do not involve networks, and the reduction methods often require information on the time series of the complete dynamical system (e.g., with proper orthogonal decomposition) [9, 129].

The purpose of this paper is to develop a Dynamics Approximate Reduction Technique (DART) and to use it for predicting phase synchronization regimes. We first present the structural and dynamical setup for the paper (Sec. 3.4). We then describe DART along with target procedures and we apply it to phase dynamics on networks to clarify the effects of reducing the number of dimensions (Sec. 3.5). Finally, we use the reduced dynamics to analyze the effects of the graph structure on the synchronization regimes of the Kuramoto-Sakaguchi model, such as chimera states and explosive synchronization (Sec. 3.6). We gather our conclusions in Sec. 3.7 and add a number of appendices to provide details on the analysis, the numerical implementations, and the application of DART to the case of real dynamics on networks with more than one equation per node.

3.4 Structural and dynamical setup

In this section, we introduce preliminary definitions and notations. In particular, we define the modular networks and the phase dynamics that will be used throughout the paper. Note that from now on, the words "network" and "graph" will be considered as exact synonyms.

3.4.1 Modular graphs

Let us consider the graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, where $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots N\}$ is the set of vertices (nodes) and $\mathcal{E}$ is the set of edges (links or connections). The corresponding adjacency matrix, $A = (A_{jk})_{j,k=1}^{N}$, is such that the element A_{jk} equals one if node k connects to node j and zero otherwise. All graphs considered in the paper are undirected, so all adjacency matrices are symmetric.

In this paper, a graph is said to be modular when its vertices are partitioned into disjoint blocks (groups, communities, or modules). Each block is a set that contains vertices with similar properties and each vertex belongs to one and only one block. Let q be the number of blocks. Moreover, for $\mu \in \{1, \ldots, q\}$, let B_μ denote the μ-th block. Then, the ordered set $\mathscr{B} = \big(B_1, ..., B_q\big)$ provides a partition of $\mathcal{V}$ that unequivocally describes the modular structure of the graph. Moreover, $\mathscr{B}$ induces the surjection $s : \mathcal{V} \to \{1, ..., q\}$ that assigns each vertex to its corresponding block. Note that if N_μ is equal to the size of the μ-th block, then $N = \sum_{\mu=1}^{q} N_\mu$.

An example of a modular graph with $q = 4$ blocks is displayed in Fig. 3.1 (a). The vertices inside each block are densely connected, while the pairs of nodes belonging to different blocks are sparsely connected. The opposite situation also occurs, as in star and two-star graphs. Indeed, in a star graph with N nodes, one node (the core) is connected to all the other $N - 1$ nodes (the periphery) while the latter do not connect among themselves. Yet, this corresponds to a modular structure with $q = 2$ blocks : the core $B_1 = \{1\}$ and the periphery $B_2 = \{2, \ldots, N\}$. Now, let $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$ be two separate star graphs with $N_{p_1} + 1$ and $N_{p_2} + 1$ nodes, respectively. Connecting the cores of $\mathcal{G}_1$ and $\mathcal{G}_2$ produces a two-star graph that is partitionable into $q = 4$ blocks, with two blocks for cores, $B_1 = \{1\}$ and $B_3 = \{N_{p_1} + 2\}$, and two blocks for peripheries, $B_2 = \{2, ..., N_{p_1} + 1\}$ and $B_4 = \{N_{p_1} + 3, ..., N\}$.

A random modular graph is a set of modular graphs equipped with a probability distribution. A *stochastic block model* (SBM) is a type of random modular graph whose probability distribution depends on a set of probabilities related to the block structure and that guarantees the

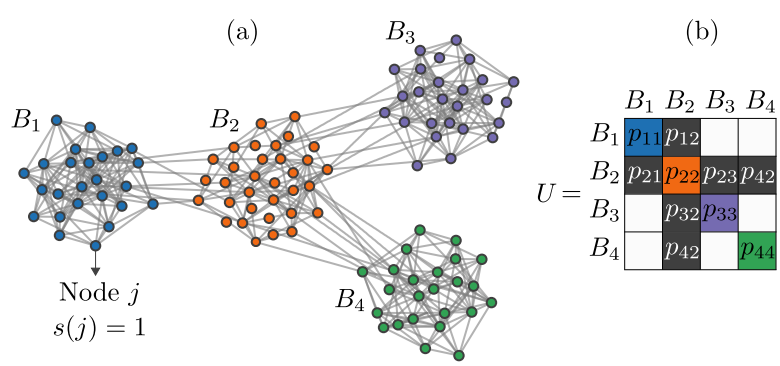


FIGURE 3.1 – (a) A modular graph with $q = 4$ blocks. (b) The matrix of probabilities $U = (p_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^{q}$ for the modular graph in (a). The white squares indicate matrix elements with value 0.

independence of all possible edges. To be more specific, let $\mathscr{B}$ be as above and let

$$\mathscr{P} = \Big(p_{\mu\nu} \in [0,1] \,\Big|\, 1 \leq \mu \leq \nu \leq q\Big),$$

which is an ordered set of probabilities. Then, SBM($\mathscr{B}, \mathscr{P}$) is such that the probability of drawing a graph with adjacency matrix A is

$$P(A) = \prod_{1\leq\mu\leq\nu\leq q} \prod_{\substack{i\in B_\mu,\, j\in B_\nu \\ i<j}} p_{\mu\nu}^{A_{ij}} (1-p_{\mu\nu})^{1-A_{ij}}. \tag{3.1}$$

The parameter $p_{\mu\nu}$ can thus be interpreted as the probability for a node in B_μ to connect with a node in B_ν. Note that it is often more suggestive to combine the probabilities $p_{\mu\nu}$ into the symmetric matrix $U = (p_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1}^{q}$ as in Fig. 3.1 (b).

In this paper, we focus on random modular graphs with $q = 2$ blocks, so $\mathscr{B} = \big(B_1, B_2\big)$. We additionally impose the equality $p_{12} = p_{21} = p_{\text{out}}$. Besides, if $p_{11} = p_{22} = p_{\text{in}}$, the SBM is called the planted partition model [50, 266]. Two extreme cases are also of special interest : $p_{\text{in}} = p_{\text{out}} = p$ is equivalent to the Erdős-Rényi model (also known as the Gilbert model) $\mathcal{G}(N, p)$ and $p_{\text{in}} = 0$ is the random bipartite graph.

3.4.2 Phase dynamics

The dynamics of an oscillator is described by a dynamical system which possesses at least one periodic orbit (cycle) for a certain set of parameters. When multiple oscillators interact, their trajectories are perturbed from their periodic state. For small perturbations, the oscillators stay in the basin of attraction of their limit cycles and the variation in the oscillation amplitudes are small. The whole dynamics then becomes mainly controlled by a system of ordinary differential equations that only involve the phases of the oscillations [117, 199, 202]. For a network with adjacency matrix $A = (\,A_{jk}\,)_{j,k=1}^{N}$, this system typically looks like

$$\dot{\theta}_j = f(\theta_j) + \omega_j\, g(\theta_j) + \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\, h(\theta_j, \theta_k), \tag{3.2}$$

where $j \in \{1, \ldots, N\}$. Moreover, θ_j is a real-valued function such that $\theta_j(t)$ gives the phase of oscillator j at time $t \in \mathbb{R}$, $\dot{\theta}_j = \mathrm{d}\theta_j/\mathrm{d}t$ is the instantaneous phase velocity of oscillator j, ω_j is a dynamical parameter related to oscillator j, f and g are real analytic functions representing the intrinsic dynamics of each oscillator, and h is a real analytic function describing the coupling among the oscillators. The functions f, g, and h are assumed to be periodic with period 2π. We also assume that their Fourier series are finite, which will be useful in Sec. 3.5.2.

In 1967, Winfree proposed one of the first models of coupled phase oscillators in which synchronization is possible [260]. The coupling function of his model takes the form $h(\theta_j, \theta_k) = h_1(\theta_j)h_2(\theta_k)$, where $h_1(\theta_j)$ encodes the phase response of oscillator j to perturbations

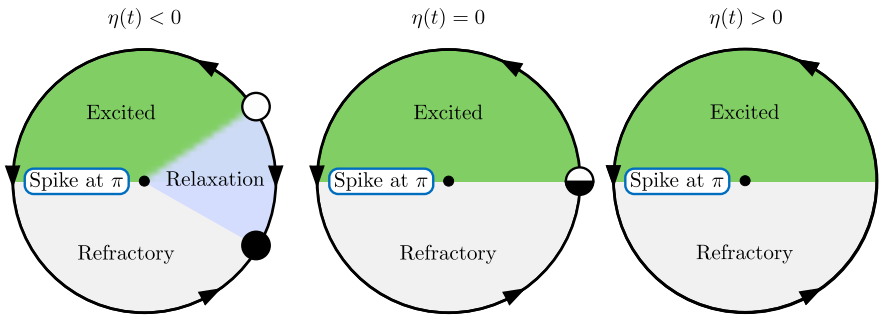


FIGURE 3.2 – Schematization of the dynamical states in the theta model. The interaction term $\eta(t)$ increases from left to right, producing a SNIC bifurcation. The white dot is an unstable equilibrium point, the black dot is a stable equilibrium point, while the black and white dot is a half-stable equilibrium point. The flow of the phase on the circle is represented by the arrows.

$\sum_{k=1}^{N} A_{jk} h_2(\theta_k)$ caused by its oscillating neighbors k [83]. Following Ref. [12], we choose $h_1(\theta_j) = -\sin\theta_j$ and $h_2(\theta_k) = \sigma\big(1+\cos\theta_k\big)/N$, where $\sigma \in \mathbb{R}_+$ is a coupling constant. Thus, in this version of the *Winfree model*, the rate of change of the j-th phase is

$$\dot{\theta}_j = \omega_j - \frac{\sigma}{N}\sin\theta_j \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\,(1+\cos\theta_k). \tag{3.3}$$

where ω_j is the natural frequency of oscillator j, $f(\theta_j) = 0$, and $g(\theta_j) = 1$.

Inspired by the work of Winfree, Kuramoto introduced another model of non-linearly coupled phase oscillators in 1975 that has now become a classic for the study of synchronization in populations of oscillators [132]. In the network version of the *Kuramoto model*, the j-th phase evolves according to

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{\sigma}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}\,\sin(\theta_k - \theta_j). \tag{3.4}$$

Despite the simple form of its dynamics, the Kuramoto model is quite useful [171]. Indeed, for weak couplings and a phase coupling function h well approximated by its first harmonics, a large class of phase oscillator dynamics can be described by the Kuramoto model [199]. The model is relevant for the study of Josephson junctions [255], nanoelectromechanical oscillators [161], and exhibits a rich variety of dynamical behaviors when transposed on complex networks [211]. Adding a global phase lag α between the oscillators of the Kuramoto model lead to the *Kuramoto-Sakaguchi model* [217] whose dynamical equations are

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \frac{\sigma}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}\sin(\theta_k - \theta_j - \alpha), \tag{3.5}$$

for $j \in \{1, \ldots, N\}$. This model possesses partially synchronized solutions, called chimera states [1], which will be investigated in Sec. 3.6.

Partly due to the inherent complexity of neural systems and their nonlinear oscillatory behavior, much research has been conducted to obtain simplified models of neurons that capture

their main dynamical properties [74, 116]. For example, in 1986, the *theta model* (also known as the Ermentrout-Kopell model) was introduced to provide a low-dimensional dynamical description of parabolic bursting while preserving some basic characteristics of higher-dimensional models that belong to the Hodgkin-Huxley family [73]. In the theta model, the rate of change of the j-th oscillator is

$$\dot{\theta}_j = (1 - \cos\theta_j) + (1 + \cos\theta_j)\eta_j, \tag{3.6}$$

where η_j stands for the interaction term defined as

$$\eta_j = \omega_j + \frac{\sigma}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(1 - \cos\theta_k).$$

In the last equation, ω_j is interpreted as the current injected into neuron j. The above model essentially differs from the quadratic integrate-and-fire model by a change of variables $V_j = \tan(\theta_j/2)$, where V_j is the membrane potential of neuron j [170]. Equation (3.6) is also the normal form for the saddle-node on invariant circle (SNIC) bifurcation illustrated in Fig. 3.2.

3.5 DART : Dynamics Approximate Reduction Technique

We now introduce DART that approximately reduces N-dimensional dynamical systems, akin to Eq. (3.2), to new n-dimensional ones with $n \ll N$. For this, we first define n new linearly independent dynamical observables Z_μ for $\mu \in \{1, \ldots, n\}$. We force their time evolution to obey a closed system of n ordinary differential equations. In turn, this constraint leads us to impose three compatibility conditions, taking the form of three systems of linear algebraic equations, which, in general, cannot be satisfied simultaneously. We nevertheless clarify the circumstances in which a particular condition should be favored and explain how to get satisfactory solutions, allowing us to successfully apply the method to phase dynamics and to predict their synchronization behavior on modular graphs.

3.5.1 Definition of the observables

Inspired by Koopman's seminal work on ergodic theory (e.g., see [37]), we define an observable of a dynamical system as a complex-valued function on its phase space. We restrict the observables to be smooth functions. Center of mass, total kinetic energy, and linear momentum are classical examples of smooth observables. All such observables form a countably infinite-dimensional complex algebra $\mathscr{O}$.

In that context, the goal of dimension reduction consists in selecting $n \ll N$ observables in $\mathscr{O}$ whose dynamics is determined, at least approximately, by a closed system of n ordinary differential equations. Selecting the right set of observables is a difficult task. Yet, as argued in [142], this task is greatly simplified if, rather than looking for observables in the whole algebra $\mathscr{O}$, we limit our search to *linear* observables, which form a N-dimensional complex vector space.

However, when studying the synchronization of oscillators, linear observables such as $\sum_{j=1}^{N} c_j\theta_j$, where $c_j \in \mathbb{C}$ for each j, have limited value. To get observables that quantify synchronization, we must first make the change of variables

$$\theta_j \longmapsto z_j = e^{\mathrm{i}\theta_j}, \qquad j \in \{1, \dots, N\}, \tag{3.7}$$

which maps the phase of oscillator j onto the unit circle $\mathbb{T}$ in the complex plane. This means that we should look for n-linear observables of the form

$$Z_\mu = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} z_j, \quad \mu \in \{1, ..., n\}, \tag{3.8}$$

where M is a $n \times N$ matrix with real elements. In matrix form,

$$\boldsymbol{Z} = M\boldsymbol{z},$$

where

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}.$$

Choosing n linear observables $Z_1 \dots Z_n$ is thus equivalent to choosing a matrix M. We call this matrix a "reduction matrix" since it reduces N variables z_j into n variables Z_μ.

To further restrict the set of linear observables, we impose two additional conditions :

A The rank of matrix M is n ;
B Each row of M is a probability vector, i.e.,
  B_1 $\sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} = 1$ for all μ,
  B_2 $M_{\mu j} \geq 0$ for all μ and j.

These conditions can be reformulated as follows :

A The observables $Z_1, \dots Z_n$ are linearly independent ;
B Each observable Z_μ is a weighted average of the activity variables $z_1, \dots, z_N$.

Condition A ensures that the dimension reduction is optimal in the sense that there is no redundancy among the observables.

Condition B makes each observable easily interpretable, namely, it is possible to decompose each linear observable as

$$Z_\mu = R_\mu e^{i\Phi_\mu}, \quad R_\mu = |Z_\mu|, \quad \Phi_\mu = \arg(Z_\mu). \tag{3.9}$$

This second condition then directly implies that the inequality $R_\mu \leq 1$ holds and R_μ reaches its maximal value when, and only when, all phases θ_j are equal modulo 2π. In other words, thanks to Condition B, each R_μ can be interpreted as a synchronization measure. Although

recent works [83, 223] suggest that other observables may provide better quantitative measures of phase coherence, we use R_μ because of its simple properties and because it is easily obtained from the linear observable Z_μ.

Let us illustrate Conditions A–B with an example. First, suppose that for each $\mu \in \{1, \dots, n\}$, n_μ nodes are selected to form the subset $O_\mu \subset \mathcal{V}$. Second, assume that $(O_\mu)_{\mu=1}^n$ is a partition of $\mathcal{V}$. Third, set

$$M_{\mu j} = \frac{1}{n_\mu} \times \begin{cases} 1, & j \in O_\mu, \\ 0, & j \notin O_\mu. \end{cases} \tag{3.10}$$

Then, the matrix M satisfies both Conditions A–B with the corresponding observables

$$Z_\mu = \frac{1}{n_\mu} \sum_{j \in O_\mu} z_j, \quad \mu \in \{1, \dots, n\}.$$

In the last example, the reduction matrix M of Eq. (3.10) is such that if node j contributes to the observable Z_μ, meaning $M_{\mu j} \neq 0$, then the same node does not contribute to any other observable Z_ν with $\mu \neq \nu$. This last property together with Condition B imply the following :

A' M is row-orthogonal, i.e., $MM^\top = I_{n \times n}$.

This is a stronger version of Condition A. Indeed, the orthogonality between each row of M implies that the rows are linearly independent, so the rank is equal to n. Condition A' therefore implies Condition A.

Although Condition A' will not be strictly imposed in the paper, it will always be considered as desirable. The reason is quite simple : together, Conditions A' and B induce a partition of the set of nodes into n disjoint blocks, as in Sec. 3.4.1. In other words, when the reduction matrix M satisfies both Conditions A' and B, then M also provides a modular structure and each Z_μ is interpretable as a weighted average inside the μ-th block. This module, however, is not necessarily related to that of the network, since information has not yet been extracted from the adjacency matrix A.

In the following sections, we will only use linear observables satisfying at least Conditions A–B. As a consequence, any row probability vector $\boldsymbol{\ell} = (\ell_\mu)_{\mu=1}^n$ ensures that

$$\boldsymbol{m} = (m_j)_{j=1}^N = \boldsymbol{\ell} M, \tag{3.11}$$

is a probability vector. Throughout the paper, we choose ℓ_μ for all μ as the number of non-zero elements in row μ of M divided by the total number of non-zero elements in M. The observables $Z_1, \dots Z_n$ can therefore be linearly combined to produce a single weighted average of the activity variables $z_1, \dots, z_N$:

$$Z = \sum_{\mu=1}^n \ell_\mu Z_\mu = \sum_{j=1}^N m_j z_j. \tag{3.12}$$

The observable $R = |Z|$ is then bounded as $0 \leq R \leq 1$ and serves as a global measure of synchronization (i.e., order parameter). Additionally, we will often use the time-averaged measure of synchronization

$$\langle R \rangle_t = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} R(\boldsymbol{\theta}(t))\, \mathrm{d}t, \tag{3.13}$$

where we choose sufficiently large time values, t_0 and $t_1 > t_0$, such that $R(t)$ oscillates around a certain mean or reaches a stable solution. We will sometimes denote by $\langle R \rangle$ the average synchronization measure over multiple quantities (e.g., over random initial conditions or various network realizations).

3.5.2 Derivation of the reduced dynamical system

We now obtain a reduced system of n differential equations that describes the dynamics of the linear observables $Z_1, \ldots, Z_n$. We summarize the main result in Table 3.1 but the reader is invited to look at the derivation to better understand the quantities in play.

First, the N-dimensional system that we are going to reduce is Eq. (3.2) under the change of variables of Eq. (3.7) :

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{k=1}^{N} A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k), \tag{3.14}$$

for $j \in \{1, \ldots, N\}$. This system defines a dynamics on the complex torus $\mathbb{T}^N$. The functions F, G, and H are directly related to the functions f, g and h. They therefore inherit some of their properties.

In particular, F and G are holomorphic functions with domain $\mathbb{C}^2$ and codomain $\mathbb{C}$ while H is a holomorphic function from $\mathbb{C}^4$ to $\mathbb{C}$. For example, with the Kuramoto dynamics,

$$\begin{aligned} h(\theta_j, \theta_k) &= \frac{\sigma}{N} \sin(\theta_k - \theta_j), \\ H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k) &= \frac{\sigma}{2N} \left[z_k - z_j^2 \bar{z}_k \right]. \end{aligned}$$

Second, we use Eq. (3.14) to compute the time derivative of the observable Z_μ [Eq. (3.8)] :

$$\dot{Z}_\mu = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j}\, F(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j}\, \omega_j\, G(z_j, \bar{z}_j) + \sum_{j,k=1}^{N} M_{\mu j} A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k) \tag{3.15}$$

for all $\mu \in \{1, \ldots, n\}$.

Third, we take advantage of the fact that F, G, and H are holomorphic functions to apply

Taylor's theorem :

$$
\begin{aligned}
F(z_j, \bar{z}_j) &= F(\beta_\mu, \beta'_\mu) + (z_j - \beta_\mu)F_1 + (\bar{z}_j - \beta'_\mu)F_2 + r^F_{\mu j} \\
G(z_j, \bar{z}_j) &= G(\gamma_\mu, \gamma'_\mu) + (z_j - \gamma_\mu)G_1 + (\bar{z}_j - \gamma'_\mu)G_2 + r^G_{\mu j} \\
H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k) &= H(\delta_\mu, \delta'_\mu, \epsilon_\mu, \epsilon'_\mu) + (z_j - \delta_\mu)H_1 + (\bar{z}_j - \delta'_\mu)H_2 \\
&\quad + (z_k - \epsilon_\mu)H_3 + (\bar{z}_k - \epsilon'_\mu)H_4 + r^H_{\mu jk}
\end{aligned}
$$

where $r^F_{\mu j}$, $r^G_{\mu j}$, $r^H_{\mu jk}$ are second order Lagrange remainders and $\beta_\mu, \gamma_\mu, \delta_\mu, \epsilon_\mu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu, \delta'_\mu, \epsilon'_\mu$ are arbitrary complex numbers around which we apply the expansions. Also, F_1 and F_2 are the derivatives of F with respect to the first and second arguments (z_j and $\bar{z}_j$) respectively and they are evaluated at (β_μ, β'_μ). The same applies to G_1, G_2, H_1, H_2, H_3, and H_4. The substitution of these Taylor expansions into Eq. (3.15) then leads to the equation

$$
\dot{Z}_\mu = F(\beta_\mu, \beta'_\mu) + \Omega_\mu G(\gamma_\mu, \gamma'_\mu) + \kappa_\mu H(\delta_\mu, \delta'_\mu, \epsilon_\mu, \epsilon'_\mu) + \Upsilon_\mu + \Xi_\mu, \tag{3.16}
$$

where Υ_μ is a homogeneous polynomial of degree one in the variables $z_j - \beta_\mu$, $\bar{z}_j - \beta'_\mu$, $z_j - \gamma_\mu$, $\bar{z}_j - \gamma'_\mu$, and so forth, $\Xi_\mu = \sum_j (r^F_{\mu j} + r^G_{\mu j}) + \sum_{j,k} r^H_{\mu jk}$, and we have defined the parameters

$$
\Omega_\mu = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j}\omega_j, \qquad \kappa_\mu = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} k_j,
$$

with the in-degree of node j,

$$
k_j = \sum_{k=1}^{N} A_{jk}.
$$

By introducing the "dynamical parameter matrix" $W = \mathrm{diag}(\omega_1, ..., \omega_N)$ and the "degree matrix" $K = \mathrm{diag}(k_1, ..., k_N)$, the parameters Ω_μ and κ_μ can be written in matrix form as in Eqs. (3.21-3.22). These parameters represent weighted averages of the dynamical parameters ω_j and the in-degrees k_j, respectively.

Finally, we close the system of differential equations $\dot{Z}_\mu$, with $\mu \in \{1, \ldots, n\}$. We thus need to convert each equation of the form of Eq. (3.16) into an equation that involves only the linear observables $Z_1, \ldots, Z_n$ and their complex conjugates, without explicit reference to the variables $z_1, \ldots, z_N$ and their complex conjugates. To do so, we impose three new conditions.

I Exact cancellation of the first-order terms : each polynomial Υ_μ is identically zero ;

II Linearity of the dynamical variables : all the variables β_μ, γ_μ, δ_μ, ϵ_μ, β'_μ, γ'_μ, δ'_μ, ϵ'_μ are linear combinations, with real coefficients, of the observables $Z_1, \ldots, Z_n$ or their complex conjugates ;

III Approximation at second order : each term Ξ_μ is neglected.

Condition I readily provides formulae expressing β_μ, γ_μ, δ_μ, and ϵ_μ as linear combinations of the z_j's :

$$\beta_\mu = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} z_j = Z_\mu, \qquad \gamma_\mu = \Omega_\mu^{-1} \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} \omega_j z_j,$$
$$\delta_\mu = \kappa_\mu^{-1} \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} k_j z_j, \qquad \epsilon_\mu = \kappa_\mu^{-1} \sum_{j,k=1}^{N} M_{\mu j} A_{jk} z_k.$$

The equations for β'_μ, γ'_μ, δ'_μ, and ϵ'_μ have the same form as the previous equations, but with the complex conjugate of z_j and z_k. This implies that β'_μ, γ'_μ, δ'_μ, and ϵ'_μ are the complex conjugate of β_μ, γ_μ, δ_μ, and ϵ_μ, respectively.

Condition II requires to rewrite β_μ, γ_μ, δ_μ, and ϵ_μ as linear combinations of the observables $Z_1, \ldots, Z_n$. This condition is directly satisfied for β_μ, but not for the others. Satisfying Condition II for γ_μ, δ_μ, and ϵ_μ is the challenging step in our calculation. Yet, it can be done if

$$\sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} \omega_j z_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} M_{\nu j} z_j = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} Z_\nu,$$
$$\sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} k_j z_j = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\nu} M_{\nu j} z_j = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\nu} Z_\nu,$$
$$\sum_{j,k=1}^{N} M_{\mu j} A_{jk} z_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} M_{\nu k} z_k = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} Z_\nu,$$

where we have introduced three unknown $n \times n$ matrices $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}$, and $\mathcal{A}$. We observe that if the *compatibility equations* (3.25-3.27) are all satisfied, then the previous equations are satisfied along with Condition II. The consistency of these compatibility equations is a subtle issue that will be addressed in the next subsection.

Condition III guarantees that no further restriction is imposed on γ_μ, δ_μ, and ϵ_μ.

Let us now state the main result of this paper, presented in Table 3.1. If the three compatibility equations are satisfied, then the linear observables $Z_1, \ldots, Z_n$ obey Eqs. (3.17), where the symbol $\approx$ means "equality up to second order corrections" and where the variables γ_μ, δ_μ, ϵ_μ are the components of the vectors in Eqs. (3.18-3.20).

We stress that the result of Table 3.1 remains valid for real dynamical systems. This means that if the variables z_j in Eqs. (3.14) satisfy $\bar{z}_j = z_j$, then the linear observables Z_μ also evolve according to Eqs. (3.17), but with the additional conditions $\bar{Z}_\mu = Z_\mu$, $\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu$, $\bar{\delta}_\mu = \delta_\mu$, and $\bar{\epsilon}_\mu = \epsilon_\mu$. Actually, in the real case, DART can be carried out a step further and be applied to dynamical systems with more than one dynamical equation per node. This is discussed in Appendix 3.8.

In general, the reduced system cannot be totally consistent with the complete set of differential equations (3.2). The reduced system should thus be interpreted as an approximation whose

Table 3.1 – Reduced dynamics obtained from DART.

Differential equations

$$\dot{Z}_\mu \approx F(Z_\mu, \bar{Z}_\mu) + \Omega_\mu\, G(\gamma_\mu, \bar{\gamma}_\mu) + \kappa_\mu\, H(\delta_\mu, \bar{\delta}_\mu, \epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu), \qquad \mu \in \{1, ..., n\} \tag{3.17}$$

Arguments of G and H		**Parameters**		**Compatibility equations**	
$\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{D}_\Omega \mathcal{W}\, \boldsymbol{Z}$	(3.18)	$\boldsymbol{\Omega} = MW\mathbf{1}_N^\top$	(3.21)	$\mathcal{W}M = MW$	(3.25)
$\boldsymbol{\delta} = \mathcal{D}_\kappa \mathcal{K}\, \boldsymbol{Z}$	(3.19)	$\boldsymbol{\kappa} = MK\mathbf{1}_N^\top$	(3.22)	$\mathcal{K}M = MK$	(3.26)
$\boldsymbol{\epsilon} = \mathcal{D}_\kappa \mathcal{A}\, \boldsymbol{Z}$	(3.20)	$\mathcal{D}_\Omega = \mathrm{diag}\left(\Omega_1^{-1}, ..., \Omega_n^{-1}\right)$	(3.23)	$\mathcal{A}M = MA$	(3.27)
		$\mathcal{D}_\kappa = \mathrm{diag}\left(\kappa_1^{-1}, ..., \kappa_n^{-1}\right)$	(3.24)		

Table 3.2 – The reduced dynamics of the Winfree, Kuramoto, and theta model.

Winfree

$$\begin{aligned}\dot{Z}_\mu = i\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} Z_\nu + \frac{\sigma\kappa_\mu}{2N} + \frac{\sigma}{4N}\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}(Z_\nu + \bar{Z}_\nu) \\ - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu}\sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} Z_\xi Z_\tau - \frac{\sigma}{4N\kappa_\mu^2}\sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} Z_\xi Z_\tau (Z_\nu + \bar{Z}_\nu)\end{aligned} \tag{3.28}$$

Kuramoto

$$\dot{Z}_\mu = i\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} Z_\nu + \frac{\sigma}{2N}\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} Z_\nu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2}\sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} Z_\xi Z_\tau \bar{Z}_\nu \tag{3.29}$$

Theta

$$\begin{aligned}\dot{Z}_\mu = -\frac{i}{2}(Z_\mu - 1)^2 + \frac{i\Omega_\mu}{2}\left(\Omega_\mu^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} Z_\nu + 1\right)^2 \\ + \frac{i\sigma}{4N}\left(\kappa_\mu^{-1}\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\nu} Z_\nu + 1\right)^2 \left[2\kappa_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}(Z_\nu + \bar{Z}_\nu)\right]\end{aligned} \tag{3.30}$$

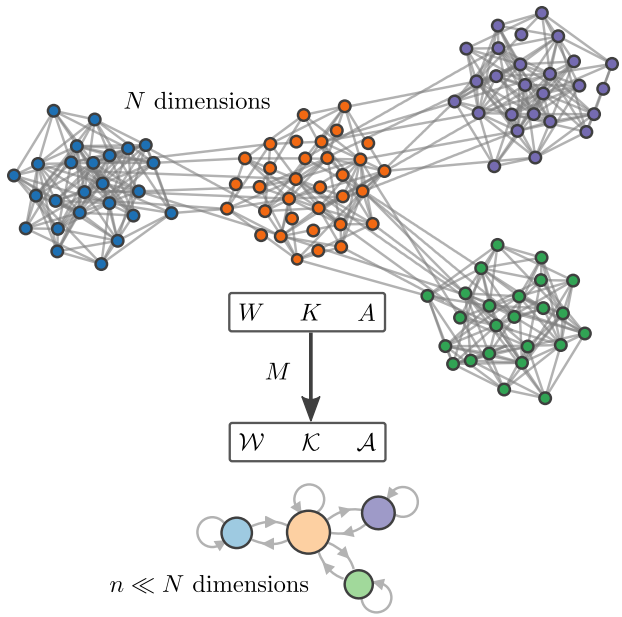


FIGURE 3.3 – Schematization of DART for a modular graph. The graph of adjacency matrix A with N nodes represents the structure of the complete dynamics, while the small graphs of adjacency matrix $\mathcal{A}$ with n nodes illustrate the structure of the reduced dynamics. The $N \times N$ matrices of dynamical parameters W and of degrees K are also reduced with the reduction matrix M to $n \times n$ matrices $\mathcal{W}$ and $\mathcal{K}$ respectively.

quality strongly depends upon the choice of the $n \times N$ reduction matrix M. This will be discussed in depth in the next subsection.

Although the matrices $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}$, and $\mathcal{A}$ seem to have been introduced for the sole purpose of mathematical convenience, they actually have a simple interpretation. As illustrated at the bottom of Fig. 3.3, $\mathcal{A}$ is the reduced adjacency matrix, that is, the matrix that regulates the interactions in the reduced system. Indeed, $\mathcal{A}$ is related to the graph with four nodes in the figure. Similarly, $\mathcal{K}$ and $\mathcal{W}$ respectively describe the in-degrees and the dynamical parameters of the reduced system. Figure 3.3 therefore gives a basic intuition of DART.

To get a better idea of what a reduced system looks like, we apply DART to specific cases, namely, the Winfree, Kuramoto, and theta dynamics. The reduced dynamics are presented in Table 3.2. The related phase and modulus dynamics are given in Table 3.3 of Appendix 3.9.

3.5.3 Construction of the reduction matrix

The problem is to determine whether we can construct a reduction matrix M that ensures the consistency of the compatibility equations. In this subsection, we prove that there is an infinite number of reduction matrices that lead to exact solutions for at least one compatibility equation while providing approximate solutions to the other equations. We then propose two procedures that aim at cleverly selecting a reduction matrix that minimizes the errors associated to the approximate solutions.

Existence of the reduction matrix M and its factorization

In Appendix 3.10, we establish that for any $N \times N$ matrix T, if M is a $n \times N$ matrix of rank n, with $n < N$, then there exists at most one solution to the matrix equation

$$\mathcal{T}M = MT, \tag{3.31}$$

with unknown reduced matrix $\mathcal{T}$ of size $n \times n$. If the solution exists, then it is equal to

$$\mathcal{T} = MTM^{+}, \tag{3.32}$$

where $^{+}$ denotes Moore-Penrose pseudo-inversion. Moreover, if the solution does not exist, Eq. (3.32) provides the best approximate solution in the sense that it minimizes the mean squared error (MSE) between MT and $\mathcal{T}M$.

To tackle the problem of the existence of a solution to Eq. (3.31), we focus on the case where T is real and symmetric, as are the matrices W, K, and A in the compatibility equations. In Appendix 3.10, we prove that for

(1) a factorization $M = CV$ where
(2) C is a real non-singular $n \times n$ matrix and
(3) V is a $n \times N$ real matrix composed of n real orthonormal row eigenvectors of T,

Eq. (3.31) has the unique solution

$$\mathcal{T} = C\Lambda C^{-1}, \tag{3.33}$$

where Λ is the diagonal matrix whose μ-th element on the diagonal is equal to the eigenvalue λ_μ corresponding to the μ-th eigenvector in V.

Conditions (1)–(3) are not particularly restrictive. They simply ensure that the rows of M form a (not necessarily orthogonal) basis of a n-dimensional subspace of $\mathbb{R}^N$. This subspace is spanned by the row eigenvectors of T used to build the *eigenvector matrix* V. We call C the *coefficient matrix*, as its main role is to combine the eigenvectors of T in a suitable manner such that Conditions A and B are respected. We note that, due to the non-singularity of C and the orthonormality of the rows of V, the matrix $M = CV$ automatically complies with Condition A.

These results lead to sufficient criteria for the consistency of the compatibility equations : if

i the matrices W, K, and A share the row eigenvectors $\boldsymbol{v}_\mu$, with $\mu \in \{1, \ldots, n\}$,
ii $M = CV$, where C is a $n \times n$ non-singular matrix and V is the $n \times N$ matrix whose μ-th row is $\boldsymbol{v}_\mu$,

then the compatibility equations are all consistent and DART is exact to first-order.

In general, however, the matrices W, K, and A do not share eigenvectors. This makes difficult or even impossible to determine whether or not there is a reduction matrix M whose corresponding n-dimensional reduced system is exact to first-order. Nevertheless, the sufficient

criteria *i*-*ii* suggest how to use eigenvectors to get a reduced system that is almost exact to first-order.

Selection of one target matrix among $\{W, K, A\}$

Even if the criterion *i* is generally not satisfied, we can still define V with the eigenvectors of one matrix T among $\{W, K, A\}$, called the *target matrix*, and solve exactly its compatibility equation while solving the others approximately. The intermediate steps to achieve this are detailed in Procedure 1.

The procedure uncovers a *trichotomy* in DART : we must choose either W, K, or A as a target. To link the chosen target T to its reduction matrix, we denote M as M_T, C as C_T, and V as V_T.

Procedure 1 Reduction with a single target matrix

Input : $N \times N$ matrices W, K, and A
positive integer $n < N$

Output : $n \times n$ matrices $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}$, and $\mathcal{A}$

1: Select a target matrix T from the set $\{W, K, A\}$.

2: Use n orthonormal row eigenvectors of T to form the $n \times N$ matrix V_T.

3: Find a non-singular $n \times n$ matrix C such that

$$M_T = C_T V_T$$

satisfies Condition B [see Appendix 3.11].

4: Solve exactly or approximately the compatibility equations using the formulae

$$\mathcal{W} = M_T W M_T^+, \quad \mathcal{K} = M_T K M_T^+, \quad \mathcal{A} = M_T A M_T^+. \tag{3.34}$$

Note that finding the coefficient matrix C_T in Step 3 is generally not straightforward. In simple cases, where all elements of V_T are nonnegative, C_T can take the form of a diagonal matrix. When V_T has negative values, the coefficient matrix is more difficult to obtain and we must turn to more sophisticated factorization methods, including semi-nonnegative matrix factorization (SNMF) and orthogonal nonnegative matrix factorization (ONMF). The technical details of the calculation of C_T and V_T are given in Appendix 3.11.

Let us discuss about Procedure 1 when the adjacency matrix A is chosen as the target matrix in Step 1. There are a number of reasons to look at this choice in more details. One recalls that A encodes the interactions among the oscillators, so the first-order errors induced by the inconsistency in the equation $\mathcal{A} M_A = M_A A$ may lead to poor estimates for the evolution of the linear observables Z_μ, unless the interactions are negligible. Moreover, a recent work [142] has revealed that the dominant eigenvector of A provides an observable that is better

estimated through the reduced dynamics compared to the corresponding observable based on the degrees, and thus based on K.

For $T = A$, V_A is a $n \times N$ matrix where the rows are orthonormalized eigenvectors of A. For *any* $n \times n$ non-singular matrix C_A, setting $M_A = C_A V_A$ makes the matrix equation $\mathcal{A} M_A = M_A A$ consistent. The unique solution to the matrix equation is then

$$\mathcal{A} = M_A A M_A^+ = C_A \Lambda_A C_A^{-1}, \tag{3.35}$$

where Λ_A is the diagonal matrix that contains the eigenvalues associated with the eigenvectors in V_A. Therefore, the elements of the reduced adjacency matrix $\mathcal{A}$ are combinations of eigenvalues of A. In other words, the reduced graph is weighted by combinations of eigenvalues. Moreover, any eigenvalue of $\mathcal{A}$ is also an eigenvalue of A and this result does not depend on the matrix C_A. Hence, in addition to its structural importance, this choice reveals something quite useful about an extension of the method to more than one target matrices.

Selection of two or three target matrices

In Procedure 1, there is a lot of freedom to choose the non-singular coefficient matrices C_W, C_K, and C_A. Yet, we have not exploited this freedom. Even if the procedure allows to solve one of the compatibility equations exactly, the resulting reduction matrix M_T could generate considerable errors in the other ones. We should therefore seek for a procedure that leverages the freedom on the coefficient matrix to minimize these errors.

For instance, let us consider $T = A$ and $M_A = C_A V_A$. Then, $\mathcal{A} = M_A A M_A^+$ is exact. We now want to find a coefficient matrix C_A that minimizes the MSE between M_A and $M_W = C_W V_W$, which ensures the consistency of the equation $\mathcal{W} M_W = M_W W$. In such a situation, we say that W is the second target matrix. The solution to the minimization problem is

$$C_A = M_W V_A^+ = C_W V_W V_A^+, \tag{3.36}$$

which implies that the best reduction matrix is

$$M_A = M_W V_A^+ V_A = C_W V_W V_A^\top V_A. \tag{3.37}$$

We note that $V_A^+ = V_A^\top$ since the rows of V_A are orthonormal. The matrix C_W is not yet determined, but this can be done by imposing Condition B.

In another context, one could want to minimize the error related to the degree matrix K instead of W. The second target matrix would then become K and the MSE would be minimized between $M_A = C_A V_A$ and the matrix $M_K = C_K V_K$ leading to the equations

$$C_A = M_K V_A^+, \tag{3.38}$$

$$M_A = M_K V_A^+ V_A = C_K V_K V_A^\top V_A, \tag{3.39}$$

where C_K is a non-singular matrix chosen so that Condition B is satisfied.

We have thus succeeded in targeting two matrices, first A, then W or K. We will therefore use the notation $A \to W$, $A \to K$, or more generally $T_1 \to T_2$, to denote the choice of target T_1 followed by T_2. The first target is reached exactly in the sense that the equation $\mathcal{A}M_A = M_A A$ is consistent, while the second cannot be reached exactly in general, but nevertheless allows the approximate resolution of the equation $\mathcal{W}M_A = M_A W$ or $\mathcal{K}M_A = M_A K$. Procedure 2 is a formalized version of this method with multiple targets in which the first and the second target matrices are arbitrary. The same procedure is also applicable to the case of three target matrices [1].

Procedure 2 Reduction with u target matrices

Input : $N \times N$ matrices W, K, and A
positive integer $n < N$
$u \in \{1, 2, 3\}$

Output : $n \times n$ matrices $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}$, and $\mathcal{A}$

1: For $k \in \{1, \ldots, u\}$, select a target T_k from the set

$$S_k = \begin{cases} \{W, K, A\}, & k = 1, \\ \{W, K, A\} \setminus \{T_1\}, & k = 2, \\ \{W, K, A\} \setminus \{T_1, T_2\}, & k = 3. \end{cases}$$

2: For $k \in \{1, \ldots, u\}$, use n orthonormal row eigenvectors of T_k to form the $n \times N$ matrix V_{T_k}.

3: Set

$$M_u = \begin{cases} C_{T_1} V_{T_1}, & u = 1, \\ C_{T_2} V_{T_2} V_{T_1}^{+} V_{T_1}, & u = 2, \\ C_{T_3} V_{T_3} V_{T_1}^{+} V_{T_1} V_{T_2}^{+} V_{T_2} V_{T_1}^{+} V_{T_1}, & u = 3. \end{cases} \tag{3.40}$$

For arbitrary C_{T_u}, M_u must satisfy Condition A. Therefore, if $u = 2$ and $V_{T_2} V_{T_1}^{+}$ is singular, return to Step 2 and choose different eigenvectors. If $u = 3$ and $V_{T_3} V_{T_1}^{+} V_{T_1} V_{T_2}^{+} V_{T_2} V_{T_1}^{+}$ is singular, return to Step 2 and choose different eigenvectors.

4: Find a non-singular $n \times n$ matrix C_{T_u} by imposing Condition B [see Appendix 3.12].

5: Solve exactly or approximately the compatibility equations using the formulae

$$\mathcal{W} = M_u W M_u^{+}, \quad \mathcal{K} = M_u K M_u^{+}, \quad \mathcal{A} = M_u A M_u^{+}. \tag{3.41}$$

Procedure 2 includes more constraints on the coefficient matrix than Procedure 1 in the hope of satisfying more accurately the compatibility equations [2]. Indeed, Steps 3 and 4 can be seen

2. One may wonder if solving the compact compatibility equation $\mathcal{Q}M = MQ$, where $Q = aW + bK + cA$, helps to satisfy the compatibility equations. If the compatibility equations are satisfied, then $\mathcal{Q} = a\mathcal{W} + b\mathcal{K} + c\mathcal{A}$. Otherwise, we find $||MQ - \mathcal{Q}M|| \leq |a|\,||MW - \mathcal{W}M|| + |b|\,||MK - \mathcal{K}M|| + |c|\,||MA - \mathcal{A}M||$ using the triangle inequality. However, recall that to minimize the first-order errors in DART, we must minimize $||MW - \mathcal{W}M||$, $||MK - \mathcal{K}M||$, and $||MA - \mathcal{A}M||$. Since $||MQ - \mathcal{Q}M||$ is a lower bound on these errors, minimizing the error between MQ and $\mathcal{Q}M$ is not helpful.

as a successive imposition of constraints on the coefficient matrix, from constraints to satisfy the different compatibility equations to constraints to fulfill Condition B.

Step 4 is not trivially satisfied when V_A is involved. Indeed, only the first dominant eigenvector possesses solely real positive entries which is guaranteed by the Perron-Frobenius Theorem [240, Theorem 38]. To satisfy Condition B_2, we once again use SNMF. We also use ONMF to ensure compliance of Condition A (exactly) and Condition A' (approximately). The details are given in Appendix 3.12.

Choice of eigenvectors for the adjacency matrix

There is yet another aspect that needs to be clarified for the case where the adjacency matrix is selected as a target matrix, that is, the choice of eigenvectors. Although any eigenvector could be chosen in principle, many reasons speak in favor of prioritizing the dominant eigenvectors, which are the eigenvectors of A whose corresponding eigenvalues are away from the bulk of the spectrum. It is known, for instance, that the largest eigenvalue of A plays a crucial role for predicting the stability [163], the dynamic range [140], and the critical values of dynamical parameters [40, 210, 241] in dynamical systems on networks. Moreover, from the graph structure perspective, the eigenvector with the largest eigenvalue has proven to be a useful centrality measure [176, 240] while the dominant eigenvectors are key objects in spectral methods for community detection [144], graph clustering [221], and graph partitioning [18, 19, 78, 206]. Finally, Eq. (3.20) and Eq. (3.35) reveal that the dominant eigenvalues have the strongest impact on the reduced dynamics.

We should therefore use the dominant eigenvectors of A when constructing the matrix V_A. But how many of them should we consider ? A rule of thumb is to choose n as the number of eigenvalues that are away from the bulk of the spectrum, which is the set that contains the eigenvalues λ_i of A such that $\lambda_i/\lambda_{\mathrm{D}} \approx 0$, where λ_{D} is the largest eigenvalue (see Fig. 3.4). In random graphs with one community ($q = 1$), such as the Erdős-Rényi model, only one eigenvalue is separated from the bulk. We then simply choose $C_A = 1$ and $M_A = V_A = \mathbf{v}_D$, the dominant eigenvector of A, to get a reduced dynamics of dimension $n = 1$ as in Refs. [17, 142]. For a graph with two communities ($q = 2$), there are usually two dominant eigenvectors, suggesting to make a reduction of dimension two ($n = q = 2$). When the communities are densely connected among themselves, it is not possible to apply twice the one-dimensional reduction method, as used in Ref. [142]. We then need to combine the eigenvectors using a second target matrix, W for example.

3.5.4 Errors in DART

In the previous subsections, we have made approximations to get the reduced dynamics (3.17). Until now, we have not considered the impact of these approximations on the accuracy of the reduced dynamics synchronization curves compared to those of the complete dynamics (3.2).

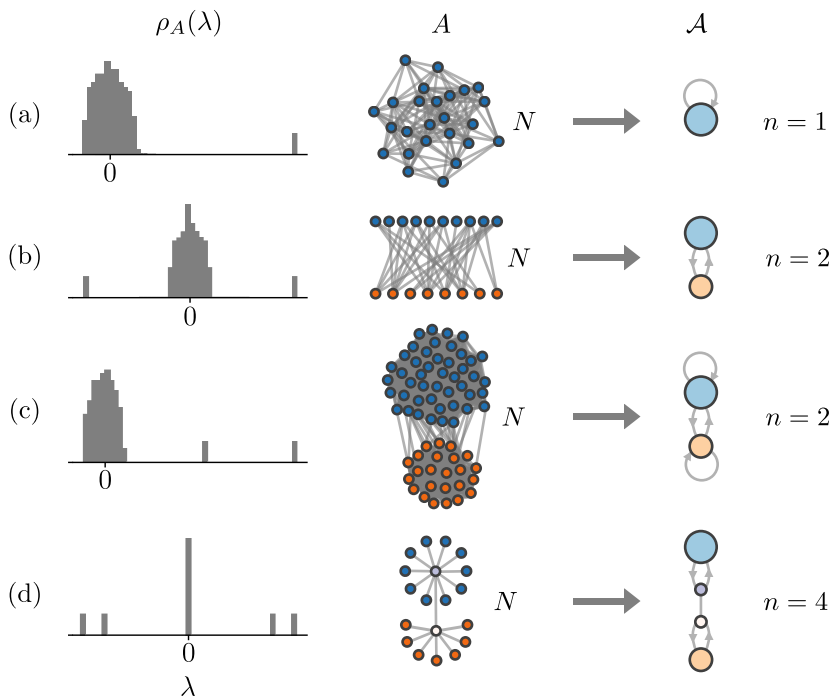


FIGURE 3.4 – Graph schematization of DART for (a) the Erdős-Rényi model, (b) the random bipartite graph, (c) the SBM, and (d) the two-star graph. An example of spectral density $\rho_A(\lambda)$ is given for each graph. Note that the dominant eigenvalues bins have been enlarged for the sake of visualization.

In this subsection, we first specify the sources of errors and then expose their effects on the reduced dynamics synchronization curves.

The errors in DART come from the Taylor expansion made in Eq. (3.16). They are of two types : first-order terms [Condition I] and higher-order (> 1) terms [Condition III]. In this paper, we focus on the first-order errors which are directly related to satisfying the compatibility equations. The sources of first-order errors depend on the choice of :

1. Target matrices ;
2. Dimension n of the reduced dynamics ;
3. Eigenvectors ;
4. Methods to calculate of C_{T_u}.

The third and fourth sources of errors are discussed in Appendices 3.11 and 3.12. To illustrate the impact of the first and second sources of errors, let us consider the simple setup presented in Fig. 3.5. We reduce the dimension of the Kuramoto dynamics on a two-triangle graph ($N = 6$) to the dynamics (3.29) with $n = 2$. We choose this small graph and natural frequencies that are uncorrelated to the structure (ex. the degrees) to accentuate the errors between the synchronization curves of the complete and reduced dynamics. By doing so, the matrices W, K and A will have very different eigenvectors which makes it more difficult to satisfy the compatibility equations.

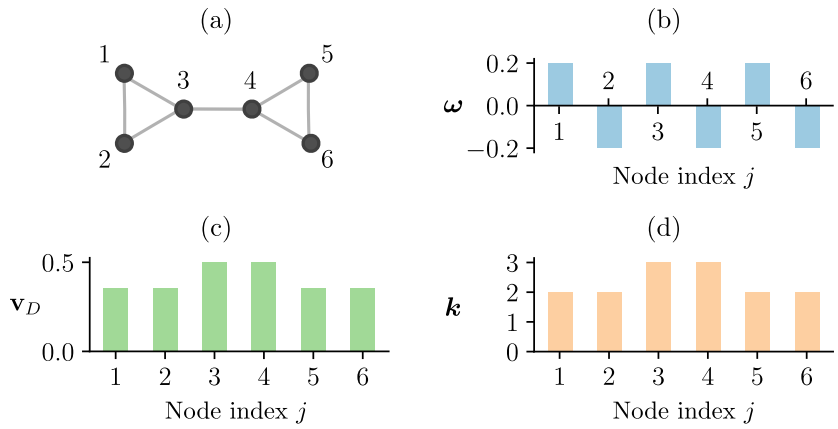


FIGURE 3.5 – Setup for the dimension reduction of the Kuramoto model on the two-triangle graph. (a) Two-triangle graph where the nodes are labeled from 1 to 6. (b) Frequency sequence $\boldsymbol{\omega}$. (c) Dominant eigenvector $\mathbf{v}_D$ of the adjacency matrix. (d) Degree sequence $\boldsymbol{k}$.

We choose the orthogonal eigenvector matrices,

$$\begin{aligned} V_W &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \\ V_K &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V_A &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-1}{c} & \frac{-1}{c} & \frac{1-\sqrt{3}}{c} & \frac{\sqrt{3}-1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

where $c = [2(\sqrt{3}-1)^2 + 4]^{1/2}$ and the two rows of V_A are the first two dominant eigenvectors of A. These eigenvector matrices ensure that $V_{T_2} V_{T_1}^+$ and $V_{T_3} V_{T_1}^+ V_{T_1} V_{T_2}^+ V_{T_2} V_{T_1}^+$ (in Step 3 of Procedure 2) are non-singular regardless of the combination of target matrices [3].

Target matrices

To evaluate the impact of the choice of target matrices on first-order errors, we proceed as follows. With Procedure 2 and the eigenvector matrices in Eqs. (3.42), there are 15 possible choices of target matrices : three single targets ($u = 1$), six combinations of two targets ($u = 2$), and six combinations of three targets ($u = 3$). We thus obtain 15 reduction matrices and 15 reduced dynamics each related to a choice of target matrices. From these results, we find the synchronization curves $\langle R \rangle_t$ vs. the coupling constant σ for the complete and reduced Kuramoto dynamics which are presented in Fig. 3.6. In each plot, the choice of target matrices and the RMSE between the synchronization curves of the complete and reduced dynamics are specified just above the σ-axis.

3. For instance, choosing $\boldsymbol{v}_1 = (1/2, 1/2, 0, 0, 1/2, 1/2)$ as the first row of V_K would create singular matrices (e.g., $V_K V_A^+$ would be singular). Note that if V_K includes $\boldsymbol{v}_1$, the predictions in Fig. 3.6 when targeting K are not improved and therefore, the conclusion drawn in this section would still be valid.

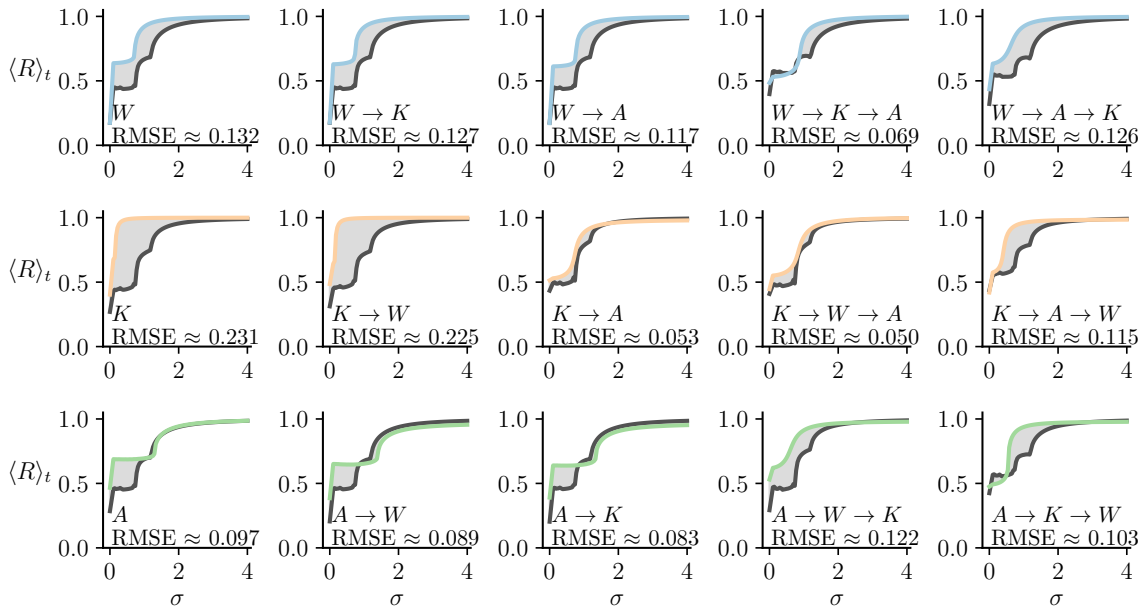


FIGURE 3.6 – Time-averaged global synchronization observable $\langle R \rangle_t$ for the complete Kuramoto dynamics with dimension $N = 6$ (dark gray lines) and its reduced dynamics (3.29) with dimension $n = 2$ (colored lines) vs. the coupling constant σ for the 15 choices of target matrices denoted as $T_1 \to T_2 \to T_3$ in the plots. The RMSE is the root-mean-squared error between the complete dynamics curve and the reduced dynamics curve. The gray area between the synchronization curves is shown to illustrate qualitatively the error made by the reduced dynamics. The initial conditions are the same for each plot and are drawn from a uniform distribution $\mathcal{U}(0, 2\pi)$.

As expected, we first observe that choosing $T_1 = W$ allows an accurate prediction of the synchronization observable at $\sigma = 0$ compared to $T_1 = K$ or $T_1 = A$. This is explained by the fact that the compatibility equation $\mathcal{W}M_1 = M_1 W$ is perfectly satisfied when $T_1 = W$, but not when $T_1 = K$ or $T_1 = A$.

Interestingly, the reduced dynamics with the one target procedure $T_1 = A$ and the two-target procedures $A \to W$, $A \to K$ accurately predict the form of the complete dynamics synchronization curve for high couplings[4]. We can explain this result by the fact that, for higher couplings, the structure becomes increasingly important. Therefore, observables defined from structural quantities (like the eigenvectors of the adjacency matrix) should be favored in this coupling regime.

However, if we choose $T_1 = K$, the predictions of the reduced dynamics are inaccurate even when the dynamics is strongly influenced by the structure ($\sigma > 1$ for instance). From our numerical experiments, choosing K as a first target is often a bad choice. One key reason for this is that the degrees only give a local information on the nodes whereas the eigenvectors

4. Comparable predictions can also be achieved with the targets $L \to W$, where L is the Laplacian matrix, and the compatibility equations $\mathcal{W}M = MW$, $\mathcal{L}M = ML$. For $n = 2$, we can build the Laplacian eigenvector matrix V_L with the eigenvectors $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ corresponding to the two lowest eigenvalues : $\lambda_1 = 0$ and the Fiedler eigenvalue λ_2 [77]. The uniformity of $\boldsymbol{v}_1$ helps to get a positive reduction matrix, while $\boldsymbol{v}_2$ is useful for graph partitioning [102] and community detection [177].

of the adjacency matrix contains global information on the network [240, Chapter 3]. Each eigenvector of A depends on all the nodes in contrast to the eigenvectors of K in general. Yet, using A as a last target appears to be helpful for the predictions and it is not excluded that mixing global and local informations on the structure gives accurate results.

Another aspect to consider is the number of target matrices u. Adding targets can improve or worsen the predictions of the reduced dynamics. Indeed, by looking at the first line of Fig. 3.6 where the first target is W, we get a better RMSE between the synchronization curves for the target combinations $W \to K \to A$ than the one target procedure with $T = W$. The result is the opposite in the third line of Fig. 3.6 where the first target is A : the one-target procedure with $T = A$ leads to more accurate results than the three-target procedures. Hence, the repercussions of choosing more or less target matrices is very subtle.

One should nonetheless be careful with the interpretation of the RMSE : a smaller RMSE does not mean that we have better captured the underlying features of the complete dynamics. In our method, there are multiple possible sources of errors and they could compensate each other. For instance, this could be the case for the target combinations $K \to W \to A$.

Reduced dynamics dimension

Choosing an appropriate reduced dynamics dimension n is an inherent difficulty not only for DART, but also for all dimension-reduction methods. For instance, when the dynamics mainly relies on the structure, DART becomes a problem of graph partitioning for which determining the ideal number of groups n is a well-known problem with no obvious answer [82, Sec. IV.A]. When no graph structure is introduced into the dynamics, even the most classical methods for deriving systems of reduced dimension (e.g., reduced order models) often fail to provide clear bounds on n [129, Sec. I].

For these reasons, we have not looked for a systematic way to choose n. We have nevertheless gathered some theoretical and numerical evidence suggesting, at least for the phase dynamics considered in the paper, that the reduced dynamics can monotonically improves as n increases.

First, in Appendix 3.13, we prove that if $n = N$, the reduction matrix M can be written as the identity matrix and a reduced dynamics obtained with DART is equivalent to its complete dynamics if and only if the coupling function H is of the form

$$H(u, v, w, z) = E(u, v)w + Q(u, v)z + S(u, v), \tag{3.43}$$

where $u, v, w, z \in \mathbb{C}$ and E, Q, S are any complex-valued holomorphic functions. Interestingly, the coupling functions for the Winfree, Kuramoto, and theta models all satisfy this criterion, which means that the reduced dynamics in Eqs. (3.28, 3.29, 3.30) are equivalent to the complete dynamics in Eqs. (3.3, 3.4, 3.6) when $n = N$.

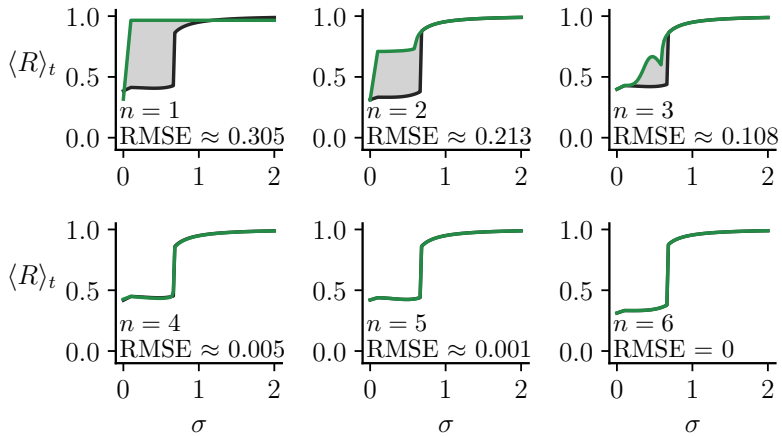


FIGURE 3.7 – Impact of n on the quality of the reduced dynamics for the Kuramoto dynamics on the two-triangle graph. The targets are $A \to W$, the frequency matrix is $W = \mathrm{diag}(0.1, 0.1, -0.2, -0.2, 0.1, 0.1)$, and the initial conditions are the same for each plot and are drawn from a uniform distribution $\mathcal{U}(0, 2\pi)$.

Second, using the Kuramoto dynamics on the two-triangle graph with $W = \mathrm{diag}(0.1, 0.1,$ -0.2, -0.2, $0.1, 0.1)$, we observe a monotonic improvement of DART's predictions with the targets $A \to W$ when increasing the dimension of the reduced dynamics [Figure 3.7]. At $n = N = 6$, as expected, the prediction is perfect. For other choices of targets and other dynamics, it is far from guaranteed that this monotonic improvement will occur, but in this example, "the more eigenvectors, the better" [5].

It is clear that the choice of target matrices and the dimension n have a crucial impact on the predictions of the reduced dynamics. It is non-trivial to set n wisely and to decide which targets to choose and in which order. Depending on the situation, one should find the appropriate targets to minimize the first-order errors. While the choice of the second and third target matrices (if any) depends on the situation, Figs. 3.6-3.7 and our many numerical experiments suggest selecting A as the first target.

3.5.5 Application to phase dynamics on modular graphs

So far, we have used DART only for a small graph and the Kuramoto dynamics. In this subsection, we show that our formalism is effective when the dimension of the system N gets larger and can be successfully applied to other phase dynamics.

Let us first consider modular oscillator networks with two communities B_1 and B_2 of size N_1 and N_2 respectively. We assume that these modular networks are drawn from the SBM and that the dynamical parameters of each community are drawn from normal distributions. We denote these normal distributions $\mathcal{N}(\omega_\mu, v_\mu)$, where ω_μ and v_μ are respectively the mean and the variance of the dynamical parameters in the community B_μ, and we consider that v_μ is small compared to ω_μ. With this setup and DART, we investigate the possibility of predicting

the macroscopic and mesoscopic phase synchronization curves for the Winfree, Kuramoto, and theta models [Sec. 3.4.2].

For the reasons mentioned in Sec. 3.5.3, we select $T_1 = A$ and define V_A with the two corresponding dominant eigenvectors. We also set $T_2 = W$ since the dynamical parameters are known to be important in the prediction of the synchronization critical value [3].

Selecting $T_2 = W$ when there are N different frequencies raises a problem for choosing the eigenvector matrix V_W. The reason is that there are N eigenvectors that cannot be combined to form two eigenvectors with as many non-zero elements as possible (see Appendix 3.11).

We get around this difficulty by choosing approximate eigenvectors of W to build an approximate eigenvector matrix V_W. By approximate (left) eigenvectors of W, we mean row vectors $\boldsymbol{v}$ such that $\boldsymbol{v}W \approx \omega\boldsymbol{v}$ where ω is an approximate eigenvalue (frequency). Let $\boldsymbol{\omega}_\mu$ be the row vector of length N_μ that contains the dynamical parameters of the community B_μ. Because the parameter variance in each community is low, the following eigenvector matrix yields good approximate eigenvalues of W :

$$V_W = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_1}(\boldsymbol{\omega}_1)_j}} & \mathbf{0}_{N_2} \\ \hline \mathbf{0}_{N_1} & \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_2}(\boldsymbol{\omega}_2)_j}} \end{array}\right),$$

where $\mathbf{0}_{N_\mu}$ is a null row vector of length N_μ.

The reduction matrix is obtained using Eq. (3.37) where C_W is determined as explained in Appendix 3.12. Note that since the adjacency matrix A and the dynamical parameters W are random matrices, the eigenvector matrices V_A and V_W are random matrices. As a consequence, the reduction matrix M becomes a random matrix as well and the synchronization observables, random variables.

By computing L reduction matrices from L graph and dynamical parameter realizations, we solve approximately the compatibility equations and get L reduced dynamics for the Winfree, Kuramoto, and theta model.

Figure 3.8 shows successful predictions of the average synchronization observable $\langle R \rangle$ for the three phase dynamics on $L = 50$ realizations of random modular graphs, dynamical parameters, and initial conditions.

Double phase transitions occur both in the complete and reduced dynamics in Fig. 3.8 (a), (d), and (e). The first synchronization transition corresponds to the emergence of synchronization at the level of the communities, as seen in the insets, while the second transition is explained by the increase of synchronization between the communities.

The reduced dynamics also predicts abrupt transitions at the macroscopic and mesoscopic

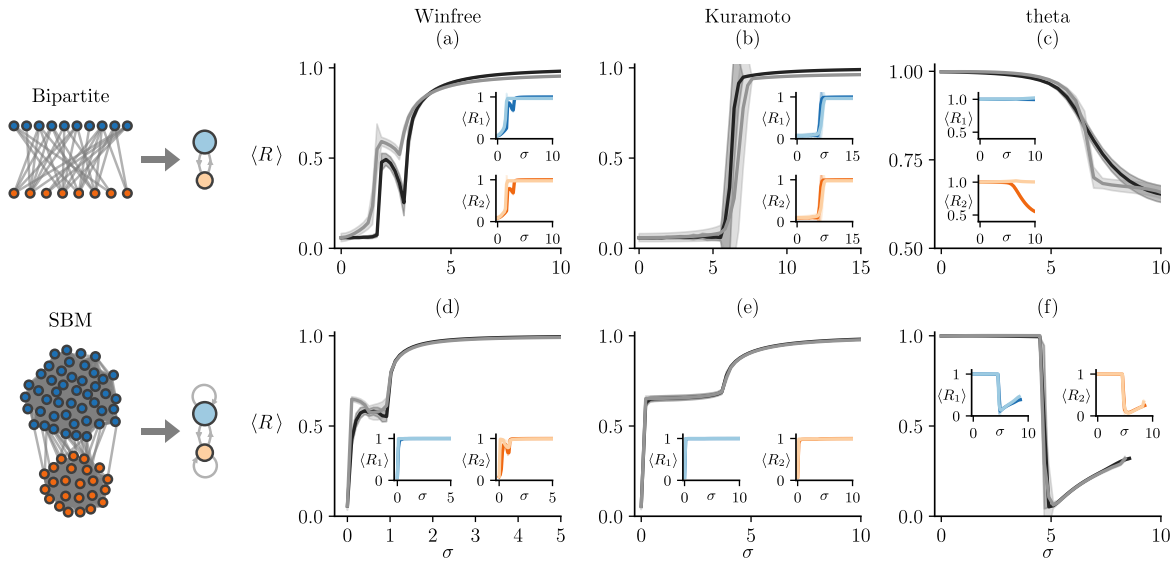


FIGURE 3.8 – Comparison of the synchronization curves between three complete phase dynamics (black lines) and their reduced dynamics in Table 3.2 (gray lines) on random modular graphs. (Insets) Mesoscopic synchronization curves of the complete phase dynamics (dark blue and orange lines) and the reduced dynamics (light blue and orange lines). (a, b, d, e) The natural frequencies of the first community are drawn from the normal distribution $\mathcal{N}(0.3, 0.0001)$ and the natural frequencies of the second community are chosen to ensure that $\sum_{j=1}^{N} \omega_j = 0$. (c, f) The currents of the first community are drawn from the normal distribution $\mathcal{N}(-1.1, 0.0001)$ and the currents of the second community are drawn from $\mathcal{N}(-0.9, 0.0001)$. Common parameters to all subplots : $N_1 = 150$, $N_2 = 100$. For the bipartite, $p_{11} = p_{22} = 0$ and $p_{12} = p_{21} = 0.2$. For the SBM, $p_{11} = 0.7$, $p_{22} = 0.5$ and $p_{12} = p_{21} = 0.2$. The observables are averaged over the second half of the temporal series (25000 time steps), 50 graphs of the ensembles, 50 parameter matrices W, and 50 initial conditions randomly chosen from the standard normal distribution. The shaded region around each line is the standard deviation of the time-averaged synchronization observable.

levels for the Kuramoto model on bipartite networks [5] [Fig. 3.8 (b) and its insets]. The transitions at the macroscopic and mesoscopic levels occur at the same coupling value σ contrarily to the Winfree model on the random bipartite graph.

Figure 3.8 (c) and (f) show that desynchronization curves are captured by the solutions of the reduced theta model. For the complete dynamics in Fig. 3.8 (c), the phase trajectories first reach the closest equilibrium points on the unit circle and then oscillate when σ increases. However, this behavior is not observed in the reduced dynamics which explains the result in the bottom inset (second community) of Fig. 3.8 (c). In Fig. 3.8 (f), the transition from oscillation death to an excited state (SNIC bifurcation, see Sec. 3.4.2 and Fig. 3.2) is well predicted by the reduced dynamics at the macroscopic and mesoscopic level.

Let us now investigate the impact of specific graph realizations on the performance of DART

5. When the oscillators in the two layers of the bipartite graph have opposite natural frequencies [which is almost the case in Fig. 3.8 (b)], they are called Janus oscillators [183, 198]. These oscillators exhibit an impressive diversity of oscillatory phenomena and DART could be useful to get further analytical insights.

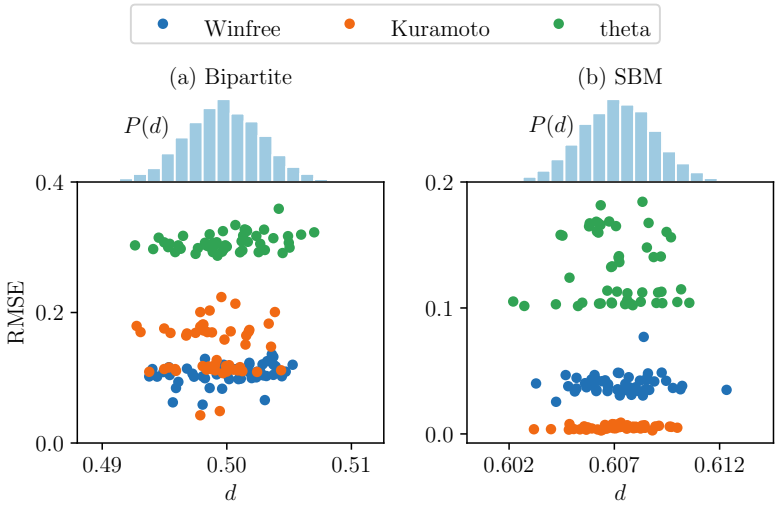


FIGURE 3.9 – RMSE error between the complete and reduced dynamics synchronization curves of Fig. 3.8 vs. the distance d [Eq. (3.44)] for (a) the random bipartite ensemble and (b) the SBM. The histograms on top provide the distribution of the distance d in each random graph ensemble.

in Fig. 3.8. Actually, we want to quantify how the RMSE between the complete and reduced synchronization curves varies according to the graph realizations used in Fig. 3.8. To distinguish the different random graph realizations, we use the distance d between their adjacency matrix A and the mean adjacency matrix $\langle A \rangle$ given by

$$d = \frac{\sqrt{\sum_{j,k=1}^{N} (A_{jk} - \langle A \rangle_{jk})^2}}{\sqrt{\sum_{j,k=1}^{N} \max(\langle A \rangle_{jk},\, 1 - \langle A \rangle_{jk})^2}}, \tag{3.44}$$

which is a normalized Frobenius norm. Moreover, by computing the probability distribution $P(d)$ in the random graph ensemble[6], we can identify which adjacency matrices among the chosen realizations are the most typical in the random graph ensemble.

Figure 3.9 shows that the realizations, drawn from (a) the bipartite ensemble and (b) the SBM, cover a wide range of possible distances in the probability distribution $P(d)$. The figure reveals that the RMSE error between the complete and reduced dynamics synchronization curves does not vary significantly with the distance d.

This last observation is crucial. It suggests that phase dynamics on real modular networks, which differ considerably from the mean of a random graph, can be reduced using the dominant eigenvectors of its adjacency matrix.

6. Note that $P(d)$ can be computed numerically or analytically from the probability distribution $P(A)$ of adjacency matrices given in Eq. (3.1).

3.6 Chimeras and explosive synchronization

Dimension reductions are useful in predicting synchronization regimes, even the more exotic ones [1, 45, 128, 263]. In this section, we use the formalism proposed in Sec. 3.5 to get analytical and numerical insights about the emergence of chimeras and explosive synchronization. Interestingly, we find that the reduced dynamics obtained with DART are similar to those deduced from the Ott-Antonsen Ansatz [1, 45]. Yet, we provide a new perspective on the existence of chimera states for homogeneous and heterogeneous modular graphs. In addition to the observation of a new kind of chimera state on the two-star graph, we find that the asymmetry of the community sizes can make the difference between getting a chimera state or not. We finally recover results from various papers on explosive synchronization with the potential to push further in certain directions.

3.6.1 Preliminary remarks on chimeras

By using the Ott-Antonsen Ansatz, it was shown in Ref. [1] that a graph with two communities of identical phase-lagged oscillators can reach a dynamical state where one community is perfectly synchronized ($R_\mu = 1$ for any μ in $\{1, 2\}$) while the other is partially synchronized ($R_\nu < 1$ for ν in $\{1, 2\} \setminus \mu$). This spectacular state of coherence and incoherence, first observed in Ref. [134], was called a *chimera state* or, more succinctly, a *chimera* [2].

The phenomenon was later observed experimentally for chemical [235, 236], mechanical [125, 159, 261], electro-optical [100], and nanoelectromechanical systems [161]. There is also evidence about the existence of chimeras in neural systems [8, 16, 39, 108] and even in ecological systems [216]. Theoretically, they were observed under various forms [1, 127], at multiple scales (e.g., $N \to \infty$ [128], $N = 3$ [156]), and with multiple kinds of coupling [25] (local [137, 225] and non-local [2, 265]).

The term “chimera state" has been used in diverse ways in the literature. Some efforts have been made to clarify the notion [13, 31, 127], but there is still no universally accepted definition. Our definition is based on Ref. [2] in which a chimera state is defined as “an array [(a graph)] of identical oscillators [that] splits into two domains : one coherent and phase locked, the other incoherent and desynchronized”. Careful attention should be paid to the word “identical”. By identical, we mean that all oscillators have the same natural frequency $\omega_j = \omega$ for all $j \in \{1, ..., N\}$. However, we allow the oscillators to have different neighborhoods (degrees). The oscillators are thus dynamically, but not structurally, identical.

3.6.2 Chimeras in modular graphs

We focus on the existence of chimeras in the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on modular graphs with asymmetric modules and identical natural frequencies.

We first apply DART to get a simple set of differential equations. We then use the latter to find the equations governing the equilibrium points of the dynamics. Finally, we analyze those points to identify the regions in the space defining the graph structure where different types of chimeras can be found.

Reduced dynamics

We study a specific case of the SBM, namely, the planted partition model with two blocks (see Sec. 3.4.1). The mean adjacency matrix is[7]

$$A = \langle A \rangle_{\text{SBM}} = \left(\begin{array}{c|c} p_{\text{in}} \mathbf{1}_{N_1}^\top \mathbf{1}_{N_1} & p_{\text{out}} \mathbf{1}_{N_1}^\top \mathbf{1}_{N_2} \\ \hline p_{\text{out}} \mathbf{1}_{N_2}^\top \mathbf{1}_{N_1} & p_{\text{in}} \mathbf{1}_{N_2}^\top \mathbf{1}_{N_2} \end{array} \right),$$

where $\mathbf{1}_{N_\mu}$ is a row vector of 1's of length N_μ. The degree matrix is

$$K = \left(\begin{array}{c|c} K_{11} I_{N_1 \times N_1} & 0_{N_1 \times N_2} \\ \hline 0_{N_2 \times N_1} & K_{22} I_{N_1 \times N_1} \end{array} \right),$$

where $I_{N_\mu \times N_\mu}$ is an identity matrix of dimension $N_\mu \times N_\mu$, $0_{N_\mu \times N_\nu}$ is a null matrix of dimension $N_\mu \times N_\nu$ and $K_{11} = N_1 p_{\text{in}} + N_2 p_{\text{out}}$, $K_{22} = N_1 p_{\text{out}} + N_2 p_{\text{in}}$. Because the oscillators are identical, $W = \omega\, I_{N \times N}$.

To find the reduced dynamics of the Kuramoto-Sakaguchi model on the mean SBM, let us follow Procedure 2 with $n = 2$ and $u = 2$.

1 : The compatibility equation (3.25) is already satisfied since W is proportional to the identity matrix, so there is no need to consider choosing W as a target. We therefore select the targets $T_1 = A$ and $T_2 = K$.

2 : We compute the eigenvectors of $\langle A \rangle_{\text{SBM}}$ and form the matrix

$$V_A = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\mathbf{1}_{N_1}}{\sqrt{N_1 + N_2 \ell_+^2}} & \frac{\ell_+ \mathbf{1}_{N_2}}{\sqrt{N_1 + N_2 \ell_+^2}} \\ \hline \frac{\mathbf{1}_{N_1}}{\sqrt{N_1 - N_2 \ell_-^2}} & \frac{\ell_- \mathbf{1}_{N_2}}{\sqrt{N_1 + N_2 \ell_-^2}} \end{array} \right),$$

where

$$\ell_\pm = \frac{\lambda_\pm - N_1 p_{\text{in}}}{N_2 p_{\text{out}}}$$

while

$$\lambda_\pm = \frac{N p_{\text{in}} \pm \sqrt{(N_2 - N_1)^2 p_{\text{in}}^2 + 4 N_1 N_2 p_{\text{out}}^2}}{2}$$

are the dominant eigenvalues of $\langle A \rangle_{\text{SBM}}$. The pseudo-inverse of V_A is found by using the formula $V_A^+ = V_A^\top (V_A V_A^\top)^{-1}$ (not shown here). Moreover, we choose two orthogonal eigenvectors of K by inspection to get

$$V_K = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sqrt{N_1}} \mathbf{1}_{N_1} & \mathbf{0}_{N_2} \\ \hline \mathbf{0}_{N_1} & \frac{1}{\sqrt{N_2}} \mathbf{1}_{N_2} \end{array} \right).$$

7. Note that $\langle A \rangle_{\text{SBM}}$ is the mean adjacency matrix of a SBM for which self-loops are allowed. Indeed, a node has a probability p_{in} to have a link with itself.

3 : We set $M = C_K V_K V_A^+ V_A$.

4 : We choose

$$C_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{N_2}} \end{pmatrix},$$

which ensures that the resulting reduction matrix

$$M_A = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{N_1}\mathbf{1}_{N_1} & \mathbf{0}_{N_2} \\ \hline \mathbf{0}_{N_1} & \frac{1}{N_2}\mathbf{1}_{N_2} \end{array}\right),$$

satisfies Condition B.

5 : We find that $(M^+)_{j\mu} = \delta_{\mu\, s(j)}$ which allows us to solve exactly the compatibility equations with $\mathcal{W} = \mathrm{diag}(\omega, \omega)$, $\mathcal{K} = \mathrm{diag}(K_{11}, K_{22})$, and

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} N_1 p_{\mathrm{in}} & N_2 p_{\mathrm{out}} \\ N_1 p_{\mathrm{out}} & N_2 p_{\mathrm{in}} \end{pmatrix}.$$

The reduced dynamics is therefore exact to first order and is given by

$$\dot{R}_\mu = \sigma \left(\frac{1 - R_\mu^2}{2N}\right) \sum_{\nu=1}^{2} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \cos(\Phi_\nu - \Phi_\mu - \alpha),$$
$$\dot{\Phi}_\mu = \sigma \left(\frac{1 + R_\mu^2}{2N R_\mu}\right) \sum_{\nu=1}^{2} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \sin(\Phi_\nu - \Phi_\mu - \alpha),$$

where, without loss of generality, we have set the system in the center of mass by taking $\omega = 0$ [8].

Equilibrium points related to chimeras

We want to identify structural and dynamical conditions that are necessary for the existence of chimeras. For this, we first set $R_1 = 1$ and $R_2 = R_I < 1$ as in Ref. [1]. Then, we further simplify the reduced dynamics by introducing the phase difference $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, by merging the phase equations together, and by introducing a characteristic time

$$\tau = \sigma t / N. \tag{3.45}$$

The resulting differential equations are

$$R_I' = \left(\frac{1 - R_I^2}{2}\right) \left[N_2 p_{\mathrm{in}} R_I \cos\alpha + N_1 p_{\mathrm{out}} \cos(\Phi - \alpha)\right], \tag{3.46}$$

$$\Phi' = \left(\frac{1 + R_I^2}{2R_I}\right) \left[N_2 p_{\mathrm{in}} R_I \sin\alpha - N_1 p_{\mathrm{out}} \sin(\Phi - \alpha)\right] - N_2 p_{\mathrm{out}} R_I \sin(\Phi + \alpha) - N_1 p_{\mathrm{in}} R_I \sin\alpha, \tag{3.47}$$

8. Indeed, this choice gives the same differential equations as if we had made the substitution $\theta_j = \phi_j + \omega t$, where ϕ_j is the phase variable in the center of mass referential.

where the prime indicates the derivative with respect to τ. These equations are similar to those obtained in Ref. [1] by following the Ott-Antonsen method, except that we now have an explicit dependence over the network parameters N_1, N_2, p_{in} and p_{out}.

We have proved that if the reduced system is in a chimera state, then Eqs. (3.46) and (3.47) are satisfied. We now require the chimeras to be equilibrium points of the dynamics. This is equivalent to imposing $R_I' = 0$ and $\Phi' = 0$. A few basic manipulations allow us to conclude that the chimeras are equilibrium points only if the following equations are satisfied :

$$p_{\text{in}} = \frac{-f p_{\text{out}} \cos(\Phi - \alpha)}{R_I(\Phi) \cos\alpha}, \tag{3.48}$$

$$R_I(\Phi) = \sqrt{\frac{2f \sin\alpha \cos(\Phi - \alpha) - \sin\Phi}{2f^{-1} \sin(\Phi + \alpha) \cos\alpha + \sin\Phi}}, \tag{3.49}$$

where $f = N_1/N_2$ is the block asymmetry parameter. Note that we have redefined R_I as a function of Φ.

Chimeras in the density space

We aim to clarify the impact of the modular structure on the existence of chimeras. It is already known that the difference between the intra-community coupling strength and the extra community coupling strength plays a critical role in the emergence of chimeras [1, 128]. We therefore introduce a new parameter Δ that captures this difference in coupling strength. Following Ref. [266], we make the change of variables

$$\Delta = p_{\text{in}} - p_{\text{out}},$$
$$\rho = \beta p_{\text{in}} + (1 - \beta) p_{\text{out}},$$

where

$$\beta = \frac{N_1^2 + N_2^2}{N^2}$$

is the sum of the maximum possible number of links within each community divided by the maximum number of possible links in the network. Note that ρ is the average density in the SBM. The coordinates (ρ, Δ) form the *density space* that characterizes all the possible graphs in the planted partition model.

Let us go back to Eq. (3.48). Using the new coordinates (ρ, Δ), the equation becomes

$$\Delta = \left[\frac{R_I(\Phi) \cos\alpha + f \cos(\Phi - \alpha)}{\beta f \cos(\Phi - \alpha) - (1 - \beta) R_I(\Phi) \cos\alpha} \right] \rho \ . \tag{3.50}$$

We now identify the bifurcations of the reduced dynamics in the density space for fixed α and f [9]. Equation (3.50) already reveals the form of the bifurcation curves : they are straight lines in the density space whose slopes depend on the value of the equilibrium point Φ^*.

9. Our analysis is different from previous studies where the bifurcation diagram for the parameters Δ and α is investigated by imposing that the sum of the in and out coupling values is equal one [1, 128, 157]. In our approach, this choice is equivalent to fixing the density at $\rho = 0.5$.

To obtain these different equilibrium points Φ^*, we analyze the Jacobian matrix of the differential equations (3.46-3.47). We find a Hopf bifurcation (a stable chimera/equilibrium point loses stability and trajectories converge to a stable breathing chimera/limit cycle) by setting the trace of the Jacobian matrix equal to zero, i.e.,

$$0 = f\cos(\Phi - \alpha) + [R_I(\Phi)]^2 \cos(\Phi + \alpha). \tag{3.51}$$

We also find a saddle-node bifurcation (a stable chimera is created or destroyed) by setting the determinant equal to zero [1], i.e.,

$$0 = 1 - [R_I(\Phi)]^2 \left[2\tan\alpha \sin(\Phi - \alpha)\cos(\Phi - \alpha) - \cos(2\alpha - 2\Phi) - 2f^{-1}\cos(2\Phi)\right]. \tag{3.52}$$

Equations (3.51-3.52) allow us to compute the appropriate zeros for Φ by using standard root-finding algorithms. Substituting these zeros into Eq. (3.49) and then into Eq. (3.50) gives the slopes of the straight lines corresponding to the Hopf and the saddle-node bifurcations.

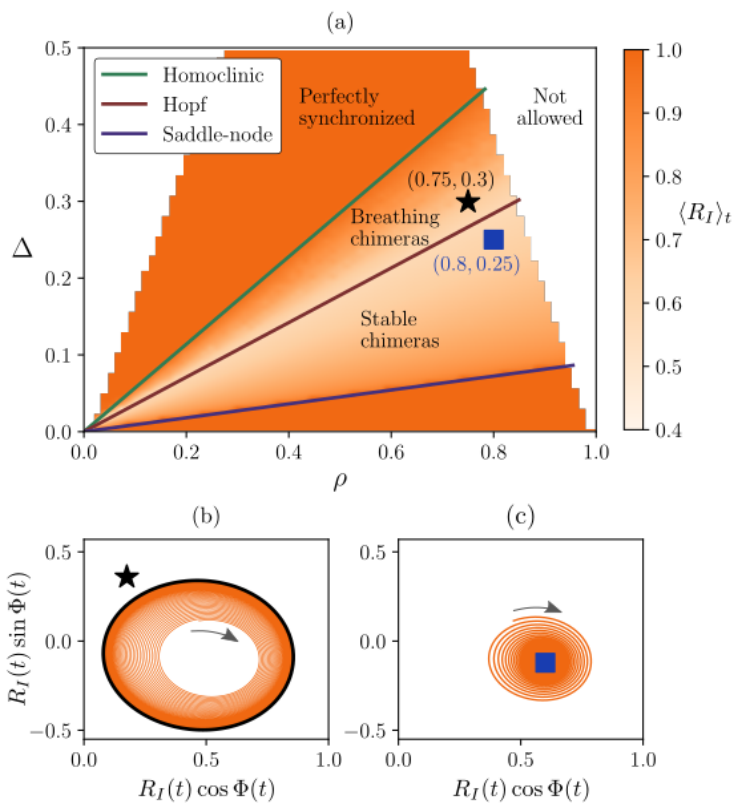


FIGURE 3.10 – Chimera state regions in the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the mean SBM in the density space. (a) Each point represents the value of $\langle R_I \rangle_t$, the time average of the phase synchronization observable of the incoherent community obtained with the integration of the complete dynamics. The initial conditions were taken at random from a uniform distribution [see Appendix 3.14 for more details]. Parameters : $f = 1.5$, $\alpha = 1.45$, $N = 500$. (b) Breathing chimera at $(\rho, \Delta) = (0.75, 0.3)$ obtained from the reduced dynamics (3.46-3.47). (c) Stable chimera at $(\rho, \Delta) = (0.8, 0.25)$ obtained from the reduced dynamics. The trajectories in the bottom figures have the same initial condition $(\, R_I(0)\,,\ \Phi(0)\,) = (0.48, 0.24)$.

The results are displayed in Fig. 3.10 (a) where we have integrated the N-dimensional Kuramoto-Sakaguchi dynamics for different values in the density space. We only show the assortative region ($p_{\text{in}} > p_{\text{out}} \Rightarrow \Delta > 0$) because the dissortative region ($p_{\text{in}} < p_{\text{out}} \Rightarrow \Delta < 0$) contains no chimeras. The white regions are "Not allowed" because they are regions where p_{in} or $p_{\text{out}} \notin [0, 1]$. We also illustrate the incoherent trajectories $R_I e^{i\Phi}$ for two different kinds of chimeras : a breathing chimera (the incoherent trajectory reach the stable limit cycle in black) [Fig 3.10 (b)] and a stable chimera (the incoherent trajectory reach the stable equilibrium point in blue) [Fig 3.10 (c)].

More importantly, Fig. 3.10 (a) shows the agreement of the predicted Hopf (solid brown line) and saddle-node (solid purple line) bifurcations with the bifurcations in the complete dynamics (heatmap). The homoclinic bifurcation (solid green line) was obtained numerically and is shown to better see the complete chimera region, which is located between the homoclinic bifurcation and the saddle-node bifurcation.

3.6.3 Periphery chimeras in two-star graphs

Two-star graphs are modular (see Sec. 3.4.1). Yet, their structural properties differ considerably from those of the planted partition model studied in the previous subsection. We use DART to show that these structural differences also cause significant dynamical differences. In particular, we find that for two-star graphs, the Kuramoto-Sakaguchi dynamics with identical frequencies can lead to the emergence of a new kind of chimera.

Reduced dynamics

We consider a two-star graph divided into the modules $B_1, ..., B_4$ defined in Sec. 3.4.1. The adjacency matrix is

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & \mathbf{1}_{N_{p_1}} & 1 & \\ \hline \mathbf{1}_{N_{p_1}}^{\top} & & & \\ \hline 1 & & & \mathbf{1}_{N_{p_2}} \\ \hline & & \mathbf{1}_{N_{p_2}}^{\top} & \end{array}\right),$$

where we have separated the modules with lines and where the empty blocks are filled with zeros. The frequency matrix is $W = \omega I_{N\times N}$ and the degree matrix is therefore

$$K = \text{diag}(N_{p_1} + 1, \underbrace{1, ..., 1}_{N_{p_1} \text{ times}}, N_{p_2} + 1, \underbrace{1, ..., 1}_{N_{p_2} \text{ times}}),$$

Let us now go through all the steps of Procedure 2 with $n = q = 4$ and $u = 2$.

1 : We select the targets $T_1 = A$ and $T_2 = K$.

2 : We analytically find the eigenvector matrix V_A and the eigenvector matrix of the degree matrix,

$$V_K = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ \hline & \frac{1}{\sqrt{N_{p_1}}}\mathbf{1}_{N_{p_1}} & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & \frac{1}{\sqrt{N_{p_2}}}\mathbf{1}_{N_{p_2}} \end{array}\right).$$

3 : We set $M = C_K V_K V_A^+ V_A$.

4 : We choose

$$C_K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{N_{p_1}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{N_{p_2}}} \end{pmatrix},$$

which gives the reduced matrix

$$M_A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & & & \\ \hline & \frac{1}{N_{p_1}}\mathbf{1}_{N_{p_1}} & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & \frac{1}{N_{p_2}}\mathbf{1}_{N_{p_2}} \end{array}\right).$$

The latter satisfies Conditions A, B, and A'.

5 : We solve exactly the compatibility equations with

$$\mathcal{W} = \mathrm{diag}(\omega, \omega, \omega, \omega),$$
$$\mathcal{K} = \mathrm{diag}(N_{p_1} + 1, 1, N_{p_2} + 1, 1),$$
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & N_{p_1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & N_{p_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We find that the reduced equations for the radial and phase variables are

$$\dot{R}_\mu = \sigma \left(\frac{1 - R_\mu^2}{2N}\right) \sum_{\nu=1}^{4} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \cos\left(\Phi_\nu - \Phi_\mu - \alpha\right),$$
$$\dot{\Phi}_\mu = \omega + \sigma \left(\frac{1 + R_\mu^2}{2N R_\mu}\right) \sum_{\nu=1}^{4} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \sin\left(\Phi_\nu - \Phi_\mu - \alpha\right).$$

The above equations have the same form as the reduced equations of the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the mean SBM. This observation can be generalized for other types of networks

and dynamics. Indeed, as shown in Table 3.4 of Appendix 3.9, there is always a simpler form of the reduced dynamics when $\mathcal{W}_{\mu\nu} = \Omega_\mu \delta_{\mu\nu}$ and $\mathcal{K}_{\mu\nu} = \kappa_\mu \delta_{\mu\nu}$.

It is worth pointing out that the cores have their own observables and they are already maximally synchronized (with themselves), which is not true for the peripheries. Thus, extra care should be taken for two-star graphs to avoid any confusion between the cores and the peripheries. With this in mind, we slightly change the notation as follows :

$$(R_1, R_2, R_3, R_4) = (R_{c_1}, R_{p_1}, R_{c_2}, R_{p_2}),$$
$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = (\Phi_{c_1}, \Phi_{p_1}, \Phi_{c_2}, \Phi_{p_2}),$$

where c_μ and p_μ stand for "core μ" and "periphery μ", respectively. The trivial conditions now become $R_{c_1} = 1$ and $R_{c_2} = 1$, which imply $\dot{R}_{c_1} = 0$ and $\dot{R}_{c_2} = 0$. Thus, among the eight dynamical equations, only six are nontrivial.

We reduce again the number of equations by introducing variables that describe the phase differences between the communities, i.e., $\Phi_1 = \Phi_{p_1} - \Phi_{c_1}$, $\Phi_2 = \Phi_{p_2} - \Phi_{c_2}$, and $\Phi_{12} = \Phi_{c_2} - \Phi_{c_1}$. We end up with five equations to describe the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the two-star graph. Two equations are related to the synchronization observables in the peripheries :

$$\begin{aligned} R'_{p_1} &= \left(\frac{1 - R_{p_1}^2}{2}\right) \cos(\Phi_1 + \alpha), \\ R'_{p_2} &= \left(\frac{1 - R_{p_2}^2}{2}\right) \cos(\Phi_2 + \alpha), \end{aligned} \tag{3.53}$$

where we have used the characteristic time defined in Eq. (3.45). The other three equations describe the evolution of the phase observables :

$$\begin{aligned} \Phi'_1 = &- \left(\frac{1 + R_{p_1}^2}{2R_{p_1}}\right) \sin(\Phi_1 + \alpha) \\ &- N_{p_1} R_{p_1} \sin(\Phi_1 - \alpha) - \sin(\Phi_{12} - \alpha), \\ \Phi'_2 = &- \left(\frac{1 + R_{p_2}^2}{2R_{p_2}}\right) \sin(\Phi_2 + \alpha) \\ &- N_{p_2} R_{p_2} \sin(\Phi_2 - \alpha) + \sin(\Phi_{12} + \alpha), \\ \Phi'_{12} = &\ N_{p_2} R_{p_2} \sin(\Phi_2 - \alpha) - \sin(\Phi_{12} + \alpha) \\ &- N_{p_1} R_{p_1} \sin(\Phi_1 - \alpha) - \sin(\Phi_{12} - \alpha). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Searching for chimeras

According to our previous analysis, there is a chimera state in the two-star graph if either $R_{p_1} = 1$ and $R_{p_2} < 1$ or $R_{p_1} < 1$ and $R_{p_2} = 1$. Yet, imposing these conditions yields four

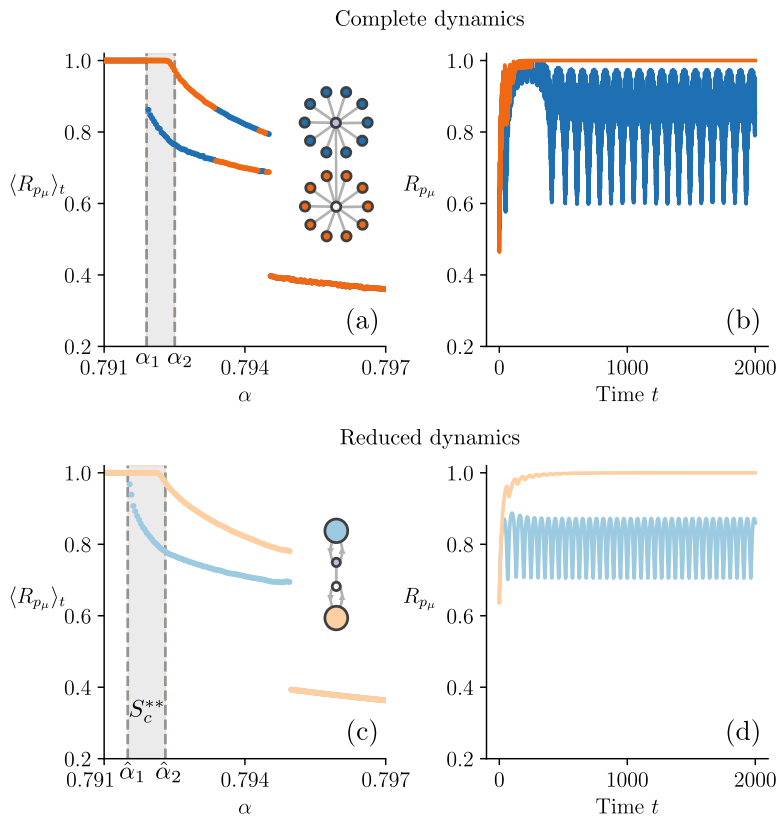


FIGURE 3.11 – (Left) Effect of the phase lag α on the time-averaged synchronization observable in periphery p_μ of a two-star graph for (a) the complete Kuramoto-Sakaguchi dynamics and (c) its reduced version (3.53-3.54). Desynchronization of the peripheries does not happen at the same values of α. The region where chimeras exist is represented by the darker region between the two vertical dashed lines at α_1 and α_2 ($\hat{\alpha}_1$ and $\hat{\alpha}_2$). (Right) An example of a periphery chimera for (b) the complete and (d) the reduced dynamics, both with $\alpha = 0.792$. Global parameters : $\tau = 5t/N$, $N_{p_1} = N_{p_2} = 100$, $N = 202$. Initially, the N phases are equidistantly distributed between 0 and 2π. The color varies from one periphery to the other.

coupled differential equations for which the dynamical analysis is much more complicated. We will therefore rely on numerical analysis.

We fix the parameters σ, N_{p_1}, and N_{p_2}. This allows us to study how the phase lag α affects the synchronization in each periphery. As shown in Fig. 3.11 (a) and (c), for each periphery, there is a critical value [dashed vertical line] above which desynchronization begins. For the complete (reduced) dynamics, we have denoted these critical values α_1 and α_2 ($\hat{\alpha}_1$ and $\hat{\alpha}_2$).

Notably, we observe a clear separation between the critical values α_1 and α_2 ($\hat{\alpha}_1$ and $\hat{\alpha}_2$). Let us stress that this separation happens despite the complete similarity of the peripheries : same number of nodes and same natural frequencies. Therefore, there is a region [dark region between the two vertical dashed lines in Fig. 3.11 (a) and (c)] where a periphery is coherent (the one that has the higher critical value) while the other is incoherent. We call any state that belongs to that region a periphery chimera. Examples of periphery chimeras are given in Fig. 3.11 (b) and (d). In these examples, the periphery chimeras are breathing [1].

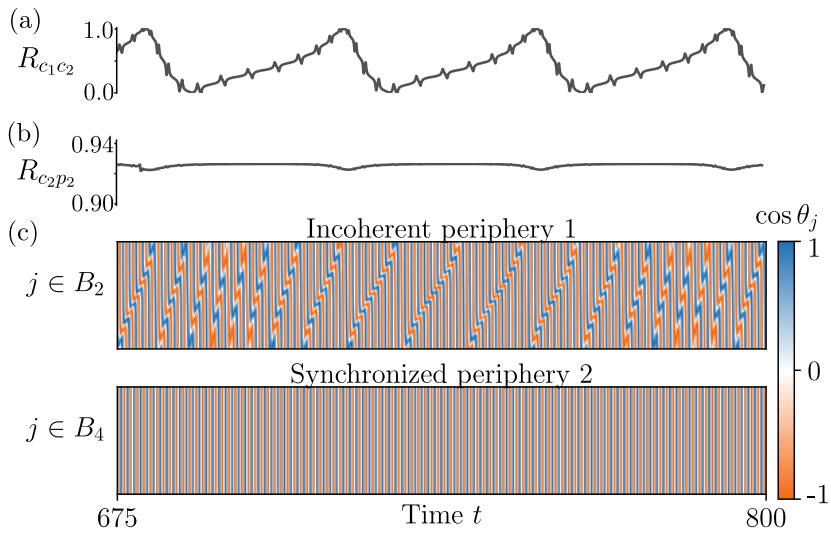


FIGURE 3.12 – Periphery chimera in the complete Kuramoto-Sakaguchi dynamics. (a) Synchronization between the two cores vs. time. (b) Synchronization between the second core and its periphery vs. time. (c) Cosinus of the phases θ_j for the peripheries vs. time. Parameters : $\alpha = 0.792$, $\tau = 5t/N$, $N_{p_1} = N_{p_2} = 100$, $N = 202$. Initially, the N phases are equidistantly distributed between 0 and 2π.

To characterize periphery chimeras more completely, it is important to know if the two cores are synchronized and if the perfectly synchronized periphery is also synchronized with its core. As portrayed in Figure 3.12 (a), the two cores are not synchronized : $R_{c_1c_1} = |e^{i\theta_1} + e^{i\theta_{N_{p_1}+1}}|/2$ oscillates between 0 and 1. Figure 3.12 (b) also shows that the second core is not perfectly synchronized (and even not perfectly phase-locked) with its perfectly synchronized periphery. Indeed, $R_{c_2p_2} = |e^{i\theta_1} + e^{i\theta_{j\in B_4}}|/2$ does not reach 1 and oscillates. We finally observe an interesting periodic pattern for the incoherent periphery in Fig. 3.12 (c).

Because star graphs are building blocks of complex networks, our results suggest that periphery chimeras could exist within very small regions of the parameter space describing the phase dynamics of a complex network. Moreover, with the recent experimental success in observing exotic synchronization phenomena [100, 125, 159, 161, 235, 236, 261], there are reasons to believe that periphery chimeras can be detected experimentally using nanoelectromechanical oscillators [161] for instance.

3.6.4 Chimera region size

We investigate the impact of the asymmetry between the communities on the size of the chimera region for the reduced dynamics of the Kuramoto-Sakaguchi model on the mean SBM (3.46-3.47) and the two-star graph (3.53-3.54).

First, in the case of the mean SBM, the size of the chimera region in the density space is

$$S_c = \frac{1}{2}\left|\rho_2\Delta_3 - \Delta_2\rho_3\right|, \tag{3.55}$$

where the coordinates (ρ_2, Δ_2) and (ρ_3, Δ_3) are the points of the intersection between the

straight lines related to the bifurcations (homoclinic, saddle-node) and the limit points of the allowed region in the density space. Using Eq. (3.52), Eq. (3.50), and the equation $\Delta = (1-\rho)/(1-\beta)$ that corresponds to the right limit of the density space, we find that the size of the stable chimera region is given by the equations

$$S_c^{\text{stable}} = \frac{1}{2}\left|\frac{a_H - a_S}{[(1-\beta)a_H+1][(1-\beta)a_S+1]}\right|,$$
$$a_X = \frac{[R_I\cos\alpha + f\cos(\Phi_X-\alpha)]}{\beta f\cos(\Phi_X-\alpha)-(1-\beta)R_I\cos\alpha},$$

where $X \in \{H, S\}$ indicates whether the bifurcation is homoclinic (H) or saddle-node (S). The symbol a_X denotes the slope of the bifurcation X while Φ_X is the zero found numerically from Eqs. (3.51-3.52).

The results are illustrated in Fig. 3.13 (a) where we observe that the size of the stable and breathing chimera regions evolves non-linearly as a function of f. As a consequence, the total size of the chimera region quickly goes from its minimal value at $f = 1.0$ to its peak at $f \approx 1.1$, before decreasing rapidly as f increases. A small structural change in the reduced equations can therefore have a considerable impact on the resulting chimera region.

Second, in the case of the Kuramoto-Sakaguchi on the two-star graph, we investigate the impact of the asymmetry on the size of the region with periphery chimeras, which is defined along the α-axis. For most values of α, like the one in Fig. 3.11 (c), the size of the periphery chimera region is approximated as

$$S_c^{**} \approx |\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1|, \tag{3.56}$$

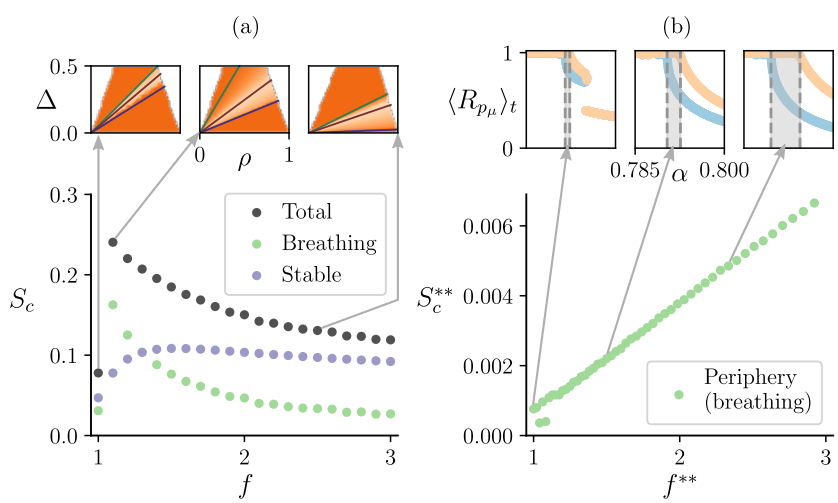


FIGURE 3.13 – (a) Size S_c of the chimera regions [Eq. (3.55)] in the density space for the reduced Kuramoto-Sakaguchi dynamics (3.46-3.47) on the mean SBM vs. the block asymmetry parameter $f = N_1/N_2$ for $\alpha = 1.45$. At the top of the plot, chimera regions are shown for $f = 1$, 1.1, and 2.5. (b) Size S_c^{**} of the periphery chimera region in terms of α [Eq. (3.56)] for the reduced Kuramoto-Sakaguchi dynamics (3.53-3.54) on the two-star graph vs. the block asymmetry parameter $f^{**} = N_{p_1}/N_{p_2}$ for $\sigma = 5$. At the top of the plot, chimera regions are shown for $f^{**} = 1$, 1.5, and 2.3.

where we recall that $\hat{\alpha}_\mu$ is the critical value above which there is desynchronization of the periphery p_μ in the reduced dynamics. In Fig. 3.13 (b), we observe that the relationship between the size S_c^{**} and N_{p_1}/N_{p_2} is approximately linear.

Figure 3.13 thus shows that the size of the chimera regions, which can be expressed in terms of specific structural parameters [ex. ρ and Δ in Eq. (3.55)] or the dynamical parameters [ex. α in Eq. (3.56)], is closely related to another structural parameter [i.e., f]. When some structural or dynamical parameters are fixed, the asymmetry between the community sizes can therefore dictate whether or not a chimera emerges.

3.6.5 Explosive synchronization in star graphs

Explosive synchronization is characterized by discontinuous (first-order) phase transitions. It is used to describe the occurrence of sudden catastrophes, such as epileptic seizures or electric breakdown [29, 70, 246]. A simple but instructive example of a system that can evolve towards explosive synchronization is the Kuramoto model on the star graph with degree-frequency correlation [45, 85, 94, 211, 270]. Interestingly, the model's bifurcation diagram for the global synchronization observable exhibits hysteresis [94].

The goal of this subsection is to use DART to gain analytical insights about the Kuramoto-Sakaguchi model on the star graph. In particular, we want to reproduce some known results on explosive synchronizations.

Reduced dynamics

The Kuramoto-Sakaguchi model on the two-star graph has already been analyzed in Sec. 3.6.3. Since the star graph is contained in the two-star graph, it is straightforward to adapt our previous calculations to derive the appropriate reduced dynamics.

First, let us introduce the matrices that define the frequencies and the structure of the complete dynamics of dimension $N = N_p + 1$, i.e.,

$$W = \mathrm{diag}(\omega_1 \ , \ \underbrace{\omega_2 \ , \ \dots \ , \ \omega_2}_{N_p \text{ times}}),$$

$$K = \mathrm{diag}(N_p \ , \ \underbrace{1 \ , \ \dots \ , \ 1}_{N_p \text{ times}}),$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1}_{N_p} \\ \hline \mathbf{1}_{N_p}^\top & 0_{N_p \times N_p} \end{array} \right).$$

Setting $n = q = 2$ and using Procedure 2 with $A \to W \to K$ yields

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2),\\ \mathcal{K} &= \mathrm{diag}(N_p, 1),\\ \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} 0 & N_p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

The reduced dynamics is therefore given by Eq. (3.74) with $\Omega_1 = \omega_1$, $\Omega_2 = \omega_2$, $\sigma/N \mapsto \sigma$ and the reduced adjacency matrix $\mathcal{A}$ defined above.

Let $R_2 = R_p$ be the phase synchronization observable of the periphery and let $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ be the difference between the phase of the core and the phase observable of the periphery. Then, the reduced dynamics of the Kuramoto-Sakaguchi model on the star graph is

$$\dot{R}_p = \sigma \left(\frac{1 - R_p^2}{2} \right) \cos(\Phi - \alpha), \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} = \omega_1 - \omega_2 &- \sigma(N-1) R_p \sin(\Phi + \alpha)\\ &- \sigma \left(\frac{1 + R_p^2}{2R_p} \right) \sin(\Phi - \alpha),\end{aligned} \tag{3.58}$$

which is also reported in Ref. [45] apart from a difference in sign [10].

Global synchronization observable at equilibrium

The observable that measures the global synchronization of the network is the modulus of the complex observable $Z = Re^{i\Phi}$ defined in Eq. (3.12) with $\boldsymbol{\ell} = (1 \quad N_p)$, that is,

$$R = \frac{1}{N} \sqrt{1 + (N-1)^2 R_p^2 + 2(N-1) R_p \cos \Phi}. \tag{3.59}$$

To find the equilibrium points of the global synchronization we first notice that

$$\frac{\mathrm{d}(R^2)}{\mathrm{d}t} = 2R\dot{R} = 0 \iff R = 0 \text{ or } \dot{R} = 0.$$

Hence, the global synchronization is at equilibrium if the derivative of $1 + (N-1)^2 R_p^2 + 2(N-1) R_p \cos \Phi$ with respect to time is zero.

From the above analysis, we deduce that if both R_p and Φ are at equilibrium, then so is R. Now, the equilibrium solutions for R_p and Φ are the zeros of Eqs. (3.57–3.58). Using trigonometric

10. The equation of Ref. [45] that corresponds to our Eq. (3.57) contains the factor $\cos(\Phi + \alpha)$, instead of $\cos(\Phi - \alpha)$, which is the correct factor.

identities (see [11]), we readily solve these equations and get

$$R_p^* = 1,$$
$$\Phi^* = \arcsin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\sigma r(N,\alpha)}\right) - \arcsin\left(\frac{(N-2)\sin\alpha}{r(N,\alpha)}\right),$$

where the asterisk indicates equilibrium and

$$r(N,\alpha) = \sqrt{N^2 - 4(N-1)\sin^2\alpha}.$$

After substituting these solutions into Eq. (3.59), we obtain the corresponding equilibrium point for the global synchronization observable :

$$R^* = \frac{1}{N}\sqrt{1 + (N-1)^2 + 2(N-1)\cos\Phi^*}. \tag{3.60}$$

The equilibrium point exists for all values of σ that are greater than or equal to the critical coupling

$$\sigma_c = \frac{\omega_1 - \omega_2}{r(N,\alpha)}. \tag{3.61}$$

Below the critical coupling, a real positive solution for R^* does not exist. At the critical coupling, R^* is equal to

$$R_c^* = \frac{1}{N}\sqrt{1 + (N-1)^2 + \frac{s(N,\alpha)}{r(N,\alpha)}}, \tag{3.62}$$

where

$$s(N,\alpha) = 2(N-1)(N-2)\sin^2\alpha.$$

The equilibrium points for the global synchronization observable R are illustrated in Fig. 3.14 (a). We observe that the equilibrium points form a hysteresis with two branches : backward branch (blue) and forward branch (gray). The numerical solutions obtained from the complete (reduced) dynamics are shown with darker (lighter) markers. We observe that the solutions of the reduced dynamics agree with those of the complete dynamics, except for the backward branch in the domain $0 < \sigma < \sigma_b \approx 1.66$. An example of synchronized trajectory observed in this domain is illustrated in Fig. 3.14 (b), which contrasts with the synchronized solution shown in Fig. 3.14 (c).

The analytical solution (3.60) is indicated by the orange line in Fig. 3.14 (a). This solution clearly belongs to the backward branch of the hysteresis. For $\alpha = 0$, Eq. (3.60) yields the same result as the backward branch reported in Ref. [270]. For $\alpha = 0$, $\omega_1 = N_p$, and $\omega_2 = 1$, the critical coupling becomes

$$\sigma_c = \frac{N_p - 1}{N_p + 1},$$

11. There is a non-trivial part in the procedure where we must find Φ such that $A\sin\Phi + B\cos\Phi = C$. To solve the equation, we divide both sides by $D = \sqrt{A^2 + B^2}$ and define an angle $\Theta = \arccos(A/D)$. Hence, $\cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1$. Moreover, $\cos\Theta\sin\Phi + \sin\Theta\cos\Phi = \sin(\Phi + \Theta) = C/D$. The last equality then allows to express Φ in terms of A, B, and C.

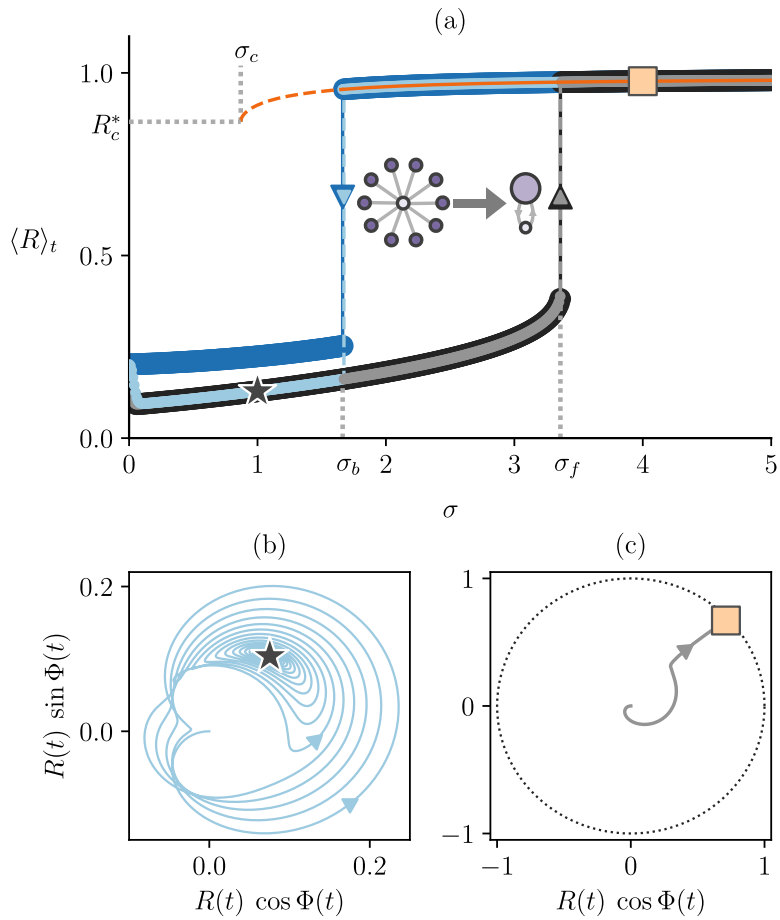


FIGURE 3.14 – (a) Hysteresis of the time-averaged global synchronization observable $\langle R \rangle_t$ vs. the coupling constant σ in the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the star graph. The numerical results are shown for the complete dynamics [dark blue (backward branch) and black (forward branch) markers] and reduced dynamics (3.57-3.58) [light blue (backward branch) and gray (forward branch) markers]. The orange line represents the analytical result (3.60). The dashed lines demarcate the domain where unstable equilibria are found numerically. (b) Unsynchronized trajectory of the reduced dynamics at $\sigma = 1$. (c) Synchronized trajectory of the reduced dynamics at $\sigma = 4$. The dotted unit circle is the boundary for the trajectory. Initial conditions : $\theta_j(0) = 2\pi(j-1)/N$. Parameters : $\alpha = -0.2\,\pi$, $N = 11$.

which corresponds to value of the top branch of the hysteresis found in Ref. [94]. The substitution of this result into Eq. (3.60) leads to the critical value reported in Ref. [270], i.e.,

$$R_c^* = \frac{\sqrt{N_p^2 + 1}}{N_p + 1}.$$

The forward branch critical synchronization value [45]

$$\sigma_f = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{2(N-1)\cos(2\alpha) + 1}}$$

predicts accurately the numerical results obtained from the complete and the reduced dynamics. We also observe that the backward branch critical desynchronization value σ_b occurs before the critical value σ_c of the equilibrium point R^* in Eq. (3.60). This is explained by

the fact that the equilibrium point is not generally stable for all $\sigma > \sigma_c$ and for $\alpha \neq 0$ [45]. However, the coupling value σ_b we obtain is not equal to the value

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{(N-1)\cos(2\alpha) + 1}}$$

reported in Refs. [45] and [115].

To summarize, using DART with $A \to W \to K$, we successively obtain multiple analytical results on explosive synchronization. At first glance, the use of the three-targets procedure may seem exaggerated to derive the reduced dynamics (3.57-3.58), since any one-target procedure would give the same reduced dynamics in this case. However, any heterogeneity in the frequencies or the structure (e.g., connecting nodes in the periphery) would break the possibility to satisfy the three compatibility equations with a one-target procedure. We conjecture that using DART with three target matrices will come in handy for these kinds of perturbed systems and even pave the way for new interesting analytical results on explosive synchronization.

3.7 Conclusion

We have introduced a Dynamics Approximate Reduction Technique (DART) to obtain a low-dimensional dynamical system from a high-dimensional dynamical system on finite networks. DART generalizes previous approaches [84, 121, 142] for modular graphs with strong interactions between the modules, dynamically non-identical nodes, and complex observables.

Our approach has uncovered a threefold problem : to close the reduced dynamics to first order, one needs to solve three compatibility equations involving a dynamical parameter matrix W, the degree matrix K, the adjacency matrix A, and the reduction matrix M.

The form of these compatibility equations has revealed a spectral aspect of the dimension-reduction problem. If one finds a common eigenvector basis for the matrices W, K, and A, then the compatibility equations are satisfied and the reduced dynamics is exact to the first order. However, these matrices do not share eigenvectors in general.

To tackle this problem, we have introduced two procedures designed to solve one compatibility equation exactly and the two others approximately. The key for achieving this task is to perform linear transformations that project eigenvectors of one of the three matrices as close as possible to eigenvectors of the other matrices.

Yet, it is not trivial to choose the eigenvectors defining the observables of the reduced dynamics. The threefold character of DART has demonstrated that the choice of observables is subtle and not universal for dynamics with non-identical nodes : the choice depends on the dynamical and structural setup. Despite this fact, the various numerical experiments performed with the Kuramoto model on a small graph suggest that choosing the eigenvectors of the adjacency

matrix, i.e., satisfying the corresponding compatibility equation exactly, is advantageous in most cases to predict the synchronization transitions curves, and should be preferred.

Using the eigenvectors of A and W, we have derived the reduced dynamics for the Winfree, Kuramoto, and theta models on random modular networks. The global phase synchronization curves obtained with the reduced dynamics are in agreement with those of the complete dynamics and exhibit, in particular, double phase transitions and SNIC bifurcations.

We have also analyzed the Kuramoto-Sakaguchi dynamics on different modular graphs with DART to get insights on exotic synchronization states. For the mean SBM, we have first investigated the impact of the network density and community size asymmetry on the existence of chimeras. We have detected new chimera regions in the SBM density space whose size varies in a surprising nonlinear way according to the community size asymmetry. In particular, we have found that the size of the chimera regions peaks when asymmetry is small. For the two-star graph, we have shown the existence of periphery chimera states, i.e., a dynamical regime in which the periphery of one star is perfectly synchronized while the periphery of the other star is partially synchronized. This type of chimera lives within a very narrow range of phase-lag values and can breathe. Finally, for the star graph, we have used DART to recover multiple analytical results from the literature on explosive synchronization.

Interestingly, despite the apparent differences in the methods, the reduced dynamics obtained from our formalism possess similarities with the ones obtained with the Ott-Antonsen approach. DART, however, is not restricted to phase dynamics : it is suited for real dynamics such as the Wilson-Cowan and Lotka-Volterra models as well as models in which each node has its own system of differential equations [see Appendix 3.8]. DART is also specifically designed for finite networks and potentially leads to new revealing perturbative analysis. Thus, it seems worth exploring more in depth the mathematical relationships between the two methods. Moreover, a thorough investigation of the errors (e.g., according to the system size N) caused by DART is still missing. Finally, new algorithms should be developed to solve the compatibility equations in an optimized way.

We believe that DART will contribute to solve harder problems where the networks have more heterogeneous properties and the dynamics are driven by more complex functions. Using our approach for dynamics on real networks should provide new analytical insights about critical phenomena in a wide range of fields from epidemiology [189] to neurosciences [142] and ecology [121].

3.8 Appendix A : DN-dimensional real dynamics

In this appendix, we use DART to reduce the dimension of dynamics on networks of N nodes, as before, but for which the state of node $j \in \{1, ..., N\}$ is now governed by a D-dimensional dynamics of the form

$$\dot{\boldsymbol{x}}_j = \omega_j \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j) + \sum_{k=1}^{N} A_{jk} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k), \tag{3.63}$$

where $\boldsymbol{x}_j = (x_j^{(d)})_{d=1}^{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ is a real-valued function of time representing the state of node j, $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ is the intrinsic dynamics function, and $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D$ is the function describing the coupling between the nodes.

To get a reduced system, we first need to introduce linear observables, namely $\boldsymbol{X}_\mu = (X_\mu^{(d)})_{d=1}^{D}$ with

$$X_\mu^{(d)} = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j} x_j^{(d)}, \quad \mu \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3.64}$$

and M being a reduction matrix respecting Conditions A-B of Sec. 3.5.1. Then, using the same steps as in Sec. 3.5.2, we obtain the nD-dimensional reduced dynamics

$$\dot{\boldsymbol{X}}_\mu \approx \Omega_\mu \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\beta}_\mu) + \kappa_\mu \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\gamma}_\mu, \boldsymbol{\delta}_\mu), \quad \mu \in \{1, ..., n\}, \tag{3.65}$$

together with the compatibility equations $MW = \mathcal{W}M$, $MK = \mathcal{K}M$, $MA = \mathcal{A}M$, and

$$\boldsymbol{\beta}_\mu = \Omega_\mu^{-1} \sum_{\nu=1}^{N} \mathcal{W}_{\mu\nu} \boldsymbol{X}_\nu, \tag{3.66}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_\mu = \kappa_\mu^{-1} \sum_{\nu=1}^{N} \mathcal{K}_{\mu\nu} \boldsymbol{X}_\nu, \tag{3.67}$$

$$\boldsymbol{\delta}_\mu = \kappa_\mu^{-1} \sum_{\nu=1}^{N} \mathcal{A}_{\mu\nu} \boldsymbol{X}_\nu. \tag{3.68}$$

Let us give an example of how DART applies for N Lorenz oscillators with diffusive coupling :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j &= a(y_j - x_j) + \sigma \textstyle\sum_{k=1}^{N} A_{jk}(x_k - x_j), \\
\dot{y}_j &= b x_j - y_j - x_j z_j, \\
\dot{z}_j &= x_j y_j - c z_j,
\end{aligned}$$

where $a > 0$ is the Prandtl number, $b > 0$ is the Rayleigh number, and $c > 0$ is sometimes called the aspect ratio [230]. We set $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$ as it is typically done to study the oscillators on the Lorenz attractor. With Eqs.(3.65-3.68) and the linear observables

$$\mathcal{X}_\mu = \sum_{j=1}^{n} M_{\mu j} x_j, \quad \mathcal{Y}_\mu = \sum_{j=1}^{n} M_{\mu j} y_j, \quad \mathcal{Z}_\nu = \sum_{j=1}^{n} M_{\mu j} z_j,$$

we get the following $3n$-dimensional reduced dynamics :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{X}}_\mu &= a(\mathcal{Y}_\mu - \mathcal{X}_\mu) - \sigma \textstyle\sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{L}_{\mu\nu}\mathcal{X}_\nu, \\
\dot{\mathcal{Y}}_\mu &= b\mathcal{X}_\mu - \mathcal{Y}_\mu - \mathcal{X}_\mu\mathcal{Z}_\mu, \\
\dot{\mathcal{Z}}_\nu &= \mathcal{X}_\mu\mathcal{Y}_\mu - c\mathcal{Z}_\mu,
\end{aligned}$$

where $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{A}$ is the reduced Laplacian matrix.

We now aim to measure phase synchronization for both the complete *and* reduced dynamics. For the complete dynamics and for the oscillators reaching the Lorenz attractor, the phase of oscillator j can be defined as [186, 202]

$$\theta_j = \arctan\left[\frac{z_j - z_0}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2} - u_0}\right] \tag{3.69}$$

with $z_0 = 27$ and $u_0 = 10$. The global phase synchronization is then computed using the modulus of Eq. (3.12).

Measuring global phase synchronization is not so simple for the reduced dynamics. Indeed, the linear observables $\mathcal{X}_\mu$, $\mathcal{Y}_\mu$, and $\mathcal{Z}_\mu$, do not contain information about the synchronization between the oscillators *inside* the communities. To apply DART to these oscillator dynamics *with the aim of measuring synchronization*[12], nonlinear observables must be introduced. For instance, one could use $\mathcal{V}_\mu = \sum_{j=1}^{N} M_{\mu j}\|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{X}_\mu\|^2$ as synchronization observables, but this would require a number of lengthy manipulations and would lead to a more complicated reduced system [see Annexe B].

Despite these difficulties, there is still a way to use the reduced dynamics of linear observables to get some insights on the synchronization *between* the communities. First, we define the phase of a community B_μ of Lorenz oscillators as

$$\Psi_\mu = \arctan\left[\frac{\mathcal{Z}_\mu - z_0}{\sqrt{\mathcal{X}_\mu^2 + \mathcal{Y}_\mu^2} - u_0}\right], \tag{3.70}$$

which is valid if the mean position of the oscillators in the community (i.e., the observables) reaches the Lorenz attractor. Then, we use the coefficients ℓ_μ introduced in Eq. (3.11) and the phases Ψ_μ to get the following measure of phase synchronization between the communities :

$$\mathcal{R} = \left|\sum_{\mu=1}^{n} \ell_\mu e^{i\Psi_\mu}\right|. \tag{3.71}$$

12. One could still be interested in the reduced dynamics of linear observables and get good results in some cases.

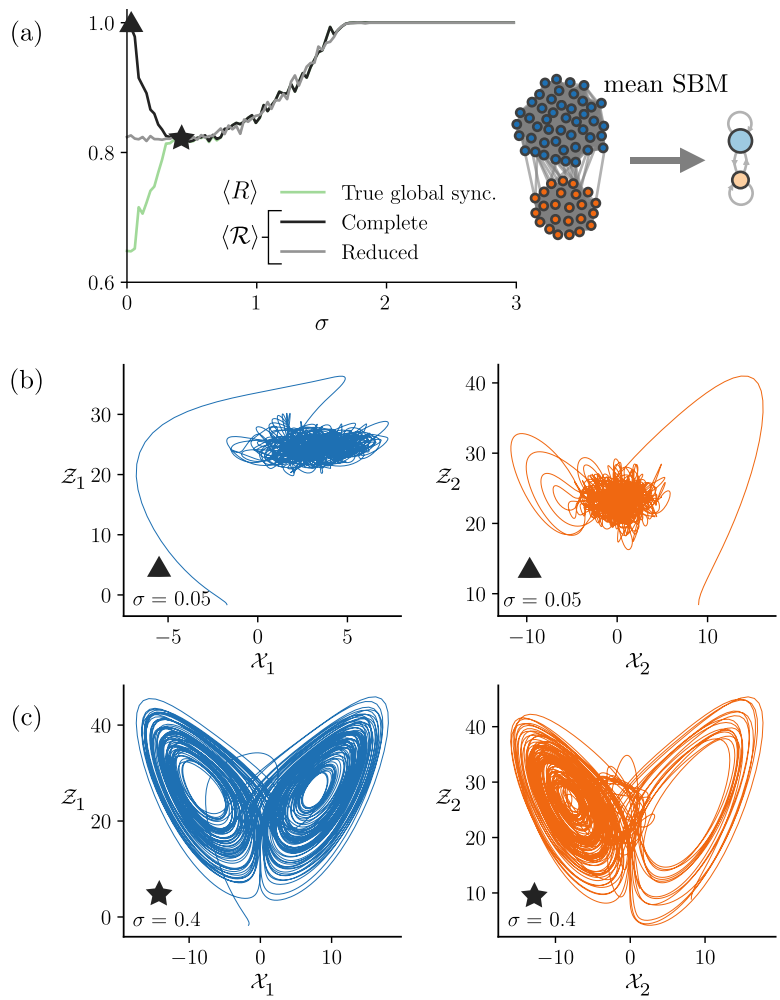


FIGURE 3.15 – Lorenz dynamics on the mean SBM. (a) Global phase synchronization curve (green) vs. the coupling. The synchronization curves related to the measure (3.71) are also shown for the complete (black) and reduced (grey) dynamics. (b-c) Observable trajectories in each community (blue and orange) in the $\mathcal{X}_\mu$-$\mathcal{Z}_\mu$ plane. The trajectories do not reach the Lorenz attractor for small coupling in (b), but reach the attractor for stronger coupling in (c). Parameters : $N = 50$, $N_1 = 30$, $N_2 = 20$, $p_{\text{in}} = 0.8$, $p_{\text{out}} = 0.1$, $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$. $\langle \cdot \rangle$ denotes the average over time and 100 randomly chosen initial conditions.

We are now ready to compare the complete and the reduced Lorenz dynamics on the mean SBM. The agreement between the temporal series of $\boldsymbol{X}_\mu = (\mathcal{X}_\mu, \mathcal{Y}_\mu, \mathcal{Z}_\mu)$ in the complete dynamics and the ones of the reduced dynamics is poor, which is expected, because the oscillators are chaotic. However, when looking at the curves describing the global phase synchronization between the communities in Fig. 3.15 (a), the agreement is surprisingly good. The curves are obtained by extracting the phase of each community with Eq. (3.70) and by measuring the synchronization between the communities with Eq. (3.71).

For small coupling values, the discrepancies between $\langle R \rangle$ and $\langle \mathcal{R} \rangle$ are caused by the fact that the measure of synchronization is not well defined. In this regime, Fig. 3.15 (b) shows that

the trajectories of the complete dynamics do not reach the Lorenz attractor, preventing us from using the observable of Eq. (3.71). Also, since the reduced dynamics does not carry any information about global phase synchronization, the grey synchronization curve of Fig. 3.15 (a) is expected to be different from the true global phase synchronization defined in Eq. (3.12).

For larger coupling values, the oscillators in each community of the complete dynamics become synchronized and the trajectories reach a Lorenz attractor as shown in Fig. 3.15 (c). At that point, only the synchronization between the communities can further increase phase synchronization. This is why the synchronization curves for $\langle R \rangle$ and $\langle \mathcal{R} \rangle$ agree with one another.

3.9 Appendix B : Phase and modulus equations for the reduced phase dynamics

In the context of synchronization, the observable of interest is not Z_μ itself, but rather its modulus R_μ and its phase Φ_μ as in Eq. (3.9). To get the differential equations describing the evolution of R_μ and Φ_μ, one simply uses

$$\dot{R}_\mu = \frac{\dot{Z}_\mu \bar{Z}_\mu + Z_\mu \dot{\bar{Z}}_\mu}{2R_\mu} \quad \text{and} \quad \dot{\Phi}_\mu = \frac{\dot{Z}_\mu \bar{Z}_\mu - Z_\mu \dot{\bar{Z}}_\mu}{2iR_\mu^2}, \tag{3.72}$$

which lead to real reduced systems of dimension $2n$. For the Winfree, Kuramoto, and theta models, the reduced dynamics for the moduli and phases are given in Table 3.3. Specific versions of the equations in Table 3.3 are shown in Table 3.4.

TABLE 3.3 – The reduced dynamics for three phase models in terms of the synchronization observable R_μ and the phase observable Φ_μ. To simplify the equations, we have defined $\Phi_{xy,z} = \Phi_x + \Phi_y - \Phi_z$ where two indices separated by a comma indicate a difference between the corresponding phase observables and otherwise, the phase observables are summed.

Winfree

$$\dot{R}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} R_\nu \sin \Phi_{\mu,\nu} + \frac{\sigma\kappa_\mu}{2N} \cos \Phi_\mu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu} \sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} R_\xi R_\tau \cos \Phi_{\xi\tau,\mu} + \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \cos \Phi_\mu \cos \Phi_\nu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} R_\xi R_\tau R_\nu \cos \Phi_\nu \cos \Phi_{\xi\tau,\mu}$$

$$\dot{\Phi}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} \frac{R_\nu}{R_\mu} \cos \Phi_{\nu,\mu} - \frac{\sigma\kappa_\mu}{2N} \sin \Phi_\mu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu} \sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} \frac{R_\xi R_\tau}{R_\mu} \sin \Phi_{\xi\tau,\mu} - \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} \frac{R_\nu}{R_\mu} \sin \Phi_\mu \cos \Phi_\nu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} \frac{R_\xi R_\tau R_\nu}{R_\mu} \cos \Phi_\nu \sin \Phi_{\xi\tau,\mu}$$

Kuramoto

$$\dot{R}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} R_\nu \sin \Phi_{\mu,\nu} + \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \cos \Phi_{\nu,\mu} - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} R_\xi R_\tau R_\nu \cos \Phi_{\mu\nu,\xi,\tau}$$

$$\dot{\Phi}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\nu} \frac{R_\nu}{R_\mu} \cos \Phi_{\nu,\mu} - \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} \frac{R_\nu}{R_\mu} \sin \Phi_{\nu,\mu} - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} \frac{R_\xi R_\tau R_\nu}{R_\mu} \sin \Phi_{\mu\nu,\xi,\tau}$$

Theta

$$\begin{aligned}
\dot{R}_\mu = {} & \frac{\Omega_\mu}{2} \sin \Phi_\mu - \frac{\Omega_\mu^{-1}}{2} \sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\xi}\mathcal{W}_{\mu\tau} R_\xi R_\tau \sin \Phi_{\xi\tau,\mu} - 2R_\mu^{-1} \sum_{\xi=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\xi} \sin \Phi_{\xi,\mu} - \left(\frac{1-R_\mu^2}{2}\right) \sin \Phi_\mu + \frac{\sigma\kappa_\mu}{2N} \sin \Phi_\mu - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu} \sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} R_\xi R_\tau \sin \Phi_{\xi\tau,\mu} \\
& - \frac{\sigma}{N} \sum_{\xi=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi} R_\xi \sin \Phi_{\xi,\mu} + \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} R_\xi R_\tau R_\nu \cos \Phi_\nu \sin \Phi_{\xi\tau,\mu} + \frac{\sigma}{N\kappa_\mu} \sum_{\nu,\xi=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi} R_\xi R_\nu \cos \Phi_\nu \sin \Phi_{\xi,\mu} - \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \cos \Phi_\nu \sin \Phi_\mu \\
\dot{\Phi}_\mu = {} & 1 - \left(\frac{1+R_\mu^2}{2R_\mu}\right) \cos \Phi_\mu + \frac{\Omega_\mu}{2R_\mu} \cos \Phi_\mu + \frac{\Omega_\mu^{-1}}{2} \sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\xi}\mathcal{W}_{\mu\tau} \frac{R_\xi R_\tau}{R_\mu} \cos \Phi_{\xi\tau,\mu} + \sum_{\xi=1}^{n} \mathcal{W}_{\mu\xi} \frac{R_\xi}{R_\mu} \cos \Phi_{\xi,\mu} + \frac{\sigma\kappa_\mu}{2NR_\mu} \cos \Phi_\mu - \frac{\sigma}{2N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} \frac{R_\nu}{R_\mu} \cos \Phi_\nu \cos \Phi_\mu \\
& + \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu} \sum_{\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} \frac{R_\xi R_\tau}{R_\mu} \cos \Phi_{\xi\tau,\mu} + \frac{\sigma}{N} \sum_{\xi=1}^{n} \mathcal{K}_{\mu\xi} \frac{R_\xi}{R_\mu} \cos \Phi_{\xi,\mu} - \frac{\sigma}{2N\kappa_\mu^2} \sum_{\nu,\xi,\tau=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi}\mathcal{K}_{\mu\tau} \frac{R_\xi R_\tau R_\nu}{R_\mu} \cos \Phi_\nu \cos \Phi_{\xi\tau,\mu} - \frac{\sigma}{N\kappa_\mu} \sum_{\nu,\xi=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}\mathcal{K}_{\mu\xi} \frac{R_\xi R_\nu}{R_\mu} \cos \Phi_\nu \cos \Phi_{\xi,\mu}
\end{aligned}$$

TABLE 3.4 – The reduced dynamics of the models introduced in Sec. 3.4.2 in terms of the synchronization observable R_μ and the phase observable Φ_μ when $\mathcal{K}_{\mu\nu} = \kappa_\mu \delta_{\mu\nu}$, $\mathcal{W}_{\mu\nu} = \Omega_\mu \delta_{\mu\nu}$, and $\kappa_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu}$.

Winfree

$$\begin{aligned} \dot{R}_\mu &= \sigma \left(\frac{1 - R_\mu^2}{2N} \right) \cos \Phi_\mu \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} \left(1 + R_\nu \cos \Phi_\nu \right) \\ \dot{\Phi}_\mu &= \Omega_\mu - \sigma \left(\frac{1 + R_\mu^2}{2N R_\mu} \right) \sin \Phi_\mu \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} \left(1 + R_\nu \cos \Phi_\nu \right) \end{aligned} \tag{3.73}$$

Kuramoto

$$\begin{aligned} \dot{R}_\mu &= \sigma \left(\frac{1 - R_\mu^2}{2N} \right) \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \cos(\Phi_\nu - \Phi_\mu) \\ \dot{\Phi}_\mu &= \Omega_\mu + \sigma \left(\frac{1 + R_\mu^2}{2N R_\mu} \right) \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} R_\nu \sin(\Phi_\nu - \Phi_\mu) \end{aligned} \tag{3.74}$$

Theta

$$\begin{aligned} \dot{R}_\mu &= \left(\frac{1 - R_\mu^2}{2} \right) \sin \Phi_\mu \left[\Omega_\mu - 1 + \frac{\sigma}{N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} (1 - R_\nu \cos \Phi_\nu) \right] \\ \dot{\Phi}_\mu &= 1 - \left(\frac{1 + R_\mu^2}{2R_\mu} \right) \cos \Phi_\mu + \left[1 + \left(\frac{1 + R_\mu^2}{2R_\mu} \right) \cos \Phi_\mu \right] \left[\Omega_\mu + \frac{\sigma}{N} \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{A}_{\mu\nu} (1 - R_\nu \cos \Phi_\nu) \right] \end{aligned} \tag{3.75}$$

3.10 Appendix C : Existence and uniqueness of solutions to the compatibility equations

We prove the claims made in Sec. 3.5.3 about the solutions to the compatibility equations.

Let M and T be complex matrices of respective size $n \times N$ and $N \times N$ where $n < N$. As shown in Ref. [196], when $\mathcal{T}$ is an unknown matrix of size $n \times n$, the equation

$$\mathcal{T}M = MT, \tag{3.76}$$

has a solution if and only if

$$MTM^{+}M = MT, \tag{3.77}$$

where M^{+} denotes the Moore-Penrose pseudo-inverse of M. If the latter condition is respected, then any solution of Eq. (3.76) takes the form

$$\mathcal{T} = MTM^{+} + Y - YMM^{+},$$

where Y is an arbitrary $n \times n$ matrix. If, moreover,

$$MM^{+} = I,$$

then the only possible solution is $\mathcal{T} = MTM^{+}$.

The equation $MM^{+} = I$ is satisfied if the rank of M is n, which is precisely Condition A that we have imposed on M to guarantee the linear independence of the observables Z_{μ}. Thus, in the context of dimension reduction, $MM^{+} = I$ must be satisfied, which implies that Eq. (3.76) has at most one solution, namely, $\mathcal{T} = MTM^{+}$. Now, the condition

$$M^{+}M = I, \tag{3.78}$$

is sufficient for satisfying Eq. (3.77). However, Eq. (3.78) is satisfied only if the rank of M is N, which contradicts our first assumption that $n < N$.

We have proved so far that, in the context of dimension reduction, there exists at most one solution to Eq. (3.76), i.e., $\mathcal{T} = MTM^{+}$. However, the existence of this solution remains non-trivial. To go further in our analysis, we need to impose an additional restriction to the matrix T.

Thus, let us suppose that T is real and symmetric, as are the matrices W, K, and A in Eqs. (3.25-3.27). Then, T possesses N real orthonormal eigenvectors of size $1 \times N$ (i.e., row vectors). Let us choose $\ell \geq n$ eigenvectors and form the $\ell \times N$ matrix V whose μ-th row is the μ-th eigenvector of T. Then, $VV^{\top} = I$ and $V^{+} = V^{\top}$.

Additionally, let us suppose that M can be factorized as $M = CV$, where C is a real $n \times \ell$ matrix of rank n, so $n \leq \ell$. Simple manipulations then lead to the following conclusion : Eq. (3.76) is satisfied if and only if

$$\mathcal{T}C = C\Lambda, \tag{3.79}$$

where Λ is the diagonal matrix whose μ-th element on the diagonal is equal to the eigenvalue λ_μ of the μ-th eigenvector in V. In turn, Eq. (3.79) is consistent if and only if

$$C\Lambda C^+ C = C\Lambda.$$

Thus, $C^+C = I$ is a sufficient criterion for Eq. (3.76). But $C^+C = I$ is satisfied if and only if the rank of C is ℓ. We therefore need to impose that $\ell = n$ and that C is a non-singular matrix.

All in all, we have proved that if the three conditions below are satisfied, then Eq. (3.76) has a solution :

(1) $M = CV$, where
(2) C is a non-singular $n \times n$ real matrix and
(3) V is a $n \times N$ real matrix composed of n real orthonormal row eigenvectors of T.

Moreover, the solution is unique and it is equal to

$$\mathcal{T} = C\Lambda C^{-1}.$$

3.11 Appendix D : Calculation of C_T and V_T in Procedure 1

We explain how to compute the matrices C_T and V_T of Procedure 1. The difficult part of the calculation is C_T, for which we propose two exact methods and an approximate method based on nonnegative matrix factorization, a special form of low-rank approximation of matrices.

3.11.1 Eigenvector matrix V_T

Any row eigenvector of the target matrix T can, in principle, be used to build the matrix V_T. However, to get observables that describe the large-scale dynamics of the system, the eigenvectors of V_T should have as many non-zero elements as possible. Moreover, to simplify the calculation of C_T, the matrix V_T should already be close to a reduction matrix, which is required to satisfy Condition B. Hence, the sign of the eigenvectors should minimize the number of negative elements. This is easily done when the target matrix is either W or K, since all eigenvectors can contain only nonnegative elements. When the target matrix is A, there is only one eigenvector with nonnegative elements, the Perron vector of A, associated with the largest eigenvalue of A. Thus, the Perron vector, once normalized, should always be included in V_A.

3.11.2 Exact methods to compute C_T for a given V_T

There are two typical cases : (1) all elements of V_T are nonnegative and (2) many elements of V_T are negative, but one row of V_T is nonnegative.

If all the elements of V_T are nonnegative, as for $T = W$ or $T = K$, then the solution to Step 3 of Procedure 1 is

$$C_T = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sum_j (V_T)_{1j}}, \ldots, \frac{1}{\sum_j (V_T)_{nj}}\right), \tag{3.80}$$

which makes M_T satisfy Condition B.

If V_T contains at least one row with nonnegative elements, as for the case $T = A$ when the Perron vector is included, then the solution to Step 3 is of the form

$$C_T = DE, \tag{3.81}$$

with

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sum_j (EV_T)_{1j}}, \ldots, \frac{1}{\sum_j (EV_T)_{nj}}\right), \tag{3.82}$$

and

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_2 & 1 & 0 & \cdots \\ \alpha_3 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.83}$$

where we have placed the nonnegative eigenvector in the first row of V_T without loss of generality. The parameters α_μ are chosen to ensure the non-negativity of all elements $(EV_T)_{\mu j}$. A simple solution is

$$\alpha_\mu = \max\left\{\frac{(V_T)_{\mu 1}}{(V_T)_{11}}, \ldots, \frac{(V_T)_{\mu N}}{(V_T)_{1N}}\right\}.$$

When $T = A$, the last method ensures the existence of at least one coefficient matrix C_A which in turn implies that the reduction matrix M_A is positive and solve exactly the compatibility equation $M_A A = \mathcal{A} M_A$. Thanks to Eqs. (3.81-3.83), the method also provides an explicit formula for the calculation of C_A. However, the method does not confer any additional desirable property to M_A. For instance, M_A could be far from being row-orthogonal [Condition A'] and could thus limit our capacity to interpret the linear observables $Z_1, \ldots, Z_n$. As a consequence, we need to compute C_A in another way.

3.11.3 Approximate method to compute C_T for a given V_T

In this paper, we rely on an approximate method that uses two matrix factorization algorithms. First, semi-nonnegative matrix factorization (SNMF) [4, 62] decomposes V_T as $X_1 X_2$, where X_1 is non-singular and X_2 is nonnegative [Condition B_2]. Actually, the algorithm minimizes the MSE between V_T and $X_1 X_2$. We use the Python package *PyMF* to perform SNMF. Second, we use orthogonal nonnegative matrix factorization (ONMF) [63] to factorize the nonnegative matrix X_2 as $X_3 M_T$, where X_3 is non-singular and M_T is as close as possible to a row-orthogonal nonnegative matrix, which is a desirable property for the reduction

matrix [Condition A']. To perform the calculations, we have modified and corrected the Python package *iONMF*. Starting from eigenvector matrix V_T, we end up with a nonnegative matrix M_T, which is nonnegative and (or almost) row-orthogonal. The corresponding matrix C_T is therefore $X_3^{-1}X_1^{-1}$. Elementary manipulations finally yield a row-normalized M_T [Condition B_1].

3.12 Appendix E : Calculation of C_{T_u} in Procedure 2

Step 4 of Procedure 2 does not specify how to find the coefficient matrix C_{T_u}. The reason for this lack of specificity is that there is no unique method for the computation of C_{T_u}. We have chosen an approximate method, similar to the one of Appendix 3.11, because it leads to reduction matrices M_u that are almost row-orthogonal. The details are given below.

Let us define

$$V_u = \begin{cases} V_{T_1}, & u = 1, \\ V_{T_2} V_{T_1}^{+} V_{T_1}, & u = 2, \\ V_{T_3} V_{T_1}^{+} V_{T_1} V_{T_2}^{+} V_{T_2} V_{T_1}^{+} V_{T_1}, & u = 3. \end{cases}$$

Therefore, the reduction matrix M_u in Eq. (3.40) is

$$M_u = C_{T_u} V_u, \quad u \in \{1, 2, 3\}. \tag{3.84}$$

In general, it is not possible to find C_{T_u} such that the reduction matrix M_u in Eq. (3.84) is nonnegative, normalized, and as close as possible to a row-orthogonal matrix [Conditions B and A'].

However, we can consider M_u as a factor of V_u and find an approximate solution to Eq. (3.84), i.e.,

$$V_u \approx C_{T_u}^{-1} M_u, \tag{3.85}$$

which defines a matrix factorization problem where C_{T_u} and M_u are to be found.

First, to satisfy Condition B_2, we factor out a nonnegative $n \times N$ matrix X_1 from V_u using semi-nonnegative matrix factorization (SNMF) [4, 62],

$$V_u \approx C_1 X_1, \tag{3.86}$$

where C_1 is a non-singular $n \times n$ matrix found with the SNMF algorithm.

Second, to satisfy Condition A', we factor out a nonnegative and almost orthogonal $n \times N$ matrix X_2 from X_1 using orthogonal nonnegative matrix factorization (ONMF) [63],

$$X_1 \approx C_2 X_2, \tag{3.87}$$

where C_2 is a non-singular $n \times n$ matrix found with the ONMF algorithm.

Third, to satisfy Condition B_1, we factorize X_2 exactly to extract the reduction matrix M_u (now nonnegative, almost orthogonal, and normalized)

$$X_2 = C_3 M_u, \tag{3.88}$$

with a non-singular diagonal matrix C_3 where the μ-th diagonal value is given by $\sum_{j=1}^{N}(X_2)_{\mu j}$.

Finally, substituting Eqs. (3.87-3.88) into Eq. (3.86) and inverting the relation yields

$$M_u \approx C_3^{-1} C_2^{-1} C_1^{-1} V_u,$$

where we have used the non-singularity of C_1, C_2, and C_3. The coefficient matrix C_{T_u} is therefore

$$C_{T_u} = C_3^{-1} C_2^{-1} C_1^{-1}.$$

Other NMF approaches could be useful for the computation of the coefficient matrix. For instance, convex nonnegative factorization (CNMF) seems particularly adapted to our problem. Indeed, as reported in [62], CNMF is able to approximate a matrix with both positive and negative elements as the product of two matrices : a first matrix that convexly combines the elements of the original matrix ; a second nonnegative matrix whose rows are almost orthogonal. The impact of other NMF algorithms on the quality of DART will be investigated in another paper.

3.13 Appendix F : Equivalence between the complete and the reduced dynamics for $n = N$

Let $n = N$. Then, $M = CV$ can be written as the identity matrix. Moreover, the reduced dynamics (3.17) is equivalent to the complete dynamics (3.14) if and only if H is affine with respect to its last two arguments, i.e.,

$$H(u, v, w, z) = E(u, v)w + Q(u, v)z + S(u, v), \tag{3.89}$$

where $u, v, w, z \in \mathbb{C}$ and E, Q, S are any complex-valued holomorphic functions. The rest of this appendix is used to prove the above statements.

First, since W, K, A are real symmetric matrices, there exist an orthonormal eigenvector basis to construct the matrix V. For such basis, $V^\top$ is the inverse of V, so we can choose $C = V^\top$ to get $M = I$, the identity matrix. Note that the methods of Appendices 3.11.3-3.12 don't necessarily return $M = I$, but rather $M = P$, where P is a permutation binary matrix (with a single element 1 in each row and each column and 0 elsewhere). However, a simple relabelling of the variables, or the change $C \mapsto P^{-1}C$, yields the desired result $M = I$.

The equation $M = I$ readily implies that $Z_\mu = z_j$, $\Omega_\mu = \omega_j$, and $\kappa_\mu = k_j$ for all $j = \mu \in \{1, ..., N\}$. Moreover, $\mathcal{D}_\Omega^{-1} = \mathcal{W} = W$, $\mathcal{D}_\kappa^{-1} = \mathcal{K} = K$, $\mathcal{A} = A$, and the compatibility equations

are trivially satisfied. The reduced dynamics is therefore

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + k_j H\left(z_j, \bar{z}_j, \epsilon_j, \bar{\epsilon}_j\right),$$

where $\epsilon_j = k_j^{-1} \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell} z_\ell$.

Second, let us assume that Eq. (3.89) is satisfied. Then, according to the previous result, the reduced dynamics is

$$\dot{z}_j = F(z_j, \bar{z}_j) + \omega_j G(z_j, \bar{z}_j) + k_j[E(z_j, \bar{z}_j)\epsilon_j + Q(z_j, \bar{z}_j)\bar{\epsilon}_j + S(z_j, \bar{z}_j)]$$

which is equivalent to the complete dynamics (3.14).

Finally, let us assume that Eqs. (3.17) and Eqs. (3.14) are equivalent. Then, the equality

$$k_j H\left(z_j, \bar{z}_j, \epsilon_j, \bar{\epsilon}_j\right) = \sum_{k=1}^{N} A_{jk} H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k) \tag{3.90}$$

must be true for all $j \in \{1, ..., N\}$ and $(z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N$. Since H is a holomorphic function, we can develop the right-hand side function H in Taylor series around ϵ_j and $\bar{\epsilon}_j$ in the third and fourth arguments respectively :

$$H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k) = H\left(z_j, \bar{z}_j, \epsilon_j, \bar{\epsilon}_j\right) + (z_k - \epsilon_j)H_3 + (\bar{z}_k - \bar{\epsilon}_j)H_4 + s_{jk}^H.$$

where s_{jk}^H contains the higher-order terms, i.e.,

$$s_{jk}^H = \sum_{\ell_1,\ell_2=2}^{\infty} \frac{(z_k - \epsilon_j)^{\ell_1}(\bar{z}_k - \bar{\epsilon}_j)^{\ell_2}}{\ell_1!\ \ell_2!} \frac{\partial^{\ell_1+\ell_2} H}{\partial z_k^{\ell_1} \partial \bar{z}_k^{\ell_2}}\bigg|_{(z_k,\bar{z}_k)=(\epsilon_j,\bar{\epsilon}_j)}.$$

Substituting the expansion into Eq. (3.90), the zeroth order term cancels with the left-hand side and the sum over k of A_{jk} times the first order terms gives zero. Hence,

$$\sum_{k=1}^{N} A_{jk} s_{jk}^H = 0, \tag{3.91}$$

which tells us that all the higher-order (≥ 2) terms of the Taylor series of H must be zero. This is true if and only if H is affine with respect to its third and fourth argument as in Eq. (3.89). This concludes the proof.

It is straightforward to show that the coupling function H of the Winfree, Kuramoto, and theta models has the form of Eq. (3.89). Indeed, for the Winfree model,

$$E(z_j, \bar{z}_j) = Q(z_j, \bar{z}_j) = \frac{1}{2} S(z_j, \bar{z}_j) = -\frac{\sigma}{4N}(z_j^2 - 1),$$

for the Kuramoto model,

$$E(z_j, \bar{z}_j) = \frac{\sigma}{2N},\ Q(z_j, \bar{z}_j) = -\frac{\sigma z_j^2}{2N},\quad S(z_j, \bar{z}_j) = 0,$$

and for the theta model,

$$E(z_j, \bar{z}_j) = Q(z_j, \bar{z}_j) = -\frac{1}{2} S(z_j, \bar{z}_j) = \frac{\sigma}{4N}(z_j + 1)^2.$$

3.14 Appendix G : Initial conditions to get chimeras

One important fact about the simulations of the Kuramoto-Sakaguchi dynamics is that the initial conditions to get a chimera state are not known *a priori*. Apart from Ref. [158], there is not much information in the literature about the initial conditions that lead to chimera states. In this paper, we drew multiple initial conditions from a uniform distribution for each point in the density space of the mean SBM. After some numerical exploration, we found that the number of observed chimeras per initial condition is not equal everywhere in the density space as reported in [158]. These experiments raised the question : What are the initial conditions that allow the emergence of chimeras ?

For given ρ, Δ, f, and α, the initial conditions that lead to chimera states vary considerably. This is shown in Fig. 3.16. The heatmaps of initial conditions show diverse non-trivial patterns (for instance, spiral patterns) and the size of the regions of initial conditions giving chimera can be big as the complete map or only a very small part of it. It is therefore a hard problem to make an appropriate choice of initial conditions to find chimeras.

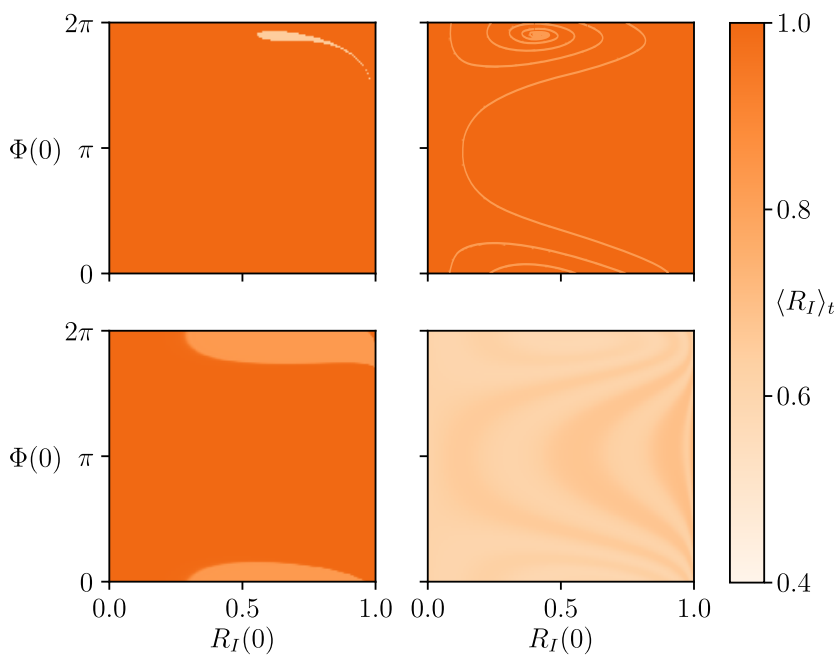


FIGURE 3.16 – Basin of attraction of the chimera states in the Kuramoto-Sakaguchi model (3.46-3.47) on the mean SBM for different f, α, ρ, Δ. (Top left) Stable chimera region : $f = 1.0$, $\alpha = 1.4$, $\rho = 0.57$, $\Delta = 0.33$. (Top right) Breathing chimera region : $f = 1.1$, $\alpha = 1.4$, $\rho = 0.5$, $\Delta = 0.4$. The line of the spiral pattern has been thickened for visualization purposes. (Bottom left) Stable-chimera region : $f = 1.3$, $\alpha = 1.45$, $\rho = 0.8$, $\Delta = 0.13$ (Bottom right) Breathing chimera region : $f = 1.5$, $\alpha = 1.45$, $\rho = 0.6$, $\Delta = 0.2$.

3.15 Complement I : Examples of Procedure 1

Let us illustrate the four steps of the procedure with a very simple example : two weakly interacting communities of oscillators with natural frequencies ω_1 and ω_2, respectively.

1 : The coupling between the oscillators is weak, and thus negligible in first approximation. Moreover, each element on the diagonal of W is either ω_1 or ω_2, which implies that the values of W are thus well partitioned. This makes W the ideal target matrix.

2 : Let $\mathscr{W}_\mu$ be the set of nodes with natural frequency ω_μ. Let also s^ω be the surjection such that

$$s^\omega(j) = \mu \quad \text{iff} \quad j \in \mathscr{W}_\mu.$$

Then, W has two orthonormal eigenvectors of interest, $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$, with elements

$$(\boldsymbol{v}_\mu)_j = \frac{1}{\sqrt{|\mathscr{W}_\mu|}}\, \delta_{\mu\, s^\omega(j)}\,.$$

where $\delta_{\mu\,\nu}$ is the Kronecker delta. These eigenvectors are the ones with the most non-zero elements. Thus,

$$V_W = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}.$$

3 : A simple way to satisfy Condition B is to choose

$$(C_W)_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|\mathscr{W}_\mu|}}\delta_{\mu\nu}.$$

which is obtained by inspection with $M_W = C_W V_W$ or more systematically from Eq. (3.80). The corresponding reduction matrix has elements

$$(M_W)_{\mu\, j} = \frac{1}{|\mathscr{W}_\mu|}\, \delta_{\mu\, s^\omega(j)}. \tag{3.92}$$

4 : We finally use Eqs. (3.34) to calculate the reduced matrices $\mathcal{W}$, $\mathcal{K}$, and $\mathcal{A}$. One easily shows that

$$(M_W^+)_{j\,\mu} = \delta_{\mu\, s^\omega(j)}.$$

Hence, for example,

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Note that, in this case, $\Omega_\mu = \omega_\mu$ for all $\mu \in \{1, ..., n\}$. The above procedure can be straightforwardly generalized to the case where the oscillators are divided into n communities, each having its own natural frequency.

In the previous example, the dynamical parameters were partitioned into two disjoint sets. Another interesting case is when the degrees are partitioned. For example, let us suppose that each node has degree either k_1 or k_2. Proceeding as in the previous example, but starting with

K instead of W in the first step, we get the reduction matrix $M_K = C_K V_K$ whose elements are

$$(M_K)_{\mu j} = \frac{1}{|\mathscr{K}_\mu|} \delta_{\mu s^k(j)}. \tag{3.93}$$

In the last equation, $\mathscr{K}_\mu$ denotes the set of nodes of degree k_μ and $s^k(j) = \mu$ if and only if $j \in \mathscr{K}_\mu$. The simplest reduced matrix then becomes

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

and $\kappa_\mu = k_\mu$ for all $\mu \in \{1, ..., n\}$.

3.16 Complement II : Explosive synchronization

It is important to note that the trajectories of the complete dynamics (3.5) do not converge to a equilibrium point in the same context as Fig. 3.14 (b). Indeed, as shown in Fig. 3.17, the trajectories of the complete dynamics reach a limit cycle instead of a equilibrium point. One should therefore be careful when using reduced dynamics to characterize the possible states of the complete system. In other words, the nature of the equilibrium points in the reduced dynamics is not necessarily the same for the complete dynamics.

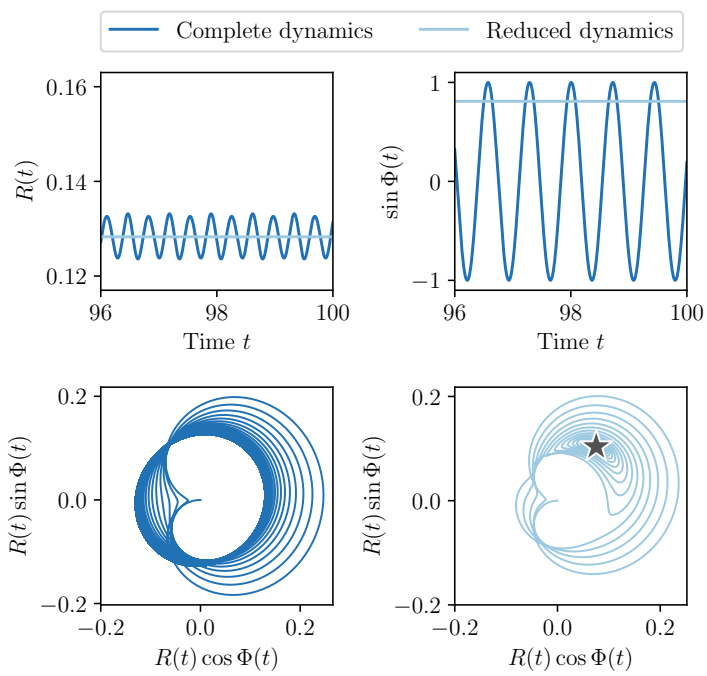


FIGURE 3.17 – Trajectories of the complete (dark blue) and reduced (lightblue) Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the star graph for $\sigma = 1$, $\alpha = 0.2\pi$, and $\theta_j(0) = 2\pi\left(\frac{j-1}{N}\right)$, $j \in \{1, ..., N\}$.

We conclude this complement by exploring the effect of the star size on the unsynchronized trajectories of the complete Kuramoto-Sakaguchi model. Let us define another global obser-

vable $Z^{\Psi} = Re^{i\Psi}$ where $\Psi = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$. The behavior of the observable Z^{Ψ} for the complete dynamics (3.5) on the star is particularly special for $\alpha = -0.2\pi$ and $\sigma = 0.2$. Indeed, we observe that the trajectories create highly symmetrical patterns with multiple lobes as shown in Fig. 3.18. Interestingly, the number of lobes is equal to the total number of nodes of the star graph N.

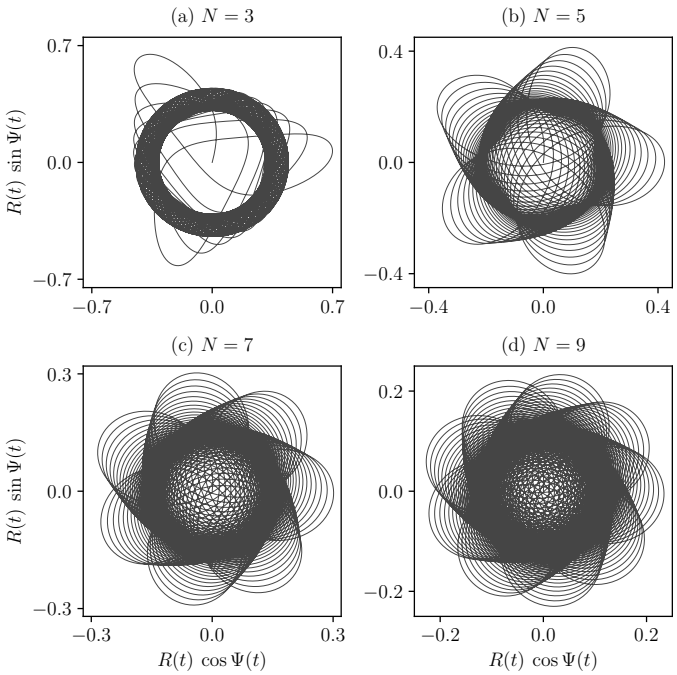


FIGURE 3.18 – (a-d) Trajectories in the complete Kuramoto-Sakaguchi dynamics on the star graph vs. the number of nodes N for $\sigma = 0.2$, $\alpha = 0.2\pi$ and $\theta_j(0) = 2\pi\left(\frac{j-1}{N}\right)$, $j \in \{1, ..., N\}$.

Conclusion et perspectives

Au sein d'un système complexe, d'étonnants phénomènes collectifs émergent sous l'influence d'une structure hétérogène et d'une dynamique non linéaire. La synchronisation en est un exemple parfait dans lequel des mouvements coordonnés surgissent des interactions entre les constituants de systèmes réels très variés, du cerveau aux réseaux électriques. Dans ces deux systèmes respectifs, l'épilepsie [122] et les pannes de courant [213] sont des problèmes majeurs où la prédiction de la synchronisation ou de la désynchronisation des constituants est fondamentale pour éviter la catastrophe. La synchronisation joue aussi un rôle clé pour la communication dans les nuées d'oiseaux et les bancs de poissons qui accomplissent des manoeuvres coordonnées à de grandes vitesses pour éviter les prédateurs [52].

Prédire l'émergence de phénomènes collectifs est sans doute l'un des plus grands défis du XXIe siècle et diverses approches seront requises pour retracer leur origine. Parmi ces approches, le réductionnisme méthodologique, par lequel les constituants et les interactions du système sont décomposés en détail, est indispensable pour identifier les divers mécanismes cachés intervenant dans les systèmes complexes. Toutefois, cette décomposition détaillée a un coût : en identifiant toujours plus de mécanismes, il devient difficile d'établir des liens cohérents entre ces mécanismes pour avoir une perspective d'ensemble sur le système et ce qui en émerge.

Afin de compléter les méthodes réductionnistes, il est alors nécessaire de concevoir de nouvelles approches qui s'appuient explicitement sur les caractéristiques intrinsèques des systèmes complexes comme leur structure et leur dynamique. Au chapitre 1, nous montrons qu'il est utile de décrire la structure avec des objets mathématiques appelés graphes, dans lesquels les constituants sont simplifiés à des sommets et les interactions, à des arêtes. À chaque sommet, il est possible d'y attribuer des états qui évoluent dans le temps et qui sont influencés par les états des autres sommets. Il en résulte un système dynamique sur un graphe gouverné par un système d'équations différentielles. Lorsque ce système possède des solutions périodiques, les constituants sont qualifiés d'oscillateurs et les dynamiques deviennent alors d'excellents bancs d'essai pour simuler l'émergence de la synchronisation.

Cependant, il est difficile de prédire la synchronisation des oscillateurs puisque la dimension des dynamiques décrivant les systèmes complexes est élevée. Dans ce mémoire, nous nous sommes ainsi dévoués à la *réduction dimensionnelle* des systèmes complexes. Au chapitre 2,

nous avons montré comment réduire la dynamique d'oscillateurs à une dynamique de leur phase uniquement, ce qui nous a permis d'obtenir le paradigmatique modèle de Kuramoto. Le modèle de Kuramoto est toutefois plein de surprises : sa dynamique est extrêmement riche et les oscillateurs se synchronisent malgré l'apparente simplicité du modèle. Nous avons ainsi introduit des méthodes mathématiques spécialisées de réduction dimensionnelle que nous avons réussi à appliquer au modèle de Kuramoto sur des graphes modulaires simples.

Il y a toutefois des limites à ces méthodes de réduction dimensionnelle : leur application est restreinte aux dynamiques de phase sur des graphes avec des propriétés homogènes. Au chapitre 3, nous avons découvert une nouvelle approche pour réduire la dimension des dynamiques sur des graphes, nommée DART pour *Dynamics Approximate Reduction Technique*. DART clarifie non seulement les difficultés à réduire la dimension d'une dynamique sur des graphes, mais révèle aussi une trichotomie intéressante reliée à la conservation des propriétés dynamiques et structurelles du système complet. Nous avons pris d'assaut cette trichotomie en élaborant deux procédures qui font usage de la théorie spectrale des graphes et de diverses techniques d'optimisation pour faire des compromis entre le respect de la structure et de la dynamique du système complet. En plus d'obtenir les dynamiques réduites pour trois dynamiques de phase différentes avec DART, nous avons réussi à prédire l'émergence de phénomènes exotiques de synchronisation dans des graphes avec une structure modulaire.

L'accomplissement de ce projet de recherche a donné naissance à une quantité considérable de questionnements sur la réduction dimensionnelle des systèmes complexes. Afin de les garder en mémoire sans encombrer la conclusion, ces questionnements sont mis en contexte avec leurs difficultés dans le tableau C. Celui-ci est divisé en trois parties : les perspectives structurelles, les perspectives dynamiques et les perspectives DART. Les *perspectives structurelles* sont principalement reliées à l'applicabilité d'une réduction dimensionnelle pour des réseaux réels ou des graphes avec des propriétés plus complexes, comme des arêtes dirigées, une distribution des degrés en loi de puissance ou une structure d'ordre supérieur. Les *perspectives dynamiques* se rapportent à des analyses mathématiques supplémentaires des dynamiques qui auraient pu être effectuées. Entre autres, une avenue prometteuse est l'utilisation des opérateurs de Koopman, par laquelle les dynamiques non linéaires sont transformées en dynamiques de plus haute dimension, mais *linéaires*. Le spectre d'un opérateur de Koopman possède de l'information fondamentale sur la structure *et* la dynamique des systèmes complexes. Finalement, les *perspectives DART* sont surtout reliées à des extensions méthodologiques de DART, comme l'ajout d'observables non linéaires [annexe B] ou l'extension à des dynamiques adaptatives.

Rendre *simple* un système *complexe* semble être à l'encontre de toute logique. Pourtant, la simplicité d'un système réduit fournit une intuition profonde de l'émergence de phénomènes collectifs. Une simplification n'est toutefois pas simplement donnée : seul l'exercice rigoureux offre un regard instructif sur les systèmes complexes, ce qui n'est pas pour l'esprit oisif.

Tableau C – Perspectives futures du projet de recherche présenté dans ce mémoire.

Mise en contexte	Questionnements	Difficultés
	Perspectives structurelles	
Les réseaux complexes sont typiquement dirigés.	Comment réduire la dimension des dynamiques sur des graphes dirigés ? Est-ce possible avec DART ?	La matrice d'adjacence n'est pas symétrique et son spectre est complexe. DART n'est pas adaptée à ces propriétés pour le moment.
La théorie spectrale des graphes est de mieux en mieux connue [181], mais n'est pas utilisée à son plein potentiel dans l'étude des dynamiques sur des graphes.	Est-ce que la forme analytique de la densité spectrale d'un graphe aléatoire est utile pour l'étude des dynamiques sur ce graphe aléatoire ? Quel est le rôle des vecteurs propres reliés aux valeurs propres du coeur de la densité spectrale dans DART ?	La forme des densités spectrales peut être particulièrement complexe [181]. Les quantités spectrales sont souvent difficiles à interpréter.
Les graphes avec une structure d'ordre supérieur (ex. complexes simpliciaux) se projettent sur les graphes bipartis [23]. DART s'applique bien aux dynamiques sur les graphes bipartis.	Est-ce que DART permet de réduire la dimension des dynamiques sur des structures d'ordre supérieur ?	Le spectre des graphes d'ordre supérieur n'est pas nécessairement utilisable pour résoudre les équations de compatibilité dans DART. Le nombre de dimensions à conserver est sans doute plus grand pour prendre en compte l'effet des structures de différent ordre.
Il est populaire d'utiliser les symétries des graphes (automorphismes) plutôt que le spectre pour réduire la dimension des dynamiques d'oscillateurs [46, 172, 218, 227]. Le spectre d'un graphe et ses automorphismes sont reliés.	Est-ce plus prometteur d'utiliser les automorphismes pour la réduction dimensionnelle ?	Les automorphismes d'un graphe sont plus difficiles à obtenir numériquement (comparativement au spectre par exemple).
Il est possible d'utiliser DART pour la réduction dimensionnelle de dynamiques sur des réseaux réels afin de mesurer leur résilience. E. Laurence a déjà amorcé ce projet avec des réseaux bipartis réels de plantes-pollinisateurs. Ce projet est prometteur entre autres parce que DART s'applique efficacement aux réseaux bipartis. Dans les réseaux bipartis réels, il y a souvent plus de deux valeurs propres qui se détachent du coeur du spectre.	Est-il possible de quantifier la résilience des réseaux de plantes-pollinisateurs avec DART ?	Il n'est pas aisé de définir une mesure de résilience à l'aide du spectre de la matrice d'adjacence et des propriétés de la dynamique.

Le spectre d'un graphe invariant d'échelle (*scale-free*) possède un coeur qui ne suit pas la loi du demi-cercle de Wigner [68, 80] et ne possède pas nécessairement de valeurs propres qui se détachent de ce coeur. Les auteurs de la référence [198] réussissent à réduire une dynamique de phase sur des graphes invariants d'échelle en utilisant des observables Z_k pour chaque classe de degré k en deux équations à l'aide de la méthode OA et de la linéarisation. Cette démarche permet aux auteurs d'obtenir des seuils critiques de synchronisation des oscillateurs.	Comment choisir les vecteurs propres de la matrice d'adjacence pour construire la matrice de réduction M_A utilisée dans DART ? Faut-il plutôt viser à satisfaire l'équation de compatibilité $MK = \mathcal{K}M$ pour avoir des observables telles que $Z_\mu = Z_k$ comme dans la référence [198] ?	Le spectre des graphes n'est peut-être pas utile dans cette situation. La dimension du système réduit n peut-être près de N pour de grands graphes dans lesquelles le nombre de classes de degrés est élevé.

Perspectives dynamiques

À la figure 3.8 du chapitre 3, les transitions pour R_1 et R_2 au niveau mésoscopique atteignent 1 dans plusieurs cas. En posant $R_1 = R_2 = 1$ dans les équations différentielles du tableau 3.3 avec $n = 2$, il y aurait alors deux équations des observables mésoscopiques de phase (Φ_1 et Φ_2). Peut-être même qu'en posant $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, il est possible d'obtenir une seule équation pour Φ. Ce genre d'astuce a déjà utilisé efficacement dans ce mémoire (au chapitre 3 entre autres) et dans les références [1, 198].	Est-il possible de faire une analyse dynamique plus approfondie des dynamiques réduites obtenues avec DART ?	Malgré ces astuces, les équations différentielles sont peut-être encore trop compliquées. N. B. Malgré tout, il est bien de garder en tête que nous pouvons gagner une intuition des simulations numériques pour effectuer l'analyse de nos équations réduites avec DART ou une autre réduction dimensionnelle.
La non-linéarité de la dynamique des systèmes complexes est un défi d'importance à surmonter pour analyser un système complexe. Il se trouve qu'il est possible de transformer une dynamique non linéaire en une dynamique linéaire gouvernée par un opérateur de Koopman. Cette approche est particulièrement prometteuse puisque la non-linéarité de la dynamique initiale est préservée sous cette transformation et la transformation projette l'espace des états vers un espace d'observables. Le spectre de l'opérateur de Koopman contient des informations essentielles sur la dynamique *et* la structure du système, ce qui rend cette approche d'autant plus intéressante [218].	Est-ce que l'approche de Koopman permet d'obtenir des résultats analytiques pour des dynamiques sur des graphes décrivant des systèmes complexes ? Est-ce que le spectre de l'opérateur de Koopman porte de l'information intéressante sur l'émergence des chimères ?	Cette transformation déplace le problème de la non-linéarité : l'espace des observables est de dimension infinie. Malgré un récent regain d'intérêt, cette approche demeure plutôt technique et semble peu documentée pour des applications aux systèmes complexes. Les résultats obtenus avec cette approche semblent être majoritairement numériques [36, 135].

Pour les méthodes de Ott-Antonsen et Watanabe-Strogatz, la géométrie est pertinente pour expliquer l'Ansatz OA et la transformation de Watanabe-Strogatz respectivement [160].	Quel est le rôle de la géométrie de la dynamique sur des graphes dans l'émergence de phénomènes macroscopiques ? Est-ce que la géométrie donne de l'information pertinente sur la manière de réduire la dimension d'un système complexe ?	Ces questions requièrent des connaissances plus avancées de topologie et de géométrie différentielle qui sont difficiles à utiliser pour l'étude des systèmes complexes.
	Perspectives DART	
Comme mentionné en introduction de ce mémoire, les systèmes complexes sont souvent *adaptatifs*.	Est-il possible d'utiliser DART pour les systèmes adaptatifs (ex. cerveau) ?	Il est non trivial de trouver un mécanisme d'adaptation où la réduction dimensionnelle des références [142, 234] est applicable, et ce, même pour la dynamique simple de Wilson-Cowan [142]. N. B. Ce projet, amorcé par O. Ribordy, est en train d'être réalisé avec M. Vegué, J. Hermans, P. Desrosiers, A. Allard et V. Thibeault. Les résultats sont plutôt prometteurs.
La trichotomie dans DART impose de faire un compromis entre la conservation des caractéristiques structurelles et dynamiques.	Est-il possible de contourner cette trichotomie en respectant le mieux possible l'équation $$M(aW + bK + cA) = \mathcal{X}M$$ avec $M = CV$ où V est une matrice des vecteurs propres de $(aW + bK + cA)$? Nous pourrions ensuite utiliser $MT = \mathcal{T}M$ pour tout $T \in \{W, K, A\}$ et en déduire la solution qui minimise la MSE pour, $\mathcal{T} = MAM^+$.	Le spectre de $aW + bK + cA$ est possiblement compliqué et le choix de vecteurs propres pour construire M est peut-être difficile à faire. Le choix des constantes a, b et c n'est pas évident non plus. Peut-être qu'il faudrait choisir $c = 1$ et a, b de telle sorte que les éléments sur la diagonale de W et K soit du même ordre de grandeur (de l'ordre de 1 comme la matrice d'adjacence ?).
Ibid.	Est-il possible de généraliser DART en introduisant des observables pondérées par les paramètres dynamiques [voir l'annexe B] ?	Comme montré à l'annexe B, il n'est pas évident d'établir comment certains termes s'expriment selon les observables (ex. (B.19)) et comment fermer le système pour l'observable Y_ℓ.

DART s'inscrit parmi plusieurs autres méthodes de réduction dimensionnelle s'appliquant aux dynamiques de phase et possède en principe certaines similarités avec celles-ci. En particulier, les dynamiques réduites obtenues avec DART ressemblent aux dynamiques réduites obtenues avec la méthode OA.	Quel est le lien entre la méthode OA et DART ?	La méthode OA est dans la limite $N \to \infty$ et utilise les séries de Fourier contrairement à DART ($N < \infty$ et utilisation des séries de Taylor).
L'utilisation des séries de Taylor dans DART laisse supposer que la technique se généralise en conservant plus de termes (les termes non linéaires) dans les séries [voir l'annexe B].	Est-ce que DART se généralise pour des observables non linéaires ? Si oui, est-ce que la généralisation permet de réduire des dynamiques plus non linéaires et avec une meilleure précision ?	L'interprétation des quantités analogues à κ_μ et Ω_μ du chapitre 3 (ex. $\tau_\circlearrowright$) est plus difficile. Le choix des points autour desquelles nous effectuons les séries de Taylor n'est pas justifié complètement. Le nombre d'équations résultantes semble souvent devenir trop grand pour qu'une analyse dynamique soit effectuée.
DART restreint seulement la dimension de la dynamique réduite n à être plus petite que N.	Quelle est la qualité de la dynamique réduite par rapport à la dynamique complète selon n ? Pour quelle valeur de n la réduction dimensionnelle est exacte ou presque exacte ?	Il y a plusieurs procédures pour réduire la dimension de la dynamique complète avec DART. La réponse à ces questions dépend du choix de la matrice de réduction M et de plusieurs autres facteurs expliqués au chapitre 3.
Dans la littérature, il ne semble pas y avoir d'algorithme adapté pour faire à la fois une SNMF et une ONMF comme désiré pour DART. Dans l'article [146], les auteurs introduisent l'algorithme pour effectuer une *Semi-Orthogonal Nonnegative Matrix Factorization* (SONMF), mais ce n'est pas la matrice factorisée ($G^\top$ dans leur article) qui est orthogonale. Il semble toutefois que l'on puisse s'inspirer de cet article pour développer l'algorithme *Orthogonal Semi-Nonnegative Matrix Factorization* (OSNMF) pour résoudre le problème d'optimisation $$\underset{C,M}{\operatorname{argmin}} \; ||X - CM||_F^2$$ sujet à $M \geq 0$ et $MM^\top = I$ où X est une matrice cible de dimension $n \times N$ (ex. matrice de vecteurs propres), C est une matrice de coefficients de dimension $n \times n$ et M est une matrice de réduction de dimension $n \times N$.	Quelle est la méthode numérique optimale pour résoudre les équations de compatibilité résultantes de DART ? Est-ce la OSNMF, la CNMF [62] ou d'autres méthodes ?	Déterminer la méthode de factorisation de matrice optimale pour DART nécessite une étude comparative approfondie considérant plusieurs facteurs, dont les erreurs de factorisation et la vitesse de convergence de l'algorithme.

Annexe A

Outils numériques

A.1 Structure

Numériquement, les graphes peuvent être analysés et visualisés avec une bibliothèque de *Python* nommée *NetworkX*. Il y a plusieurs avantages à utiliser *NetworkX*, en voici quelques-uns :

1. Installation facile ;
2. Utilisation aisée avec Python.

Il y a cependant son penchant de désavantages :

1. Certaines fonctions sont lentes lorsque le nombre de sommets N est grand ;
2. Les visualisations sont limitées ou laborieuses à implémenter (ex. les boucles).

Pour pallier à ces problèmes, il existe *graph-tool* pour faire des calculs plus rapides (la bibliothèque est plus difficile à installer et à utiliser) et *D3.js* pour faire de meilleures visualisations. La bibliothèque *DynamicaLab* du groupe de recherche *Dynamica* contient également des algorithmes intéressants.

A.2 Dynamique

Pour résoudre numériquement la dynamique (1.27) et obtenir la série temporelle, nous avons fréquemment utilisé *scipy.integrate.ode* de *Python*. Il y a plusieurs avantages à utiliser cette classe, en voici quelques-uns :

1. La classe est bien documentée dans *scipy* ;
2. Il y a plusieurs types d'intégrateurs ;
   a) Des intégrateurs qui choisissent automatiquement l'intégrateur dépendant de si

l'équation différentielle est *raide*[1] ou non (intégrateur *vode* ou *lsoda*) ;

b) Un intégrateur de dynamiques complexes (*zvode*)[2] ;

c) Des intégrateurs bien connus comme Runge-Kutta d'ordre (4)5 (*DOPRI*).

3. Les intégrateurs sont d'ordre élevé, rapides et faciles à utiliser.

Notons que certaines dynamiques sur certains graphes (comme celles du chapitre 3) peuvent être très sensibles au choix de méthode d'intégration. Des résultats aberrants peuvent survenir (ex. convergence vers une mauvaise solution, divergences de la solution, oscillations saccadées, etc.) et l'origine des erreurs d'intégration peut être très mystérieuse.

Afin d'éviter ou de comprendre ces aberrations, il est utile, voire *essentiel*, de coder son propre intégrateur (ex. Euler, Runge-Kutta 4, DOPRI45, etc.) plutôt que d'utiliser une boîte noire dans *Python* (ex. *scipy.integrate.ode*, *scipy.integrate.odeint*). Vérifier les résultats avec plusieurs intégrateurs s'avère généralement très utile.

Dans cette optique, j'ai implémenté l'intégrateur de type Runge-Kutta *DOPRI* (pour DORmand et PRInce) [67], ce qui se fait aisément avec les *tableaux de Butcher* [38]. Au chapitre 3, la méthode a été utilisée pour obtenir les courbes de synchronisation pour les dynamiques de Winfree, Kuramoto et thêta et en particulier pour obtenir l'hystérésis pour la dynamique de Kuramoto sur l'étoile. Les intégrateurs intégrés dans *Python* provoquaient de sérieux problèmes, ce qui provenait peut-être de l'utilisation de pas adaptatifs.

1. Une définition universelle de la raideur d'une équation différentielle n'existe pas. Cependant, on dit souvent qu'une équation différentielle est raide (*stiff* en anglais) si les méthodes numériques (explicite) d'intégration sont numériquement instables. Dans le concret, on y voit des solutions numériques de (1.27) qui divergent.

2. Celui-ci est très utile pour l'intégration des dynamiques complexes du chapitre 3.

Annexe B

Extensions de DART

L'objectif de cette annexe est de présenter de nouvelles avenues possibles pour DART, présenté au chapitre 3. En plus de discuter des limitations possibles de la méthode, nous présentons quelques résultats analytiques dans deux sections.

D'une part, DART n'est pas limitée aux dynamiques de phase. Il est donc intéressant de se demander si celle-ci s'applique à des dynamiques d'oscillateurs telles que la dynamique de van der Pol (1.43). Abandonner les dynamiques de phase est toutefois coûteux : comment définir une observable de synchronisation et son évolution temporelle mathématiquement ? Dans la première section de cette annexe, nous discutons du problème et nous élaborons une méthode de réduction dimensionnelle d'une dynamique d'oscillateurs à une dynamique réduite régie par des observables non linéaires.

D'autre part, DART ne semble pas permettre de réduire efficacement les dynamiques de phase avec des distributions de paramètres dynamiques plus hétérogènes. À la deuxième section, nous introduisons ainsi une méthode qui a le potentiel de pallier à ce dernier obstacle.

L'exploration numérique des équations réduites obtenues dans cette annexe n'a généralement pas mené à des résultats concluants. Cela pourrait être causé par des erreurs analytiques ou numériques. Nous pensons toutefois que les méthodes proposées sont prometteuses et qu'elles n'ont pas encore été exploitées à leur plein potentiel.

B.1 Observables non linéaires

À la section 2.2, nous avons introduit la réduction d'un système dynamique à une dynamique de phase. En procédant ainsi, l'analyse mathématique de la synchronisation de phase devient plus aisée. Cependant, un oscillateur réel n'est pas uniquement caractérisé par sa phase : il faut généralement considérer les variations d'amplitude qui peuvent avoir un impact majeur sur le phénomène de synchronisation. Ce problème impose donc un retour aux systèmes dynamiques à DN dimensions.

Heureusement, DART n'est pas limitée aux dynamiques de phase et l'utilisation des séries Taylor suggère que l'approche est généralisable. Plus spécifiquement, l'extension naturelle de la méthode du chapitre 3 est de conserver des termes d'ordre supérieur dans la série de Taylor. Cependant, cette extension nous confronte à deux problèmes importants.

Le premier défi est relié aux observables. Pour les dynamiques de phase, l'observable complexe (3.8) est un choix naturel étant donné sa linéarité et son interprétation simple [sous-section 1.3.3]. Ce choix rend commode l'expression des dynamiques de phase sous une dynamique réduite mettant en jeu les observables de synchronisation [chapitre 2-3]. Pour une dynamique à DN dimensions, il faut trouver une observable suffisamment sophistiquée pour mesurer la synchronisation des oscillateurs, mais assez simple pour être manipulable mathématiquement.

Cela mène au deuxième problème. Comme introduit au chapitre 2, pour obtenir une dynamique réduite, le système d'équations différentielles doit se fermer en fonction de l'observable d'intérêt, ce qui est rarement possible pour des observables compliquées. De plus, en gardant des termes d'ordres supérieurs dans la série de Taylor, d'autres observables apparaissent ce qui implique d'autres équations différentielles qu'il faut aussi fermer. Or, la fermeture de la dynamique réduite est loin d'être garantie.

Dans cette section, nous montrons qu'il est possible de trouver des équations réduites constituées d'observables non linéaires (d'ordre 2) dont l'un des observables non linéaires est une observable de synchronisation. Nous appliquons la méthode de réduction dimensionnelle [1] aux $2N$ équations différentielles du type

$$\dot{x}_j = v_j, \tag{B.1}$$

$$\dot{v}_j = F(x_j, v_j) + \sum_{k=1}^{N} A_{jk} G(v_j, v_k), \tag{B.2}$$

où x_j est la position de l'oscillateur j, v_j est la vitesse et A est une matrice d'adjacence symétrique binaire. Le système (B.1-B.2) correspond à un cas plus général des systèmes de Liénard [exemple 10 du chapitre 1].

Tout d'abord, définissons les observables

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j \quad \text{et} \quad V = \sum_{j=1}^{N} a_j v_j,$$

où $\mathbf{a} = (a_j)_{1\times N}$ est un vecteur de poids normalisé $\sum_{j=1}^{N} a_j = 1$. Le vecteur de poids $\mathbf{a}$ est un cas particulier de la matrice de réduction M du chapitre 3. Ces observables linéaires représentent donc la position moyenne pondérée et la vitesse moyenne pondérée.

1. Notons toutefois qu'il aurait été plus raisonnable de commencer par le problème plus simple de réduire les dynamiques à N dimensions : $\dot{x}_j = F(x_j) + \sum_{k=1}^{N} A_{jk} G(x_j, x_k)$. D'ailleurs, la réduction à des observables non linéaires de la dynamique de Wilson-Cowan de la Réf. [142] semble être la plus prometteuse.

Afin de fermer le système, nous avons aussi besoin des *variances*

$$\mathcal{X} = \sum_{j=1}^{N} a_j (x_j - X)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \sum_{j=1}^{N} a_j (v_j - V)^2,$$

de la *covariance*[2]

$$\mathcal{C} = \sum_{j=1}^{N} a_j (x_j - X)(v_j - V), \tag{B.3}$$

et des *observables croisées*

$$\mathcal{C}_{xx} = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (x_j - X)(x_k - X), \qquad \mathcal{C}_{xv} = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (x_j - X)(v_k - V),$$
$$\mathcal{C}_{vv} = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_j - V)(v_k - V), \qquad \mathcal{C}_{vx} = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_j - V)(x_k - X).$$

En examinant attentivement l'équation de la variance $\mathcal{X}$, nous remarquons que celle-ci définit une observable de synchronisation. En effet, lorsque la position de chaque oscillateur est égale à la moyenne, alors $\mathcal{X}(t \to \infty) = 0$ et les oscillateurs sont synchronisés parfaitement [chapitre 1]. De façon analogue à l'exemple 15, nous utilisons l'observable $\exp(-\mathcal{X})$ de sorte que lorsque sa valeur est égale à 1, alors les oscillateurs sont synchronisés parfaitement.

En dérivant X, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{C}_{xx}$ par rapport au temps, nous déduisons directement les équations différentielles fermées

$$\dot{X} = V, \qquad \dot{\mathcal{X}} = 2\mathcal{C} \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{C}}_{xx} = \mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}.$$

Cependant, beaucoup plus de manipulations sont nécessaires pour extraire les équations différentielles des observables V, $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{vv}$, $\mathcal{C}_{xv}$ et $\mathcal{C}_{vx}$. Afin d'illustrer la méthode, effectuons d'abord les étapes de la réduction pour la vitesse moyenne des oscillateurs. La dérivée de V par rapport au temps est

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{N} a_j F(x_j, v_j) + \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} G(v_j, v_k). \tag{B.4}$$

D'une part, en développant $F(x_j, v_j)$ autour de (X, V) en série de Taylor jusqu'au deuxième ordre, nous obtenons

$$\begin{aligned} F(x_j, v_j) \approx\ & F(X,V) + (x_j - X) F_1(X,V) + (v_j - V) F_2(X,V) \\ & + \frac{1}{2} \left[(x_j - X)^2 F_{11}(X,V) + (v_j - V)^2 F_{22}(X,V) + 2(x_j - X)(v_j - V)^2 F_{12}(X,V) \right], \end{aligned}$$

2. Ce sont les mesures empiriques de variance et de covariance. Nous utiliserons seulement *variance* et *covariance* par abus de langage.

où les indices 1 et 2 indiquent que la fonction est dérivée par rapport au premier argument et au second argument respectivement. Par exemple,

$$F_{12}(X,V) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j\, \partial v_j}\Big|_{(x_j,v_j)=(X,V)} .$$

Nous continuerons d'utiliser cette notation dans la suite de la démarche afin d'alléger la notation. Cela dit, le terme $F(x_j, v_j)$ s'exprime directement en fonction des observables introduites précédemment :

$$\sum_{j=1}^{N} a_j F(x_j, v_j) \approx F(X,V) + \frac{\mathcal{X}}{2} F_{11}(X,V) + \frac{\mathcal{V}}{2} F_{22}(X,V) + \mathcal{C} F_{12}(X,V).$$

D'autre part, le développement de $G(v_j, v_k)$ autour de (V, V) jusqu'au deuxième ordre permet d'écrire

$$\begin{aligned} G(v_j, v_k) \approx\, & G(V,V) + (v_j - V) G_1(V,V) + (v_k - V) G_2(V,V) \\ & + \frac{1}{2}\left[(v_j - V)^2 G_{11}(V,V) + (v_k - V)^2 G_{22}(V,V) + 2(v_j - V)(v_k - V) G_{12}(V,V)\right], \end{aligned}$$

où il y a une dépendance selon les variables du système complet v_j et v_k que nous voulons éliminer. Avec le degré entrant du sommet j (1.3) et le degré moyen pondéré

$$\langle k \rangle_{\mathbf{a}} \equiv \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} = \sum_{j=1}^{N} a_j k_j,$$

le troisième terme de l'équation (B.4) devient

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} G(v_j, v_k) \approx\, & \langle k \rangle_{\mathbf{a}} G(V,V) + G_1(V,V) \sum_{j=1}^{N} a_j k_j (v_j - V) \\ & + G_2(V,V) \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_k - V) \\ & + \frac{1}{2} G_{11}(V,V) \sum_{j=1}^{N} a_j k_j (v_j - V)^2 \\ & + \frac{1}{2} G_{22}(V,V) \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_k - V)^2 + \mathcal{C}_{vv} G_{12}(V,V). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Pour fermer cette dernière équation avec les observables introduits précédemment, nous avons seulement à manipuler le deuxième et le troisième terme de la dernière équation. Le second terme s'écrit

$$\sum_{j=1}^{N} a_j k_j (v_j - V) = \sum_{j=1}^{N} a_j k_j v_j - \langle k \rangle_{\mathbf{a}} V.$$

Ensuite, en introduisant la constante $\hat{\kappa}_1$, nous faisons l'approximation

$$\sum_{j=1}^{N} a_j k_j v_j \approx \hat{\kappa}_1 V = \hat{\kappa}_1 \sum_{j=1}^{N} a_j v_j,$$

$$a_j k_j \approx \hat{\kappa}_1 a_j. \tag{B.6}$$

Le problème devient donc de trouver l'expression de $\hat{\kappa}_1$ qui minimise l'erreur à l'équation (B.6). Un choix possible est de trouver la valeur $\hat{\kappa}_1$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE) entre $a_j k_j$ et $\hat{\kappa}_1 a_j$. Cette étape est cruciale dans la démarche et est répétée à plusieurs reprises. La minimisation de l'erreur quadratique va comme suit :

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\hat{\kappa}_1 a_j - a_j k_j\right)^2,$$

$$\frac{d\mathrm{MSE}}{d\hat{\kappa}_1} = 0 = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\hat{\kappa}_1 a_j^2 - a_j^2 k_j\right),$$

$$\Rightarrow \hat{\kappa}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{a_j^2}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2}\right) k_j \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j k_j,$$

ce qui signifie que $\hat{\kappa}_1$ est le degré moyen $\langle k \rangle_{\hat{\mathbf{a}}}$. Pour simplifier la notation, nous continuerons toutefois d'utiliser $\hat{\kappa}_1$.

En ce qui concerne le troisième terme de l'équation (B.5), nous savons que

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_k - V) = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} v_k - \langle k \rangle_{\mathbf{a}} V.$$

En introduisant une constante κ_1, nous imposons l'équation

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} v_j = \kappa_1 V = \kappa_1 \sum_{k=1}^{N} a_k v_k,$$

qui est respectée exactement si le vecteur de poids $\mathbf{a}$ est un vecteur propre de la matrice d'adjacence A. Pour les raisons mentionnées dans le chapitre 3 et dans la Réf. [142], nous choisissons le vecteur propre dominant de la matrice d'adjacence. Plus explicitement,

$$\sum_{j=1}^{N} a_j A_{jk} = \kappa_1 a_k. \tag{B.7}$$

La sommation par rapport à l'index k des deux côtés de l'équation implique que $\kappa_1 = \langle k \rangle_{\mathbf{a}}$, ce qui signifie que le degré moyen pondéré[3] est une valeur propre de la matrice d'adjacence

3. ...ou le premier moment, ce qui justifie le choix du nom de la constante « κ_1 »...

de vecteur propre $\mathbf{a}$. Désormais, nous utilisons κ_1 plutôt que $\langle k \rangle_{\mathbf{a}}$ pour simplifier la notation. La substitution des équations (B.6) et (B.7) dans l'équation (B.5) donne

$$\dot{V} = F + \frac{\mathcal{X}}{2} F_{11} + \frac{\mathcal{V}}{2} F_{22} + \mathcal{C} F_{12} + \kappa_1 G + (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) V G_1 + \frac{\hat{\kappa}_1}{2} \mathcal{V} G_{11} + \frac{\kappa_1}{2} \mathcal{V} G_{22} + \mathcal{C}_{vv} G_{12},$$

où nous avons négligé les arguments des fonctions F et G, question de clarté. La démarche précédente permet également de tirer les équations différentielles pour la variance de la vitesse $\mathcal{V}$ et la covariance $\mathcal{C}$, soit

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= 2\mathcal{C} F_1 + 2\mathcal{V} F_2 + 2\hat{\kappa}_1 \mathcal{V} G_1 + 2\mathcal{C}_{vv} G_2, \\ \dot{\mathcal{C}} &= \mathcal{V} + \mathcal{X} F_1 + \mathcal{C} F_2 + \hat{\kappa}_1 \mathcal{C} G_1 + \mathcal{C}_{vv} G_2. \end{aligned}$$

Les manipulations pour déduire les équations différentielles pour les observables croisées sont plus délicates et nécessitent l'introduction de nouvelles constantes. Nous présentons donc ces manipulations pour l'observable $\mathcal{C}_{vv}$. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}_{vv} &= \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (\dot{v}_j - \dot{V})(v_k - V) + \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_j - V)(\dot{v}_k - \dot{V}) \\ &= \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_k - V) F(x_j, v_j) + \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_j - V) F(x_k, v_k) \\ &\quad + \sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{jl} (v_k - V) G(v_j, v_l) + \sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{kl} (v_j - V) G(v_k, v_l) - (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) V \dot{V}. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'approximation (B.6) et la contrainte (B.7). Traitons l'équation terme par terme.

1. $\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_k - V) F(x_j, v_j) + \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_j - V) F(x_k, v_k)$

   Si $F(x_j, v_j) \approx F(X, V) + (x_j - X) F_1(X, V) + (v_j - V) F_2(X, V)$, alors nous avons

   $$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} (v_k - V) F(x_j, v_j) \approx \mathcal{C}_{xv} F_1(X, V) + \mathcal{C}_{vv} F_2(X, V).$$

   Le développement $F(x_k, v_k) \approx F(X, V) + (x_k - X) F_1(X, V) + (v_k - V) F_2(X, V)$ et l'approximation (B.6) impliquent que

   $$\sum_{j=1}^{N} a_j k_j (v_j - V) F(x_j, v_j) \approx (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) V F(X, V) + \mathcal{C}_{vx} F_1(X, V) + \mathcal{C}_{vv} F_2(X, V).$$

2. $\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{jl} (v_k - V) G(v_j, v_l)$

Avec $G(v_j, v_l) \approx G(V,V) + (v_j - V)G_1(V,V) + (v_l - V)G_2(V,V)$, nous déduisons l'approximation

$$\begin{aligned}\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{jl}(v_k - V)G(v_j, v_l) \approx & \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_j (v_k - V)G(V,V) \\ & + \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_j (v_k - V)(v_j - V)G_1(V,V) \\ & + \sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{jl}(v_k - V)(v_l - V)G_2(V,V).\end{aligned}$$

Premier terme : Avec $\kappa_2 = \sum_{j=1}^{N} a_j k_j^2 = \langle k^2 \rangle_{\mathbf{a}}$ (deuxième moment des degrés), nous effectuons l'approximation suivante :

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_j (v_k - V)G = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_j v_k - \kappa_2 VG \approx (\hat{\kappa}_2 - \kappa_2)VG,$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_j A_{jk} k_j = a_j k_j^2 \approx \hat{\kappa}_2 a_j, \tag{B.8}$$

où $\hat{\kappa}_2$ est une constante. La minimisation de la MSE permet de conclure que

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j^2}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2} \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j k_j^2,$$

soit le deuxième moment $\langle k \rangle_{\hat{\mathbf{a}}}$ du degré pondéré par $\hat{\mathbf{a}}$.

Deuxième terme : Nous introduisons une constante δ et nous faisons les approximations

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_j (v_k - V)(v_j - V)G_1 \approx \delta \mathcal{C}_{vv} G_1,$$

$$a_j A_{jk} k_j \approx \delta a_j A_{jk}. \tag{B.9}$$

Pour des réseaux binaires, la minimisation de la MSE implique que

$$\delta = \frac{\sum_{j,k=1}^{N} a_j^2 A_{jk}^2 k_j}{\sum_{j,k=1}^{N} a_j^2 A_{jk}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j^2}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j} = \frac{\hat{\kappa}_2}{\hat{\kappa}_1}.$$

Troisième terme : En introduisant la constante $\tau_{\circlearrowleft}$, nous voulons que

$$\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{jl}(v_k - V)(v_l - V)G_2 \approx \tau_{\circlearrowleft} \mathcal{C}_{vv} G_2,$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j A_{jk} A_{jl} \approx \tau_{\circlearrowleft} a_l A_{lk}. \tag{B.10}$$

La minimisation de la MSE implique l'équation

$$\tau_{\circlearrowleft} = \frac{\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j a_l A_{jk} A_{jl} A_{lk}}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j} = \frac{\sum_{j,l=1}^{N} a_j a_l A_{jl} (A^2)_{jl}}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j},$$

où $A_{jk}^2 = A_{jk}$ pour tout j, k.

3. $\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{kl} (v_j - V) G(v_k, v_l)$

Le développement de G en série de Taylor jusqu'au premier ordre conduit à l'approximation

$$\begin{aligned}\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{kl} (v_j - V) G(v_k, v_l) \approx & \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k (v_j - V) G(V, V) \\ & + \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k (v_j - V)(v_k - V) G_1(V, V) \\ & + \sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{kl} (v_j - V)(v_l - V) G_2(V, V).\end{aligned}$$

Premier terme : Avec $\kappa_1^2 = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k$, nous avons que

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k (v_j - V) G = \sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k v_j G - \kappa_1^2 V G \approx (\epsilon - \kappa_1^2) V G,$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k \approx \epsilon a_j, \tag{B.11}$$

ce qui implique que

$$\epsilon = \frac{\sum_{j,k=1}^{N} a_j^2 A_{jk} k_k}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2} = \hat{\kappa}_1^2. \tag{B.12}$$

Deuxième terme : Des approximations

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j A_{jk} k_k (v_j - V)(v_k - V) G_1 \approx \eta \mathcal{C}_{vv} G_1,$$

$$a_j A_{jk} k_k \approx \eta a_j A_{jk}, \tag{B.13}$$

il s'ensuit que

$$\eta = \frac{\sum_{j,k=1}^{N} a_j^2 A_{jk} k_k}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j} = \hat{\kappa}_1, \tag{B.14}$$

où nous avons utilisé $A_{jk}^2 = A_{jk}$ et l'équation aux valeurs propres $\sum_{j=1}^{N} a_j^2 A_{jk} = \lambda a_k^2$. En sommant cette équation aux valeurs propres par rapport à l'index k nous constatons que $\lambda = \hat{\kappa}_1$. Substituer ce résultat dans la première égalité de l'équation (B.14) donne $\eta = \hat{\kappa}_1$.

Troisième terme : Ce terme s'écrit approximativement comme

$$\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j A_{jk} A_{kl} (v_j - V)(v_l - V) G_2 \approx \tau_{\circlearrowleft} \mathcal{C}_{vv} G_2,$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_j A_{jk} A_{kl} \approx \tau_{\circlearrowleft} a_j A_{jl}. \tag{B.15}$$

Par minimisation de la MSE,

$$\tau_{\circlearrowleft} = \frac{\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j^2 A_{jk} A_{kl} A_{lj}}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j}. \tag{B.16}$$

Le regroupement des termes précédents permet d'écrire

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{C}}_{vv} &= (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) V (F - \dot{V}) + (\mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}) F_1 + 2\mathcal{C}_{vv} F_2 \\ &\quad + (\hat{\kappa}_2 - \kappa_2 + \hat{\kappa}_1^2 - \kappa_1^2) V G + (\hat{\kappa}_2/\hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1)\, \mathcal{C}_{vv} G_1 + (\tau_{\circlearrowleft} + \tau_{\circlearrowleft}) \mathcal{C}_{vv} G_2.\end{aligned}$$

En appliquant une démarche similaire pour les observables croisées $\mathcal{C}_{xv}$ et $\mathcal{C}_{xv}$, nous concluons que les équations différentielles du système réduit sont

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= V, \\
\dot{V} &= F + \frac{\mathcal{X}}{2} F_{11} + \frac{\mathcal{V}}{2} F_{22} + \mathcal{C} F_{12} + \kappa_1 G + (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) V G_1 + \frac{\hat{\kappa}_1}{2} \mathcal{V} G_{11} + \frac{\kappa_1}{2} \mathcal{V} G_{22} + \mathcal{C}_{vv} G_{12}, \\
\dot{\mathcal{X}} &= 2\mathcal{C}, \\
\dot{\mathcal{V}} &= 2\mathcal{C} F_1 + 2\mathcal{V} F_2 + 2\hat{\kappa}_1 \mathcal{V} G_1 + 2\mathcal{C}_{vv} G_2, \\
\dot{\mathcal{C}} &= \mathcal{V} + \mathcal{X} F_1 + \mathcal{C} F_2 + \hat{\kappa}_1 \mathcal{C} G_1 + \mathcal{C}_{vv} G_2, \\
\dot{\mathcal{C}}_{xx} &= \mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}, \\
\dot{\mathcal{C}}_{vv} &= (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) V (F - \dot{V}) + (\mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}) F_1 + 2\mathcal{C}_{vv} F_2 \\
&\quad + (\hat{\kappa}_2 - \kappa_2 + \hat{\kappa}_1^2 - \kappa_1^2) V G + (\hat{\kappa}_2/\hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1)\, \mathcal{C}_{vv} G_1 + (\tau_{\circlearrowleft} + \tau_{\circlearrowleft}) \mathcal{C}_{vv} G_2, \\
\dot{\mathcal{C}}_{xv} &= (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) X (F - \dot{V}) + \mathcal{C}_{xx} F_1 + \mathcal{C}_{xv} F_2 + (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1) X G + \hat{\kappa}_1 \mathcal{C}_{xv} G_1 + \tau_{\circlearrowleft} \mathcal{C}_{xv} G_2, \\
\dot{\mathcal{C}}_{vx} &= \mathcal{C}_{vv} + \mathcal{C}_{xx} F_1 + \mathcal{C}_{vx} F_2 + (\hat{\kappa}_2 - \kappa_2) X G + \frac{\hat{\kappa}_2}{\hat{\kappa}_1} \mathcal{C}_{vx} G_1 + \tau_{\circlearrowleft} \mathcal{C}_{vx} G_2,
\end{aligned}$$

avec les quantités

$$\kappa_\iota = \sum_{j=1}^{N} a_j k_j^\iota, \qquad \tau_{\circlearrowleft} = \frac{\sum_{j,l=1}^{N} a_j a_l A_{jl} (A^2)_{jl}}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j}, \qquad \tau_{\circlearrowleft} = \frac{\sum_{j,k,l=1}^{N} a_j^2 A_{jk} A_{kl} A_{lj}}{\sum_{j=1}^{N} a_j^2 k_j},$$

où $\iota \in \{1, 2\}$. Il suffit de remplacer a_j par $\hat{a}_j = a_j^2 / \sum_{j=1}^{N} a_j^2$ pour obtenir les constantes $\hat{\kappa}_\iota$.

Ainsi, la dynamique complète (B.1-B.2) à $2N$ dimensions se réduit à un système d'équations différentielles à 9 dimensions.

Exemple 30. Considérons les équations de van der Pol (1.43) avec un couplage réactif nul,

$$\dot{x}_j = v_j \quad \text{et} \quad \dot{v}_j = -\omega^2 x_j + (b - c x_j^2) v_j + \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N} \sum_{j=1}^{N} A_{jk}(v_k - v_j),$$

où nous avons introduit les constantes réelles b et c afin de pouvoir faire varier la grandeur des termes v_j et $x_j^2 v_j$ séparément. Pour cette dynamique, des expériences numériques avec la réduction à des observables linéaires ne donnaient pas de résultats satisfaisants. Nous avons donc appliqué la réduction à des observables non linéaires, ce qui implique le système suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= V, \\
\dot{V} &= -\omega^2 X + (b - cX^2)V - c\mathcal{X}V - 2c\mathcal{C}X - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)V, \\
\dot{\mathcal{X}} &= 2\mathcal{C}, \\
\dot{\mathcal{V}} &= -2\mathcal{C}(\omega^2 + 2cXV) + 2\mathcal{V}(b - cX^2) - \frac{2\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 \mathcal{V} - \mathcal{C}_{vv}), \\
\dot{\mathcal{C}} &= \mathcal{V} - \mathcal{X}(\omega^2 + 2cXV) + \mathcal{C}(b - cX^2) - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 \mathcal{C} - \mathcal{C}_{vv}), \\
\dot{\mathcal{C}}_{xx} &= \mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}, \\
\dot{\mathcal{C}}_{vv} &= (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)V \left(-c\,\mathcal{X}V - 2\,c\mathcal{C}X - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)V\right) - (\mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx})(\omega^2 + 2cXV) \\
&\quad + 2\mathcal{C}_{vv}(b - cX^2) - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}\left(\hat{\kappa}_2/\hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1 - (\tau_{\circlearrowleft} + \tau_{\circlearrowright})\right)\mathcal{C}_{vv}, \\
\dot{\mathcal{C}}_{xv} &= (\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)X \left(-c\mathcal{X}V - 2\,c\mathcal{C}X - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)V\right) - \mathcal{C}_{xx}(\omega^2 + 2cXV) \\
&\quad + \mathcal{C}_{xv}(b - cX^2) - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \tau_{\circlearrowleft})\mathcal{C}_{xv}, \\
\dot{\mathcal{C}}_{vx} &= \mathcal{C}_{vv} - \mathcal{C}_{xx}(\omega^2 + 2cXV) + \mathcal{C}_{vx}(b - cX^2) - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}\left(\frac{\hat{\kappa}_2}{\hat{\kappa}_1} - \tau_{\circlearrowleft}\right)\mathcal{C}_{vx}.
\end{aligned}$$

Pour une réduction de la dynamique de van der Pol à des observables *linéaires*, les termes non linéaires $-c\mathcal{X}V$ et $-2c\mathcal{C}X$ sont absents de l'équation pour V et les équations de $\mathcal{X}$ à $\mathcal{C}_{vx}$ ne sont pas considérées. Pour l'oscillateur harmonique, $b = c = 0$, le système se réduit à

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= V, \\
\dot{V} &= -\omega^2 X - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)V, \\
\dot{\mathcal{X}} &= 2\mathcal{C}, \\
\dot{\mathcal{V}} &= -2\omega^2 \mathcal{C} - \frac{2\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 \mathcal{V} - \mathcal{C}_{vv}), \\
\dot{\mathcal{C}} &= \mathcal{V} - \omega^2 \mathcal{X} - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 \mathcal{C} - \mathcal{C}_{vv}), \\
\dot{\mathcal{C}}_{xx} &= \mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}, \\
\dot{\mathcal{C}}_{vv} &= -\omega^2(\mathcal{C}_{xv} + \mathcal{C}_{vx}) - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}\left(\hat{\kappa}_2/\hat{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1 - (\tau_{\circlearrowleft} + \tau_{\circlearrowright})\right)\mathcal{C}_{vv} - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)^2 V^2, \\
\dot{\mathcal{C}}_{xv} &= -\omega^2 \mathcal{C}_{xx} - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \tau_{\circlearrowleft})\mathcal{C}_{xv} - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}(\hat{\kappa}_1 - \kappa_1)^2 XV, \\
\dot{\mathcal{C}}_{vx} &= \mathcal{C}_{vv} - \omega^2 \mathcal{C}_{xx} - \frac{\sigma_{\mathrm{D}}}{N}\left(\frac{\hat{\kappa}_2}{\hat{\kappa}_1} - \tau_{\circlearrowleft}\right)\mathcal{C}_{vx}.
\end{aligned}$$

L'analyse de la matrice jacobienne de ces dernières équations révèle que la dynamique réduite de l'oscillateur harmonique possède un centre tout comme la dynamique complète. Notons aussi l'indépendance des équations pour X et V par rapport aux observables non linéaires.

Étant donné la relativement grande quantité d'équations réduites et de termes en jeu dans la réduction à des observables non linéaires, il est intéressant d'identifier les relations entre les observables, c'est-à-dire les dépendances entre les équations différentielles. Afin de représenter ces relations, nous définissons des graphes dirigés tels qu'une arête d'une observable x vers une observable y signifie que l'équation différentielle pour y dépend de x. Nous appelons ces graphes, des *graphes d'observables*. Pour les équations de van der Pol dans l'exemple précédent, le graphe d'observables est le suivant :

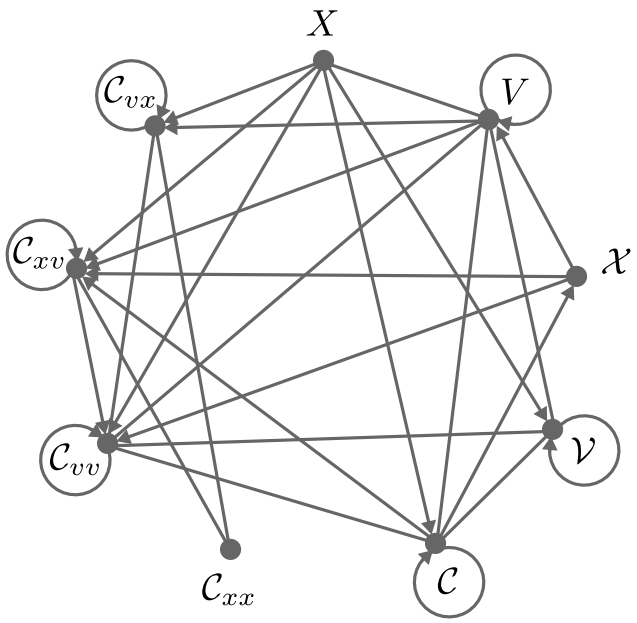


FIGURE B.1 – Graphe d'observables pour la dynamique de van der Pol. Les traits sans flèche sont des arêtes non dirigées (x dépend de y et vice-versa).

Ce type de graphe est utile pour mieux visualiser les dépendances, mais aussi pour identifier des erreurs potentielles dans la méthode de réduction. Effectivement, l'intuition que nous avons des relations entre les observables peut nous guider vers les failles de notre modèle réduit, ce qui apparaît plus clairement dans un graphe d'observables. De plus, les propriétés du graphe (la distribution de degrés, par exemple) permettent de discerner les quantités centrales dans la dynamique réduite [4]. Finalement, le graphe est aussi utile pour retracer des erreurs dans les expériences numériques.

4. Nous aurions pu mettre des poids au graphe d'observables, ce qui changerait la centralité de certains observables. Il pourrait y avoir une très petite quantité ϵ qui relie deux observables.

B.2 Observables avec poids dynamiques

Un des problèmes majeurs de DART est que la matrice de paramètre dynamique W et les matrices reliées à la structure, soit la matrice de degrés K et la matrice d'adjacence A, ne partagent généralement pas la même base de vecteurs propres. Cela exige alors de faire des compromis sur la satisfaction des équations de compatibilité telles que définies au chapitre 3.

Afin d'approcher ce problème, concentrons-nous sur la réduction de la dynamique complexe à N dimensions du modèle de Kuramoto,

$$\dot{z}_j = i\omega_j z_j + \frac{\sigma}{2N}\sum_{k=1}^{N} A_{jk}\left[z_k - z_j^2\bar{z}_k\right]. \tag{B.17}$$

Tout d'abord, introduisons l'observable complexe

$$Z = \sum_{j=1}^{N} a_j z_j, \tag{B.18}$$

où $\boldsymbol{a}$ est le vecteur propre dominant de la matrice d'adjacence[5]. Ce choix de vecteur $\boldsymbol{a}$ implique toutefois qu'aucune information sur les fréquences naturelles n'est contenue dans l'observable Z. Dans le formalisme du chapitre 3, cela signifie que $\boldsymbol{a}$ n'est pas un vecteur propre de W et que l'équation de compatibilité pour W n'est pas satisfaite.

Il est intéressant de se demander l'effet d'ajouter des observables dont les poids dépendent des paramètres dynamiques du système. À cette fin, nous nous sommes inspirés et nous avons généralisé l'approche de la Réf. [56]. L'idée est d'introduire les observables

$$Y_\ell = \sum_{j=1}^{N} a_j \omega_j^\ell \epsilon_j,$$

où $\epsilon_j = z_j - Z$ et $\ell \in \{1, ..., L\}$, $1 \leq L < \infty$. Nous avons ainsi introduit $L+1$ observables. Pour réduire la dimension du système complet (B.17), il est nécessaire que $L+1 < N$. La particularité de cette approche est la définition des L observables Y_ℓ, représentant des moyennes pondérées par rapport à la structure ($\boldsymbol{a}$) et la dynamique ($\boldsymbol{\omega}^\ell$). C'est en suivant l'évolution temporelle de cette quantité que nous espérons pouvoir prédire celle de la dynamique complète avec des fréquences plus hétérogènes (ou plutôt, moins corrélées avec la structure).

En suivant une approche similaire à la dernière section[6] et au chapitre 3, nous obtenons aisément la dynamique réduite pour Z. Il est toutefois plus ardu de fermer les équations pour Y_ℓ. Dans ce cas, nous effectuons une approximation qui est plus subtile, soit

$$\sum_{j,k=1}^{N} a_j \omega_j^\ell A_{jk} z_k = \boldsymbol{a} W^\ell A \boldsymbol{z} \approx \tau_\ell Z + \eta_\ell Y_\ell, \tag{B.19}$$

5. Nous définissons le vecteur ainsi considérant les arguments de la dernière section, de la référence [142] et du chapitre 3.

6. Rappelons que c'est la fonction complexe $H(z_j, \bar{z}_j, z_k, \bar{z}_k) = \sigma[z_k - z_j^2\bar{z}_k]/N$ qui est holomorphe et qui peut être développée en série de Taylor [et non $H(z_j, z_k)$].

où $W = \mathrm{diag}(\omega_1, ..., \omega_N)$. La raison qui justifie ce choix est qu'il n'est pas évident *a priori* de savoir si ce terme est relié à l'observable Z ou Y_ℓ. Nous avons donc recours à une combinaison linéaire des deux observables [7]. La solution qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre le côté gauche et le côté droit de l'équation (B.19) est

$$(\tau_\ell \quad \eta_\ell)_{1\times 2} = \boldsymbol{a} W^\ell A Q^+ \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} W^\ell \end{pmatrix}_{2\times N},$$

où $+$ est la pseudo-inversion de Moore-Penrose et nous avons indiqué la dimension des matrices pour éviter toute confusion.

La suite de la procédure est similaire à ce qui a été expliqué précédemment et mène aux équations réduites

$$\dot{Z} = i\langle\omega\rangle Z + iY_1 + \frac{\sigma}{2N}[\kappa Z - (2\hat{\kappa} - \kappa)\bar{Z}Z^2], \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}_\ell = {} & i\left(\langle\omega^{\ell+1}\rangle - \langle\omega\rangle\langle\omega^\ell\rangle\right) Z + i\left(Y_{\ell+1} - \langle\omega^\ell\rangle Y_1\right) \\ & + \frac{\sigma}{2N}\left[\left(\tau_\ell - \kappa\langle\omega^\ell\rangle\right)(Z - \bar{Z}Z^2) + \eta_\ell(1 - Z^2)Y_\ell\right] - 2\kappa'_\ell \bar{Z}ZY_\ell,\end{aligned} \tag{B.21}$$

où nous avons défini les moyennes pondérées

$$\langle\omega^\ell\rangle = \sum_{j=1}^N a_j\omega_j^\ell, \qquad \kappa = \sum_{j=1}^N a_j k_j, \qquad \hat{\kappa} = \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{\sum_{j=1}^N a_j^2} k_j, \qquad \kappa'_\ell = \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2\omega_j^{2\ell}}{\sum_{j=1}^N a_j^2\omega_j^{2\ell}} k_j.$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation différentielle pour Z dépend de Y_1 et non des observables Y_ℓ pour $\ell > 1$. Nous remarquons toutefois que l'équation pour Y_ℓ n'est pas fermée, car l'équation pour Y_L dépend de Y_{L+1}. En considérant que $\omega_j^{L+1}\epsilon_j \ll 1$ pour tout j, $Y_{L+1} \ll 1$ peut être négligé, ce qui ferme le système d'équations. Pour $L = 1$ et en retirant les indices, nous déduisons le système

$$\dot{Z} = i\langle\omega\rangle Z + iY + \frac{\sigma}{2N}[\kappa Z - (2\hat{\kappa} - \kappa)\bar{Z}Z^2], \tag{B.22}$$

$$\dot{Y} = i\sigma_\omega^2 Z - i\langle\omega\rangle Y + \frac{\sigma}{2N}\left[(\tau - \kappa\langle\omega\rangle)(Z - \bar{Z}Z^2) + \eta(1 - Z^2)Y\right] - 2\kappa'\bar{Z}ZY, \tag{B.23}$$

où $\sigma_\omega^2 = \langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2$. Contrairement à la méthode de réduction sans l'observable Y_ℓ, la variance de la distribution des fréquences σ_ω^2 apparaît dans les équations, ce qui laisse présager de meilleurs résultats lorsque la distribution des fréquences est dispersée.

7. En rétrospective, nous remarquons que si $\boldsymbol{a}$ est un vecteur propre de $W^\ell A$, alors seulement Z intervient. Cependant, si $\boldsymbol{a}W^\ell$ est un vecteur propre de A, alors seulement Y_ℓ intervient.

Bibliographie

[1] Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H. et Wiley D. A., *Solvable model for chimera states of coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett., 101 (2008), p. 084103.

[2] Abrams D. M. et Strogatz S. H., *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett., 93 (2004), p. 174102.

[3] Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez-Vicente C. J., Ritort F. et Spigler R., *The Kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena*, Rev. Mod. Phys., 77 (2005), p. 137.

[4] Aggarwal C. C. et Reddy C. K., *Data Clustering : Algorithms and Applications*, CRC Press, 2014.

[5] Alpert C. J. et Yao S.-Z., *Spectral partitioning : the more eigenvectors, the better*, dans Proc. 32nd Annu. ACM/IEEE Des. Autom. Conf., 1995, p. 195.

[6] Anderson P. W., *More is different*, Science, 177 (1972), p. 393.

[7] ——, *More and Different : Notes from a Thoughtful Curmudgeon*, World Scientific Publishing, 2011.

[8] Andrzejak R. G., Rummel C., Mormann F. et Schindler K., *All together now : Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures*, Sci. Rep., 6 (2016), p. 23000.

[9] Antoulas A. C., *Approximation of Large-Scale Dynamical System*, SIAM, 2005.

[10] Aranson I. S. et Kramer L., *The world of the complex Ginzburg-Landau equation*, Rev. Mod. Phys., 74 (2002), p. 99.

[11] Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y. et Zhou C., *Synchronization in complex networks*, Phys. Rep., 469 (2008), p. 93.

[12] Ariaratnam J. T. et Strogatz S. H., *Phase diagram for the Winfree model of coupled nonlinear oscillators*, Phys. Rev. Lett., 86 (2001), p. 4278.

[13] Ashwin P. et Burylko O., *Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators*, Chaos, 25 (2015), p. 013106.

[14] Badhine M., *Simulation et inférence de réseaux de neurones à l'aide d'intelligence artificielle*, mémoire de maîtrise, Université Laval, 2020.

[15] Balanov A., Janson N., Postnov D. et Sosnovtseva O., *Synchronization : From Simple to Complex*, Springer, 2009.

[16] Bansal K., Garcia J. O., Tompson S. H., Verstynen T., Vettel J. M. et Muldoon S. F., *Cognitive chimera states in human brain networks*, Sci. Adv., 5 (2019), p. 8535.

[17] Barlev G., Antonsen T. M. et Ott E., *The dynamics of network coupled phase oscillators : An ensemble approach*, Chaos, 21 (2011), p. 025103.

[18] Barnes E. R., *An algorithm for partitioning the nodes of a graph*, SIAM J. Alg. Disc. Meth., 3 (1982), p. 541.

[19] Barnes E. R. et Hoffman A. J., *Partitioning, spectra and linear programming*, dans Prog. Comb. Optim., Pulleyblank W. R., éd., vol. 45, Academic Press, 1984, p. 13.

[20] Barré J. et Métivier D., *Bifurcations and singularities for coupled oscillators with inertia and frustration*, Phys. Rev. Lett., 117 (2016), p. 214102.

[21] Bascompte J., *Web of life*. http://www.web-of-life.es/. Accessed : 2020-03-26.

[22] Bassett D. S. et Sporns O., *Network neuroscience*, Nat. Neurosci., 20 (2017), p. 353.

[23] Battiston F., Cencetti G., Latora V., Lucas M., Patania A., Young J.-G. et Petri G., *Networks beyond pairwise interactions : structure and dynamics*, arXiv preprint arXiv :2006.01764v1, (2020).

[24] Battogtokh D. et Mikhailov A., *Controlling turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation*, Physica D, 90 (1996), p. 84.

[25] Bera B. K., Majhi S., Ghosh D. et Perc M., *Chimera states : Effects of different coupling topologies*, EPL, 118 (2017), p. 10001.

[26] Betzel R. F., Medaglia J. D. et Bassett D. S., *Diversity of meso-scale architecture in human and non-human connectomes*, Nat. Commun., 9 (2018), p. 346.

[27] Bick C., Goodfellow M., Laing C. R. et Martens E. A., *Understanding the dynamics of biological and neural oscillator networks through exact mean-field reductions : a review*, J. Math. Neurosc., 10 (2020), p. 1.

[28] Blasius B. et To R., *Quasiregular Concentric Waves in Heterogeneous Lattices of Coupled Oscillators*, Phys. Rev. Lett., 95 (2005), p. 084101.

[29] Boccaletti S., Almendral J. A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z. et Zou Y., *Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics : Percolation and synchronization*, Phys. Rep., 660 (2016), p. 1.

[30] Boccaletti S., Pecora L. M. et Pelaez A., *Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems*, Phys. Rev. E, 63 (2001), p. 066219.

[31] Boccaletti S., Pisarchik A. N., Del Genio C. I. et Amann A., *Synchronization : From Coupled Systems to Complex Networks*, Cambridge University Press, 2018.

[32] Bock D. D., Lee W.-c. A., Kerlin A. M., Andermann M. L., Hood G., Wetzel A. W., Yurgenson S., Soucy E. R., Kim H. S. et Reid R. C., *Network anatomy and in vivo physiology of visual cortical neurons*, Nature, 471 (2011), p. 177.

[33] Bollobas B., *Random Graphs*, Cambridge University Press, 2001.

[34] Braun W., Pikovsky A., Matias M. A. et Colet P., *Global dynamics of oscillator populations under common noise*, EPL, 99 (2012), p. 20006.

[35] Bronski J. C., Carty T. E. et Simpson S. E., *A Matrix-Valued Kuramoto Model*, J. Stat. Phys., 178 (2020), p. 595.

[36] Brunton S. L. et Kutz J. N., *Data-Driven Science and Engineering : Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*, Cambridge University Press, 2019.

[37] Budišić M., Mohr R. et Mezić I., *Applied koopmanism*, Chaos, 22 (2012), p. 047510.

[38] Butcher J., *Runge-Kutta methods*, Scholarpedia, 2 (2007), p. 3147.

[39] Calim A., Hövel P., Ozer M. et Uzuntarla M., *Chimera states in networks of type-i Morris-Lecar neurons*, Phys. Rev. E, 98 (2018), p. 062217.

[40] Castellano C. et Pastor-Satorras R., *Topological determinants of complex networks spectral properties : structural and dynamical effects*, Phys. Rev. X, 7 (2017), p. 041024.

[41] Chandra S., Girvan M. et Ott E., *Complexity reduction ansatz for systems of interacting orientable agents : Beyond the Kuramoto model*, Chaos, 29 (2019), p. 053107.

[42] ——, *Continuous versus Discontinuous Transitions in the D -Dimensional Generalized Kuramoto Model : Odd D is Different*, Phys. Rev. X, 9 (2019), p. 011002.

[43] Charbonneau P., *Natural Complexity : A Modeling Handbook*, Princeton University Press, 2017.

[44] Chen B., Engelbrecht J. R. et Mirollo R., *Dynamics of the Kuramoto-Sakaguchi oscillator network with asymmetric order parameter*, Chaos, 29 (2019), p. 013126.

[45] Chen H., Sun Y., Gao J., Xu C. et Zheng Z., *Order parameter analysis of synchronization transitions on star networks*, Front. Phys., 12 (2017), p. 120504.

[46] Cho Y. S., Nishikawa T. et Motter A. E., *Stable chimeras and independently synchronizable clusters*, Phys. Rev. Lett., 119 (2017), p. 084101.

[47] Christensen K. et Moloney N. R., *Complexity and Criticality*, Imperial College Press, 2005.

[48] Clauset A., *Icon*. https://icon.colorado.edu/. Accessed : 2020-03-26.

[49] Clusella P. et Politi A., *Between phase and amplitude oscillators*, Phys. Rev. E, 99 (2019), p. 062201.

[50] Condon A. et Karp R. M., *Algorithms for graph partitioning on the planted partition model*, Random Struct. Alg., 18 (2001), p. 116.

[51] Coolen T., Annibale A. et Roberts E., *Generating Random Networks and Graphs*, Oxford University Press, 2017.

[52] Couzin I. D., *Synchronization : The key to effective communication in animal collectives*, Trends Cogn. Sci., 22 (2018), p. 844.

[53] Crane H., *Probabilistic Foundations of Statistical Network Analysis*, CRC Press, 2018.

[54] Daido H., *Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions : Bifurcation of the order function*, Physica D, 91 (1996), p. 24.

[55] Dayan P. et Abbott L. F., *Theoretical Neuroscience : Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems*, MIT Press, 2000.

[56] De Monte S. et D'Ovidio F., *Dynamics of order parameters for globally coupled oscillators*, EPL, 58 (2002), p. 21.

[57] Deacy W. W., Armstrong J. B., Leacock W. B., Robbins C. T. et Gustine D. D., *Phenological synchronization disrupts trophic interactions between Kodiak brown bears and salmon*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 114 (2017), p. 10432.

[58] Descartes R., *Discours de la Méthode*, Collection Résurgences, 1995 [1637].

[59] Destexhe A. et Sejnowski T. J., *The Wilson-Cowan model, 36 years later*, Biol. Cybern., 101 (2009), p. 1.

[60] Di Santo S., Villegas P., Burioni R. et Muñoz M. A., *Landau-Ginzburg theory of cortex dynamics : Scale-free avalanches emerge at the edge of synchronization*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 115 (2018), p. 1356.

[61] Di Ventra M., Evoy S. et Heflin Jr. J. R., *Introduction to Nanoscale Science and Technology*, Springer, 2004.

[62] Ding C., Li T. et Jordan M. I., *Convex and semi-nonnegative matrix factorizations*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 32 (2010), p. 45.

[63] Ding C., Li T., Peng W. et Park H., *Orthogonal nonnegative matrix tri-factorizations for clustering*, dans Proc. 12th ACM SIGKDD Int. Conf. Knowl. Discov. data Min. , 2006, p. 126.

[64] Dirac P. A. M., *Quantum Mechanics of Many-Electron Systems*, Proc. R. Soc. Lond. A, 123 (1929), p. 714.

[65] Dong J.-G. et Xue X., *Synchronization analysis of Kuramoto oscillators*, Comm. Math. Sci., 11 (2013), p. 465.

[66] Dörfler F. et Bullo F., *Synchronization in complex networks of phase oscillators : A survey*, Automatica, 50 (2014), p. 1539.

[67] Dormand J. R. et Prince P. J., *A reconsideration of some embedded Runge-Kutta formulae*, J. Comput. Appl. Math., 6 (1980), p. 19.

[68] Dorogovtsev S. N., Goltsev A. V., Mendes J. F. F. et Samukhin A. N., *Spectra of complex networks*, Phys. Rev. E, 68 (2003), p. 046109.

[69] *Antidote 10*. Druide informatique inc., Montréal(Qc), Canada, 2019.

[70] D'Souza R. M., Gómez-Gardeñes J., Nagler J. et Arenas A., *Explosive phenomena in complex networks*, Adv. Phys., 68 (2019), p. 123.

[71] Engelbrecht J. R. et Mirollo R., *Is the Ott-Antonsen manifold attracting ?*, Phys. Rev. Res., 2 (2020), p. 023057.

[72] Ermann L., Frahm K. M. et Shepelyansky D. L., *Spectral properties of Google matrix of Wikipedia and other networks*, Eur. Phys. J. B., 86 (2013), p. 193.

[73] Ermentrout G. B. et Kopell N., *Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation*, SIAM J. Appl. Math., 46 (1986), p. 233.

[74] Ermentrout G. B. et Terman D. H., *Mathematical Foundations of Neuroscience*, Springer, 2010.

[75] Evans T. S. et Lambiotte R., *Line graphs, link partitions, and overlapping communities*, Phys. Rev. E, 80 (2009), p. 016105.

[76] Fell J. et Axmacher N., *The role of phase synchronization in memory processes*, Nat. Rev. Neurosci., 12 (2011), p. 105.

[77] Fiedler M., *Algebraic connectivity of graphs*, Czechoslov. Math. J., 23 (1973).

[78] ——, *A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory*, Czechoslov. Math. J., 25 (1975), p. 619.

[79] Fodor J. A., *Special sciences (or : The disunity of science as a working hypothesis)*, Synthese, 28 (1974), p. 97.

[80] Forrester P. J., *Log-Gases and Random Matrices*, Princeton University Press, 2010.

[81] Fortunato S., *Community detection in graphs*, Physics Reports, 486 (2010), p. 75.

[82] Fortunato S. et Hric D., *Community detection in networks : A user guide*, Phys. Rep., 659 (2016), p. 1.

[83] Gallego R., Montbrió E. et Pazó D., *Synchronization scenarios in the Winfree model of coupled oscillators*, Phys. Rev. E, 96 (2017), p. 042208.

[84] Gao J., Barzel B. et Barabási A.-L., *Universal resilience patterns in complex networks*, Nature, 530 (2016), p. 307.

[85] Gao J., Xu C., Sun Y. et Zheng Z., *Order parameter analysis for low-dimensional behaviors of coupled phase-oscillators*, Sci. Rep., 6 (2016), p. 30184.

[86] Gell-Mann M., *The Quark and the Jaguar : Adventures in the Simple and the Complex*, Independent Publ., 2002.

[87] Gengel E. et Pikovsky A., *Phase reconstruction with iterated Hilbert transforms*, arXiv preprint arXiv :2004.13461, (2020).

[88] Georgeot B., Giraud O. et Shepelyansky D. L., *Spectral properties of the Google matrix of the World Wide Web and other directed networks*, Phys. Rev. E, 81 (2010), p. 056109.

[89] Gfeller D. et De Los Rios P., *Spectral coarse graining of complex networks*, Phys. Rev. Lett., 99 (2007), p. 038701.

[90] ——, *Spectral coarse graining and synchronization in oscillator networks*, Phys. Rev. Lett., 100 (2008), p. 174104.

[91] Goldobin D. S., *Relationships between the Distribution of Watanabe-Strogatz Variables and Circular Cumulants for Ensembles of Phase Elements*, Fluct. Noise Lett., 18 (2019), p. 1.

[92] Goldobin D. S. et Dolmatova A. V., *Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series*, Phys. Rev. Res., 1 (2019), p. 033139.

[93] Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S. et Pikovsky A., *Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators*, Chaos, 28 (2018), p. 101101.

[94] Gómez-Gardeñes J., Gomez S., Arenas A. et Moreno Y., *Explosive synchronization transitions in scale-free networks*, Phys. Rev. Lett., 106 (2011), p. 128701.

[95] Gong C. C. et Pikovsky A., *Low-Dimensional Dynamics for Higher Order Harmonic Globally Coupled Phase Oscillator Ensemble*, arXiv, (2019).

[96] Gottwald G. A., *Model reduction for networks of coupled oscillators*, Chaos, 25 (2015), p. 053111.

[97] ——, *Finite-size effects in a stochastic Kuramoto model*, Chaos, 27 (2017), p. 101103.

[98] Guckenheimer J. et Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.

[99] Gupta S., Campa A. et Ruffo S., *Statistical Physics of Synchronization*, Springer, 2018.

[100] Hagerstrom A. M., Murphy T. E., Roy R., Hövel P., Omelchenko I. et Schöll E., *Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices*, Nat. Phys., 8 (2012), p. 658.

[101] Hairer E., Wanner G. et Norset S. P., *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*, Springer, 1993.

[102] Hall K. M., *An r-dimensional quadratic placement algorithm*, Manag. Sci., 17 (1970), p. 219.

[103] Hancock E. J. et Gottwald G. A., *Model reduction for Kuramoto models with complex topologies*, Phys. Rev. E, 98 (2018), p. 012307.

[104] Hansel D., Mato G. et Meunier C., *Phase Dynamics for Weakly Coupled Hodgkin-Huxley Neurons*, Europhys. Lett., 23 (1993), p. 367.

[105] Havlin S. et Boccaletti S., *Synchronization Interfaces and Overlapping Communities in Complex Networks*, Phys. Rev. Lett., 168701 (2008), p. 168701.

[106] Hines M. L., Migliore M. et Shepherd G. M., *ModelDB : A Database to Support Computational Neuroscience*, J. Comput. Neurosci., 17 (2004), p. 7.

[107] Hirsch M. W., *Convergent activation dynamics in continuous time networks*, Neural Netw., 2 (1989), p. 331.

[108] Hizanidis J., Kouvaris N. E., Zamora-López G., Díaz-Guilera A. et Antonopoulos C. G., *Chimera-like states in modular neural networks*, Sci. Rep., 6 (2016), p. 19845.

[109] Hodgkin A. L. et Huxley A. F., *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, Bulletin of Mathematical Biology, 117 (1952), p. 500.

[110] Holland J., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press, 1992.

[111] Holland P. W., Laskey K. B. et Leinhardt S., *Stochastic blockmodels : First steps*, Soc. Netw., 5 (1983), p. 109.

[112] Honderich T., éd., *The Oxford Companion to Philosophy*, Oxford University Press, 2005.

[113] Horn R. A. et Johnson C. R., *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2013.

[114] Huang L., Chen Q., Lai Y.-c. et Pecora L. M., *Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems 1*, Phys. Rev. E, 80 (2009), p. 036204.

[115] Huang X., Gao J., Sun Y., Zheng Z. et Xu C., *Effects of frustration on explosive synchronization*, Front. Phys., 11 (2016), p. 110504.

[116] Izhikevich E. M., *Which model to use for cortical spiking neurons ?*, IEEE Trans. Neural Netw., 15 (2004), p. 1063.

[117] ——, *Dynamical Systems in Neuroscience*, MIT Press, 2007.

[118] Jalili M., Barzegaran E. et Knyazeva M. G., *Synchronization of EEG : Bivariate and Multivariate Measures*, IEEE Trans. Neural Syst. Rehabilitation Eng., 22 (2014), p. 212.

[119] Jaynes E., *Information Theory and Statistical Mechanics. II*, The Phys. Rev., 108 (1957), p. 171.

[120] Jaynes E. T., *Information Theory and Statistical Mechanics*, The Phys. Rev., 106 (1957), p. 620.

[121] Jiang J., Huang Z.-G., Seager T. P., Lin W., Grebogi C., Hastings A. et Lai Y.-C., *Predicting tipping points in mutualistic networks through dimension reduction.*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 115 (2018), p. E639.

[122] Jiruska P., Curtis M.d. , Jefferys J. G. R., Schevon C. A., Schiff S. J. et Schindler K., *Synchronization and desynchronization in epilepsy : Controversies and hypotheses*, J. Physiol., 591 (2013), p. 787.

[123] Johnson R. E., Linderman S., Panier T., Wee C. L., Song E., Herrera K. J., Miller A. et Engert F., *Probabilistic Models of Larval Zebrafish Behavior : Structure on Many Scales*, bioRxiv, (2019), p. 672246.

[124] Kalloniatis A. C., Zuparic M. L. et Prokopenko M., *Fisher information and criticality in the Kuramoto model of nonidentical oscillators*, Phys. Rev. E, 98 (2018), p. 022302.

[125] Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K. et Maistrenko Y., *Imperfect chimera states for coupled pendula*, Sci. Rep., 4 (2014), p. 6379.

[126] Kavalali E. T., *The mechanisms and functions of spontaneous neurotransmitter release*, Nat. Rev. Neurosci., 16 (2015), p. 5.

[127] Kemeth F. P., Haugland S. W., Schmidt L., Kevrekidis I. G. et Krischer K., *A classification scheme for chimera states*, Chaos, 26 (2016), p. 094815.

[128] Kotwal T., Jiang X. et Abrams D. M., *Connecting the Kuramoto model and the chimera state*, Phys. Rev. Lett., 119 (2017), p. 264101.

[129] Kramer B. et Willcox K. E., *Nonlinear model order reduction via lifting transformations and proper orthogonal decomposition*, AIAA J., 57 (2019), p. 2297.

[130] Kuhn T. S., *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, 1962.

[131] Kunst M., Laurell E., Mokayes N., Kramer A., Kubo F., Fernandes A. M., Förster D., Dal Maschio M. et Baier H., *A Cellular-Resolution Atlas of the Larval Zebrafish Brain*, Neuron, 103 (2019), p. 21.

[132] Kuramoto Y., *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators*, dans Int. Symp. Math. Probl. Theor. Phys., 1975, p. 420.

[133] ——, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence.*, Springer, 1983.

[134] Kuramoto Y. et Battogtokh D., *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators.*, Nonlinear Phenom. Complex Syst., 5 (2002), p. 380.

[135] Kutz J. N., Brunton S. L. et Brunton B. W., *Dynamic Mode Decomposition*, SIAM, 2016.

[136] Lachaux J.-P., Rodriguez E., Martinerie J. et Varela F. J., *Measuring Phase Synchrony in Brain Signals*, Hum. Brain Mapp., (1999), p. 194.

[137] Laing C. R., *Chimeras in networks with purely local coupling*, Phys. Rev. E, 92 (2015), p. 050904(R).

[138] ——, *Dynamics and stability of chimera states in two coupled populations of oscillators*, Phys. Rev. E, 100 (2019), p. 042211.

[139] Lancellotti C., *On the Vlasov Limit for Systems of Nonlinearly Coupled Oscillators without Noise*, Transp. Theor. Stat. Phys., 34 (2005), p. 523.

[140] Larremore D. B., Shew W. L. et Restrepo J. G., *Predicting criticality and dynamic range in complex networks : effects of topology*, Phys. Rev. Lett., 106 (2011), p. 058101.

[141] Latora V., Nicosia V. et Russo G., *Complex Networks : Principles, Methods and Applications*, Cambridge University Press, 2017.

[142] Laurence E., Doyon N., Dubé L. J. et Desrosiers P., *Spectral dimension reduction of complex dynamical networks*, Phys. Rev. X, 9 (2019), p. 011042.

[143] Laurent G., *Olfactory network dynamics and the coding of multidimensional signals*, Nat. Rev. Neurosci., 3 (2002), p. 884.

[144] Lei J. et Rinaldo A., *Consistency of spectral clustering in stochastic block models*, Ann. Statist., 43 (2015), p. 215.

[145] León I. et Pazó D., *Phase reduction beyond the first order : The case of the mean-field complex Ginzburg-Landau equation*, Phys. Rev. E, 100 (2019), p. 012211.

[146] Li J. Y., Zhu R., Qu A., Ye H. et Sun Z., *Semi-orthogonal Non-negative Matrix Factorization with an Application in Text Mining*, arXiv preprint arXiv :1805.02306, (2018).

[147] Liénard A., *Étude des oscillations entretenues*, Revue générale de l'électricité, 23 (1928), p. 901.

[148] Lohe M. A., *Non-Abelian Kuramoto models and synchronization*, J. Phys. A, 42 (2009), p. 395101.

[149] ——, *Quantum synchronization over quantum networks*, J. Phys. A, 43 (2010), p. 465301.

[150] ——, *Systems of matrix Riccati equations, linear fractional transformations, partial integrability and synchronization*, J. Math. Phys., 60 (2019), p. 072701.

[151] Lopes M. A., Lopes E. M., Yoon S., Mendes J. F. et Goltsev A. V., *Synchronization in the random-field Kuramoto model on complex networks*, Phys. Rev. E, 94 (2016), p. 012308.

[152] Luke T. B., Barreto E. et So P., *Complete classification of the macroscopic behavior of a heterogeneous network of theta neurons*, Neural Comput., 25 (2013), p. 3207.

[153] Lynn C. W. et Bassett D. S., *The physics of brain network structure, function and control*, Nat. Rev. Phys., 1 (2019), p. 318.

[154] MacArthur B. D. et Sánchez-García R. J., *Spectral characteristics of network redundancy*, Phys. Rev. E, 80 (2009), p. 026117.

[155] MacArthur B. D., Sánchez-García R. J. et Anderson J. W., *Symmetry in complex networks*, Discrete Appl. Math., 156 (2008), p. 3525.

[156] Maistrenko Y., Brezetsky S., Jaros P., Levchenko R. et Kapitaniak T., *Smallest chimera states*, Phys. Rev. E, 95 (2017), p. 010203(R).

[157] Martens E. A., *Chimeras in a network of three oscillator populations with varying network topology*, Chaos, 20 (2010), p. 043122.

[158] Martens E. A., Panaggio M. J. et Abrams D. M., *Basins of attraction for chimera states*, New. J. Phys., 18 (2016), p. 022002.

[159] Martens E. A., Thutupalli S., Fourrière A. et Hallatschek O., *Chimera states in mechanical oscillator networks*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 110 (2013), p. 10563.

[160] Marvel S. A., Mirollo R. E. et Strogatz S. H., *Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action*, Chaos, 19 (2009), p. 043104.

[161] Matheny M. H., Emenheiser J., Fon W., Chapman A., Salova A., Rohden M., Li J., Hudoba De Badyn M., Pósfai M., Duenas-Osorio L., Mesbahi M., Crutchfield J. P., Cross M. C., D'Souza R. M. et Roukes M. L., *Exotic states in a simple network of nanoelectromechanical oscillators*, Science, 363 (2019), p. 1057.

[162] Matheny M. H., Grau M., Villanueva L. G., Karabalin R. B., Cross M. C. et Roukes M. L., *Phase Synchronization of Two Anharmonic Nanomechanical Oscillators*, Phys. Rev. Lett., 112 (2014), p. 014101.

[163] May R. M., *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press, 2001.

[164] Mayr E., *The Growth of Biological Thought : Diversity, Evolution, and Inheritance*, Harvard University Press, 1982.

[165] ——, *The limits of reductionism*, Nature, 331 (1988), p. 475.

[166] Milnor J., *On the Concept of Attractor*, Springer, 1985.

[167] Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., Kashtan N., Chklovskii D. et Alon U., *Network Motifs : Simple Building Blocks of Complex Networks*, Science, 298 (2002), p. 824.

[168] Mirollo R. E., *The asymptotic behavior of the order parameter for the infinite-N Kuramoto model*, Chaos, 22 (2012), p. 043118.

[169] Mitchell M., *Complexity : A Guided Tour*, Oxford University Press, 2009.

[170] Montbrió E., Pazó D. et Roxin A., *Macroscopic description for networks of spiking neurons*, Phys. Rev. X, 5 (2015), p. 021028.

[171] Moon S. J., Ghanem R. et Kevrekidis I. G., *Coarse graining the dynamics of coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett., 96 (2006), p. 144101.

[172] Morone F. et Makse H. A., *Symmetry group factorization reveals the structure-function relation in the neural connectome of Caenorhabditis elegans*, Nat. Commun., 10 (2019), p. 1.

[173] Nadakuditi R. R. et Newman M. E. J., *Graph Spectra and the Detectability of Community Structure in Networks*, Phys. Rev. Lett., 108 (2012), p. 188701.

[174] ——, *Spectra of random graphs with arbitrary expected degrees*, Phys. Rev. E, 87 (2013), p. 012803.

[175] Nagel E., *The Structure of Science : Problems in the Logic of Science Explanation*, Harcourt, Brace & World, Inc., 1961.

[176] Newman M., *Networks*, Oxford University Press, 2018.

[177] Newman M. E. J., *Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices*, Phys. Rev. E, 74 (2006), p. 036104.

[178] ——, *Computational Physics*, Independent Publ., 2013.

[179] ——, *Network structure from rich but noisy data*, Nat. Phys., 14 (2018), p. 1.

[180] ——, *Spectra of networks containing short loops*, Physical Review E, 100 (2019), p. 012314.

[181] Newman M. E. J., Zhang X. et Nadakuditi R. R., *Spectra of random networks with arbitrary degrees*, Physical Review E, 99 (2019), p. 042309.

[182] Ney A., *Reductionism*. https://www.iep.utm.edu/red-ism/. Accessed : 2020-06-06.

[183] Nicolaou Z. G., Eroglu D. et Motter A. E., *Multifaceted Dynamics of Janus Oscillator Networks*, Phys. Rev. X, 9 (2019), p. 11017.

[184] Oh S. W. et al. , *A mesoscale connectome of the mouse brain*, Nature, 508 (2014), p. 207.

[185] Omel'chenko O. E. et Wolfrum M., *Nonuniversal Transitions to Synchrony in the Sakaguchi-Kuramoto Model*, Phys. Rev. Lett., 109 (2012), p. 164101.

[186] Osipov G. V., Kurths J. et Zhou C., *Synchronization in Oscillatory Networks*, Springer, 2007.

[187] Ott E. et Antonsen T. M., *Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators*, Chaos, 18 (2008), p. 037113.

[188] ——, *Long time evolution of phase oscillator systems*, Chaos, 19 (2009), p. 023117.

[189] Pan L., Yang D., Wang W., Cai S., Zhou T. et Lai Y.-C., *Phase diagrams of interacting spreading dynamics in complex networks*, Phys. Rev. Res., 2 (2020), p. 023233.

[190] Panaggio M. J. et Abrams D. M., *Chimera states : coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators*, Nonlinearity, 28 (2015), p. R67.

[191] Panter P. F., *Modulation, Noise and Spectral Analysis : Applied to Information Transmission*, McGraw-Hill, 1965.

[192] Pazó D. et Montbrió E., *Shear Diversity Prevents Collective Synchronization*, Phys. Rev. Lett., 106 (2011), p. 254101.

[193] ——, *Low-Dimensional Dynamics of Populations of Pulse-Coupled Oscillators*, Phys. Rev. X, 4 (2014), p. 011009.

[194] Pecora L. M. et Carroll T. L., *Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems*, Phys. Rev. Lett., 80 (1998), p. 2109.

[195] Peixoto T. P., *Eigenvalue Spectra of Modular Networks*, Phys. Rev. Lett., 111 (2013), p. 098701.

[196] Penrose R., *Generalized inverse matrices*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 51 (1955), p. 406.

[197] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2001.

[198] Peron T., Eroglu D., Rodrigues F. A. et Moreno Y., *Collective dynamics of random Janus oscillator networks*, Phys. Rev. Res., 2 (2020), p. 013255.

[199] Pietras B. et Daffertshofer A., *Network dynamics of coupled oscillators and phase reduction techniques*, Phys. Rep., 819 (2019), p. 1.

[200] Pikovsky A. et Rosenblum M., *Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett., 101 (2008), p. 264103.

[201] Pikovsky A. et Rosenblum M., *Dynamics of globally coupled oscillators : Progress and perspectives*, Chaos, 25 (2015), p. 097616.

[202] Pikovsky A., Rosenblum M. et Kurths J., *Synchronization : a Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge university press, 2003.

[203] Polyanin A. D. et Zaitsev V., *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[204] Popper K., *Unended Quest : An Intellectual Autobiography*, Routledge Classics, 2002.

[205] Potts W. K., *The chorus-line hypothesis of manoeuvre coordination in avian flocks*, Nature, 309 (1984), p. 344.

[206] Powers D. L., *Graph partitioning by eigenvectors*, Linear Algebr. Appl., 101 (1988), p. 121.

[207] Quyen M. L. V., Foucher J., Lachaux J.-p., Rodriguez E., Lutz A., Martinerie J. et Varela F. J., *Comparison Hilbert vs Wavelet analysis neuronal synchrony*, Journal of Neuroscience Methods, 111 (2001), p. 16.

[208] Rajendran K. et Kevrekidis I. G., *Coarse graining the dynamics of heterogeneous oscillators in networks with spectral gaps*, Phys. Rev. E, 84 (2011), p. 036708.

[209] Reid W. T., *Riccati Differential Equations*, Academic Press, 1972.

[210] Restrepo J. G., Ott E. et Hunt B. R., *Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators*, Phys. Rev. E, 71 (2005), p. 036151.

[211] Rodrigues F. A., Peron T., Ji P. et Kurths J., *The Kuramoto model in complex networks*, Phys. Rep., 610 (2016), p. 1.

[212] Rodriguez E., George N., Lachaux J.-P., Martinerie J., Renault B. et Varela F. J., *Perception's shadow : Long-distance synchronization of human brain activity*, Nature, 397 (1999), p. 430.

[213] Rohden M., Sorge A., Timme M. et Witthaut D., *Self-organized synchronization in decentralized power grids*, Phys. Rev. Lett., 109 (2012), p. 064101.

[214] Rossi R. A. et Ahmed N. K., *Network repository*. http://networkrepository.com. Accessed : 2020-03-26.

[215] Ryan K., Lu Z. et Meinertzhagen I. A., *The CNS connectome of a tadpole larva of Ciona intestinalis (L.) highlights sidedness in the brain of a chordate sibling*, eLife, 5 (2016), p. 1.

[216] Saha S., Bairagi N. et Dana S. K., *Chimera states in ecological network under weighted mean-field dispersal of species*, Front. Appl. Math. Stat., 5 (2019), p. 15.

[217] Sakaguchi H. et Kuramoto Y., *A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entrainment*, Prog. Theor. Phys., 76 (1986), p. 576.

[218] Salova A., Emenheiser J., Rupe A., Crutchfield J. P. et D'Souza R. M., *Koopman operator and its approximations for systems with symmetries*, Chaos, 29 (2019), p. 093128.

[219] Sarkar C. et Jalan S., *Spectral properties of complex networks*, Chaos, 28 (2018), p. 102101.

[220] Sarkar S., *Models of reduction and categories of reductionism*, Synthese, 91 (1992), p. 167.

[221] Schaeffer S. E., *Graph clustering*, Comput. Sci. Rev., 1 (2007), p. 27–64.

[222] Scheffer L. K. et al. , *A connectome and analysis of the adult Drosophila central brain*, eLife, 9 (2020), p. 1.

[223] Schröder M., Timme M. et Witthaut D., *A universal order parameter for synchrony in networks of limit cycle oscillators*, Chaos, 27 (2017), p. 073119.

[224] Seshadhri C., Sharma A., Stolman A. et Goel A., *The impossibility of low-rank representations for triangle-rich complex networks*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 117 (2020), p. 5631.

[225] Sethia G. C. et Sen A., *Chimera states : The existence criteria revisited*, Phys. Rev. Lett., 112 (2014), p. 144101.

[226] Simon H. A., *The architecture of complexity*, Proc. Am. Phil. Soc., 106 (1962), p. 467.

[227] Sorrentino F., Pecora L. M., Hagerstrom A. M., Murphy T. E. et Roy R., *Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks*, Science (80-.)., (2016), p. 1.

[228] Staley K., *Molecular mechanisms of epilepsy*, Nat. Neurosci., 18 (2015), p. 367.

[229] Strogatz S. H., *SYNC : How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life*, Hachette Books, 2003.

[230] ——, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, CRC Press, 2018.

[231] Tanaka D. et Kuramoto Y., *Complex Ginzburg-Landau equation with nonlocal coupling*, Phys. Rev. E, 68 (2003), p. 026219.

[232] Tanaka H.-A., Lichtenberg A. J. et Oishi S., *First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems*, Phys. Rev. Lett., 78 (1997), p. 2104.

[233] Tang M., *The eigenvalues of stochastic blockmodel graphs*, arXiv preprint arXiv :1803.11551, (2018).

[234] Thibeault V., St-Onge G., Dubé L. J. et Desrosiers P., *Threefold way to the dimension reduction of dynamics on networks : an application to synchronization*, arXiv preprint arXiv :2005.10922, (2020).

[235] Tinsley M. R., Nkomo S. et Showalter K., *Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators*, Nat. Phys., 8 (2012), p. 662.

[236] Totz J. F., Rode J., Tinsley M. R., Showalter K. et Engel H., *Spiral wave chimera states in large populations of coupled chemical oscillators*, Nat. Phys., 14 (2018), p. 282.

[237] Treuting P. M., Dintzis S. M. et Montine K. S., éds., *Comparative Anatomy and Histology : A Mouse, Rat, and Human Atlas*, Elsevier, elsevier éd., 2017.

[238] Turtle J., Buono P.-L., Palacios A., Dabrowski C., In V. et Longhini P., *Synchronization of spin torque nano-oscillators*, Phys. Rev. B, 95 (2017), p. 144412.

[239] Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S. et Pikovsky A., *Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen Ansatz*, Phys. Rev. Lett., 120 (2018), p. 264101.

[240] Van Mieghem P., *Graph Spectra for Complex Networks*, Cambridge University Press, 2011.

[241] Van Mieghem P., *Epidemic phase transition of the sis type in networks*, EPL, 97 (2012), p. 48004.

[242] Varela F., Lachaux J.-P., Rodriguez E. et Martinerie J., *The brainweb : Phase synchronization and large-scale integration*, Nature Reviews Neuroscience, 2 (2001), p. 229.

[243] Varshney L., Chen B., Paniagua E., Hall D. et Chklovskii D., *Wormatlas : Neuronal wiring*. https://www.wormatlas.org/neuronalwiring.html#Connectivitydata. Accessed : 2019-11-19.

[244] Vasseur D. A. et Fox J. W., *Phase-locking and environmental fluctuations generate synchrony in a predator – prey community*, Nature, 460 (2009), p. 1007.

[245] Vicsek T. et Zafeiris A., *Collective motion*, Phys. Rep., 517 (2012), p. 71.

[246] Vlasov V., Zou Y. et Pereira T., *Explosive synchronization is discontinuous*, Phys. Rev. E, 92 (2015), p. 012904.

[247] Vogelstein J. T., *Neurodata*. https://neurodata.io/project/connectomes/. Accessed : 2020-03-26.

[248] Watanabe S. et Strogatz S. H., *Integrability of a Globally Coupled Oscillator Array*, Phys. Rev. Lett., 70 (1993), p. 2391.

[249] ——, *Constants of motion for superconducting Josephson arrays*, Physica D, 74 (1994), p. 197.

[250] Weaver W., *Science and Complexity*, Am. Sci., 36 (1948), p. 536.

[251] Weinberg S., *Newtonianism, reductionism and the art of congressional testimony*, Nature, 330 (1987), p. 433.

[252] ——, *The limit of reductionism (reply)*, Nature, 331 (1988), p. 475.

[253] ——, *Dreams of a Final Theory*, Vintage Books, 1994.

[254] Wiener N., *Cybernetics : or the Control and Communication in the Animal and the Machine*, MIT Press, 1961.

[255] Wiesenfeld K., Colet P. et Strogatz S. H., *Synchronization transitions in a disordered Josephson series array*, Phys. Rev. Lett., 76 (1996), p. 404.

[256] Wiggins S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2003.

[257] Wilson D. et Ermantrout B., *Phase Models Beyond Weak Coupling*, Phys. Rev. Lett., 123 (2019), p. 164101.

[258] Wilson H. R. et Cowan J. D., *A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue*, Biol. Cybern., 13 (1973), p. 55.

[259] Wimsatt W. C., *Reductionism and its heuristics : Making methodological reductionism honest*, Synthese, 151 (2006), p. 445.

[260] Winfree A. T., *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*, J. Theoret. Biol., 16 (1967), p. 15.

[261] Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y. et Kapitaniak T., *The smallest chimera state for coupled pendula*, Sci. Rep., 6 (2016), p. 34329.

[262] Wu J., Jiao L., Jin C., Liu F., Gong M., Shang R. et Chen W., *Overlapping community detection via network dynamics*, Phys. Rev. E, 85 (2012), p. 016115.

[263] Xu C., Boccaletti S., Guan S. et Zheng Z., *Origin of Bellerophon states in globally coupled phase oscillators*, Phys. Rev. E, 98 (2018), p. 050202(R).

[264] Yan G., Vértes P. E., Towlson E. K., Chew Y. L., Walker D. S., Schafer W. R. et Barabási A.-L., *Network control principles predict neuron function in the Caenorhabditis elegans connectome*, Nature, 550 (2017), p. 519.

[265] Yeldesbay A., Pikovsky A. et Rosenblum M., *Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett., 112 (2014), p. 144103.

[266] Young J.-G., Desrosiers P., Hébert-Dufresne L., Laurence E. et Dubé L. J., *Finite-size analysis of the detectability limit of the stochastic block model*, Phys. Rev. E, 95 (2017), p. 062304.

[267] Young J.-G., St-Onge G., Desrosiers P. et Dubé L. J., *On the universality of the stochastic block model*, Phys. Rev. E, 98 (2018), p. 032309.

[268] Zhang X., Nadakuditi R. R. et Newman M. E. J., *Spectra of random graphs with community structure and arbitrary degrees*, Phys. Rev. E, 89 (2014), p. 042816.

[269] Zhu J., *Synchronization of Kuramoto model in a high-dimensional linear space*, Phys. Lett. A, 377 (2013), p. 2939.

[270] Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z. et Kurths J., *Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization*, Phys. Rev. Lett., 112 (2014), p. 114102.